Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Ферапонтов, К. Р. Хуснутдинова, М. В. Павлов, Классификация интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных квазилинейных иерархий, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 35–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1829>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 13:31:29

© 2005 г. Е. В. Ферапонтов^{*,†}, К. Р. Хуснутдинова^{*,‡},
М. В. Павлов^{*}

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ (2 + 1)-МЕРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ИЕРАРХИЙ

Исследуются (2 + 1)-мерные иерархии, ассоциированные с интегрируемыми дифференциальными уравнениями вида $\Omega_{tt} = F(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy})$, которые обобщают иерархию бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили. Интегрируемость понимается как существование бесконечного числа гидродинамических редукций.

Ключевые слова: интегрируемые иерархии типа иерархии бездисперсионного уравнения Кадомцева–Петвиашвили, гидродинамические редукции, псевдопотенциалы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим функцию Ω бесконечного числа независимых переменных $t^0, t^1, t^2, \dots$, которая удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) второго порядка

$$\Omega_{nk} = \Phi_{nk}(\Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{02}, \dots, \Omega_{0, n+k}),$$

здесь $\Omega_{nk} \equiv \partial_{t^n} \partial_{t^k} \Omega$, $n \geq 1$, $k \geq 1$. Более подробно:

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= \Phi_{11}(\Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{02}), \\ \Omega_{12} &= \Phi_{12}(\Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03}), \\ \Omega_{13} &= \Phi_{13}(\Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03}, \Omega_{04}), \\ \Omega_{22} &= \Phi_{22}(\Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03}, \Omega_{04})\end{aligned}\tag{1}$$

^{*}Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Loughborough, Leicestershire LE11 3TU, UK. E-mail: E.V.Ferapontov@lboro.ac.uk, K.Khusnutdinova@lboro.ac.uk, M.V.Pavlov@lboro.ac.uk

[†]Центр нелинейных исследований, Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Москва, Россия

[‡]Институт механики, Уфимское отделение РАН, 450025, ул. К. Маркса, 12, к. 6, Уфа, Россия

и т.д. Уравнения этого типа обобщают иерархию бездисперсионного уравнения Кадома-Цева–Петвиашвили (КП)

$$\begin{aligned}\Omega_{11} &= \Omega_{02} - \frac{1}{2}\Omega_{00}^2, \\ \Omega_{12} &= \Omega_{03} - \Omega_{00}\Omega_{01}, \\ \Omega_{13} &= \Omega_{04} - \Omega_{00}\Omega_{02} - \frac{1}{2}\Omega_{01}^2, \\ \Omega_{22} &= \Omega_{04} + \frac{1}{3}\Omega_{00}^3 - \Omega_{00}\Omega_{02} - \Omega_{01}^2\end{aligned}$$

и т.д. Дополнительные примеры возникают при решении задачи Дирихле в многосвязных областях [1]. Условия совместности уравнений (1) накладывают жесткие ограничения на функции Φ_{nk} , означающие, в частности, что Φ_{11} однозначно определяет остальные функции Φ_{nk} [2], [3]. Сама функция Φ_{11} удовлетворяет сложной переопределенной системе ДУЧП третьего порядка (см. раздел 2, в котором мы заново выводим эту систему на основе метода гидродинамических редукций [4]–[7]). Ее общее решение может быть приведено к одной из четырех существенно различных канонических форм

$$\begin{aligned}\Phi_{11} &= \Omega_{02} + \frac{1}{4A}(A\Omega_{01} + 2B\Omega_{00})^2 + Ce^{-A\Omega_{00}}, \\ \Phi_{11} &= \frac{\Omega_{02}}{\Omega_{00}} + \left(\frac{1}{\Omega_{00}} + \frac{A}{4\Omega_{00}^2}\right)\Omega_{01}^2 + \frac{B}{\Omega_{00}^2}\Omega_{01} + \frac{B^2}{A\Omega_{00}^2} + Ce^{A/\Omega_{00}}, \\ \Phi_{11} &= \frac{\Omega_{02}}{\Omega_{01}} + \frac{1}{6}\eta(\Omega_{00})\Omega_{01}^2, \\ \Phi_{11} &= \ln \Omega_{02} - \ln \theta_1(\Omega_{01}, \Omega_{00}) - \frac{1}{4} \int^{\Omega_{00}} \eta(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

см. [2]. Здесь $\eta(\tau)$ – решение уравнения Шази (см. [8])

$$\eta''' + 2\eta\eta'' = 3\eta'^2, \quad (2)$$

которое может быть представлено в параметрической форме

$$\eta(\tau) = \frac{4}{\pi^2} \mathbf{K}(s)[(2-s^2)\mathbf{K}(s) - 3\mathbf{E}(s)], \quad \tau = -\pi^2 \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-s^2})}{\mathbf{K}(s)},$$

где $\mathbf{K}(s)$ и $\mathbf{E}(s)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно [9]. Тета-функция

$$\theta_1(z, \tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-(n+1/2)^2 \tau} \sin[(2n+1)z]$$

определяется как решение инволютивной системы

$$\begin{aligned}\partial_z \theta_1 &= -k\theta_1, \quad \partial_\tau \theta_1 = \frac{1}{4}(k^2 - l)\theta_1, \\ \partial_z k &= l, \quad \partial_\tau k = \frac{1}{4} \sqrt{4l^3 - 4\eta l^2 - 8\eta' l - \frac{8}{3}\eta''} - \frac{1}{2}kl, \\ \partial_z l &= \sqrt{4l^3 - 4\eta l^2 - 8\eta' l - \frac{8}{3}\eta''}, \\ \partial_\tau l &= l^2 - \eta l - \eta' - \frac{1}{2}k \sqrt{4l^3 - 4\eta l^2 - 8\eta' l - \frac{8}{3}\eta''},\end{aligned} \quad (3)$$

где, как и ранее, η – решение уравнения Шази (2). Подчеркнем, однако, что для работы с приведенными выше выражениями для функции Φ_{11} не нужны явные формулы для θ_1 и η ; что действительно необходимо, так это уравнения (2), (3).

Иерархия бездисперсионного уравнения КП соответствует простому вырождению первой канонической формы: $A = -2B^2$, $B \rightarrow 0$, $C = 0$. Аналогично иерархия модифицированного бездисперсионного уравнения КП

$$\Omega_{11} = \Omega_{02} + B\Omega_{00}\Omega_{01} + \frac{B^2}{3}\Omega_{00}^3$$

может быть получена при вырождении $C = -2B^2A^{-3}$, $A \rightarrow 0$ (вместе с подходящей линейной заменой переменной t^2).

В разделе 2 мы сосредоточимся на первом уравнении

$$\Omega_{11} = \Phi_{11}(\Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{02}), \quad (4)$$

не делая дополнительных предположений относительно структуры высших потоков иерархии. Вводя обозначения $t^0 \equiv x$, $t^1 \equiv t$, $t^2 \equiv y$, $\Phi_{11} \equiv G$, $\Omega_{00} \equiv a$, $\Omega_{01} \equiv b$, $\Omega_{02} \equiv c$, перепишем (4) в квазилинейном виде

$$a_t = b_x, \quad a_y = c_x, \quad b_y = c_t, \quad b_t = G(a, b, c)_x. \quad (5)$$

Применяя к (5) метод гидродинамических редукций (в духе работ [6]), мы придем к такой же системе ДУЧП для функции Φ_{11} , которая была получена в работах [2]. Это подтверждает, что симметричный подход работ [2], основанный на уравнениях (1), дает *полный список* интегрируемых уравнений вида (4).

В разделе 3 рассматриваются скалярные псевдопотенциалы

$$\psi_t = Q(\psi_x, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}), \quad \psi_y = L(\psi_x, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy}),$$

которые играют роль бездисперсионных пар Лакса [10] для уравнений (4). Чтобы вычислить псевдопотенциалы, мы вводим *отрицательные* времена $t^{-1}, t^{-2}, \dots$ и рассматриваем соответствующие *отрицательные* потоки иерархии.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА $\Omega_{tt} = G(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy})$

В этом разделе показывается, как классификационные результаты работ [2] (см. также [3]) получаются с помощью предложенного в работах [6] метода гидродинамических редукций. Прежде всего, введя обозначения $\Omega_{xx} = a$, $\Omega_{xt} = b$, $\Omega_{xy} = c$, $\Omega_{tt} = G(a, b, c)$, перепишем наше уравнение в квазилинейном виде (5). Будем искать гидродинамические редукции в виде $a = a(R^1, \dots, R^n)$, $b = b(R^1, \dots, R^n)$, $c = c(R^1, \dots, R^n)$, где римановы инварианты удовлетворяют уравнениям

$$R_t^i = \lambda^i(R)R_x^i, \quad R_y^i = \mu^i(R)R_x^i. \quad (6)$$

Подставляя их в (5), получаем

$$\partial_i b = \lambda^i \partial_i a, \quad \partial_i c = \mu^i \partial_i a$$

вместе с дисперсионным соотношением

$$(\lambda^i)^2 = G_a + G_b \lambda^i + G_c \mu^i.$$

Условия коммутативности потоков (6) имеют вид (см. [11])

$$\frac{\partial_j \lambda^i}{\lambda^j - \lambda^i} = \frac{\partial_j \mu^i}{\mu^j - \mu^i}, \quad i \neq j, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial_{R^j}}. \quad (7)$$

Дифференцируя дисперсионное соотношение и учитывая (7), находим выражения для $\partial_j \lambda^i$ в виде

$$\begin{aligned} \partial_j \lambda^i = \frac{\partial_j a}{G_c(\lambda^i - \lambda^j)} & \left(G_{aa} G_c + G_{ab} G_c(\lambda^i + \lambda^j) + G_{bb} G_c \lambda^i \lambda^j + \right. \\ & + (G_{ac} + \lambda^i G_{bc})((\lambda^j)^2 - G_b \lambda^j - G_a) + \\ & \left. + ((\lambda^i)^2 - G_b \lambda^i - G_a) \left[G_{ac} + G_{bc} \lambda^j + \frac{G_{cc}}{G_c}((\lambda^j)^2 - G_b \lambda^j - G_a) \right] \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Из условий совместности уравнений $\partial_i b = \lambda^i \partial_i a$ и $\partial_i c = \mu^i \partial_i a$ вытекает, что

$$\partial_i \partial_j a = \frac{\partial_j \lambda^i}{\lambda^j - \lambda^i} \partial_i a + \frac{\partial_i \lambda^j}{\lambda^i - \lambda^j} \partial_j a. \quad (9)$$

Можно видеть, что условия совместности уравнений (8), т.е. $\partial_k \partial_j \lambda^i - \partial_j \partial_k \lambda^i = 0$, имеют вид $P \partial_j a \partial_k a = 0$, где P есть сложное рациональное выражение по $\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k$, коэффициенты которого зависят от частных производных функции $G(a, b, c)$ вплоть до третьего порядка (чтобы получить условия интегрируемости, достаточно рассмотреть трехкомпонентные редукции, полагая $i = 1, j = 2, k = 3$). Требуя, чтобы P тождественно обращалось в нуль, мы получаем выражения для всех частных производных G третьего порядка. Аналогично условия совместности уравнений (9), т.е. $\partial_k(\partial_i \partial_j a) - \partial_j(\partial_i \partial_k a) = 0$, принимают вид $S \partial_i a \partial_j a \partial_k a = 0$, где снова S рационально по $\lambda^i, \lambda^j, \lambda^k$. Приравнявая S к нулю, мы получаем в точности те же условия, что и на предыдущем шаге. Полученное в результате множество условий интегрируемости выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{ccc} &= \frac{2G_{cc}^2}{G_c}, \quad G_{acc} = \frac{2G_{ac}G_{cc}}{G_c}, \quad G_{bcc} = \frac{2G_{bc}G_{cc}}{G_c}, \\ G_{aac} &= \frac{2G_{ac}^2}{G_c}, \quad G_{abc} = \frac{2G_{ac}G_{bc}}{G_c}, \quad G_{bbc} = \frac{2G_{bc}^2}{G_c}, \\ G_{bbb} &= \frac{2}{G_c^2} (G_b G_{bc}^2 + G_{bc}(G_c G_{bb} + 2G_{ac}) - G_{cc}(G_b G_{bb} + 2G_{ab})), \\ G_{abb} &= \frac{2}{G_c^2} (G_a G_{bc}^2 + G_{ac}(G_c G_{bb} + G_{ac}) - G_{cc}(G_a G_{bb} + G_{aa})), \\ G_{aab} &= \frac{2}{G_c^2} (G_{cc}(G_b G_{aa} - 2G_a G_{ab}) - G_{ac}(G_b G_{ac} - 2G_c G_{ab}) - \\ & - G_{bc}(G_c G_{aa} - 2G_a G_{ac})), \\ G_{aaa} &= \frac{2}{G_c^2} ((G_a + G_b^2)G_{ac}^2 + G_a^2 G_{bc}^2 + G_c^2(G_{ab}^2 - G_{aa} G_{bb}) - \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 & -G_{cc}G_{bb}G_a^2 + G_{ac}G_c(G_{aa} + 2(G_aG_{bb} - G_bG_{ab})) + \\
 & + 2G_{bc}(G_b(G_cG_{aa} - G_aG_{ac}) - G_aG_cG_{ab}) - \\
 & - G_{cc}((G_a + G_b^2)G_{aa} - 2G_aG_bG_{ab}).
 \end{aligned}$$

Эта система находится в инволюции, и ее общее решение зависит от 10 констант интегрирования (действительно, в любой точке a_0, b_0, c_0 можно произвольным образом задать значения функции G и ее частных производных вплоть до второго порядка).

Интегрирование первых шести уравнений в (10) дает

$$G(a, b, c) = \frac{1}{\varepsilon} \ln(\alpha a + \beta b + \gamma + \varepsilon c) + F(a, b).$$

Подстановка этого анзаца в оставшиеся уравнения накладывает дальнейшие ограничения на функцию $F(a, b)$:

$$\begin{aligned}
 F_{bbb} - 4\varepsilon F_{ab} - 2\varepsilon F_b F_{bb} &= 0, & F_{abb} - 2\varepsilon F_{aa} - 2\varepsilon F_a F_{bb} &= 0, \\
 F_{aab} + 2\varepsilon F_b F_{aa} - 4\varepsilon F_a F_{ab} &= 0, \\
 F_{aaa} - 2\varepsilon F_a F_{aa} + 2F_{aa} F_{bb} - 2\varepsilon F_b^2 F_{aa} - 2F_{ab}^2 + \\
 + 4\varepsilon F_a F_b F_{ab} - 2\varepsilon F_a^2 F_{bb} &= 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

которые тождественно совпадают с ограничениями, полученными в работах [2]. Первое уравнение в (11) имеет общее решение

$$F = -\frac{1}{4\varepsilon} \int \eta(a) da - \frac{1}{\varepsilon} \ln \theta(a, b), \quad 4\varepsilon \theta_a = \theta_{bb}, \tag{12}$$

подстановка которого в оставшиеся уравнения (11) и последующее интегрирование приводят, как показано в [2], к четырем существенно различным (под)случаям.

Это подтверждает, что используемый в работах [2] симметричный подход дает *все* интегрируемые иерархии вида (1).

3. ПСЕВДОПОТЕНЦИАЛЫ

Введем *отрицательные* времена $t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}, \dots$ и расширим иерархию (1) уравнениями

$$\begin{aligned}
 \Omega_{n,-k} &= \Phi_{n,-k}(\Omega_{0,-k}, \Omega_{0,-k+1}, \dots, \Omega_{00}, \Omega_{01}, \dots, \Omega_{0n}), \\
 \Omega_{-n,-k} &= \Phi_{-n,-k}(\Omega_{0,-n-k}, \Omega_{0,-n-k+1}, \dots, \Omega_{00});
 \end{aligned}$$

в частности,

$$\begin{aligned}
 \Omega_{1,-1} &= \Phi_{1,-1}(\Omega_{0,-1}, \Omega_{00}, \Omega_{01}), \\
 \Omega_{2,-1} &= \Phi_{2,-1}(\Omega_{0,-1}, \Omega_{00}, \Omega_{01}, \Omega_{02}).
 \end{aligned}$$

Используя обозначения $t^0 \equiv x$, $t^1 \equiv t$, $t^2 \equiv y$, $t^{-1} \equiv z$, $\Phi_{1,-1} \equiv Q$, $\Phi_{2,-1} \equiv L$, можно переписать эти уравнения в виде

$$\begin{aligned}
 \Omega_{tz} &= Q(\Omega_{xz}, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}), \\
 \Omega_{yz} &= L(\Omega_{xz}, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy}).
 \end{aligned}$$

В терминах $\psi = \Omega_z$ это дает псевдопотенциал

$$\begin{aligned}\psi_t &= Q(\psi_x, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}), \\ \psi_y &= L(\psi_x, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}, \Omega_{xy})\end{aligned}$$

для уравнения (4). Ниже будет показано, как можно получить явные выражения для обеих функций Q и L .

ЗАМЕЧАНИЕ. Иерархия уравнения Бойера–Финли [12]

$$\Omega_{1,-1} = \exp \Omega_{00}$$

может быть получена как результат простого вырождения $B = C = 0$, $A = -2$ в первой канонической форме; первый коммутирующий поток этой иерархии есть

$$\Omega_{11} = \Omega_{02} - \frac{1}{2} \Omega_{01}^2.$$

Получим сначала явный вид функции Q , применив метод гидродинамических редукций к уравнению

$$\Omega_{zt} = Q(\Omega_{xz}, \Omega_{xx}, \Omega_{xt}).$$

Введя обозначения $\Omega_{xx} = a$, $\Omega_{xt} = b$, $\Omega_{xz} = e$, $\Omega_{zt} = Q(e, a, b)$, можно переписать это уравнение в квазилинейной форме

$$a_t = b_x, \quad a_z = e_x, \quad b_z = e_t = Q(e, a, b)_x. \quad (13)$$

Будем искать редукции в виде $a = a(R^1, \dots, R^n)$, $b = b(R^1, \dots, R^n)$, $e = e(R^1, \dots, R^n)$, где римановы инварианты удовлетворяют уравнениям

$$R_t^i = \lambda^i(R) R_x^i, \quad R_z^i = \zeta^i(R) R_x^i.$$

Подставляя их в (13), получаем

$$\partial_i b = \lambda^i \partial_i a, \quad \partial_i e = \zeta^i \partial_i a$$

вместе с дисперсионным соотношением

$$\zeta^i \lambda^i = Q_a + Q_b \lambda^i + Q_e \zeta^i.$$

Как и ранее, условия коммутативности (7) приводят к выражениям для $\partial_j \lambda^i$ ($i \neq j$), а условия совместности уравнений $\partial_i b = \lambda^i \partial_i a$, $\partial_i e = \zeta^i \partial_i a$ дают (9). Условия совместности $\partial_k \partial_j \lambda^i - \partial_j \partial_k \lambda^i = 0$ имеют вид $R \partial_j a \partial_k a = 0$, где R есть рациональное выражение по λ^i , λ^j , λ^k , коэффициенты которого зависят от частных производных функции $Q(e, a, b)$ вплоть до третьего порядка. Требуя, чтобы R тождественно обращалось в нуль, мы получаем выражения для всех частных производных Q третьего порядка. Аналогично условия совместности уравнений (9), т.е. $\partial_k (\partial_i \partial_j a) - \partial_j (\partial_i \partial_k a) = 0$, принимают вид $M \partial_i a \partial_j a \partial_k a = 0$, где M снова является рациональным выражением по λ^i ,

λ^j, λ^k . Приравнивая M к нулю, мы получаем в точности те же условия, что и на предыдущем шаге. Окончательно множество условий интегрируемости выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 Q_{bbb} &= \frac{Q_{bb}(Q_b Q_{be} + Q_e Q_{bb} + Q_{ab})}{Q_b Q_e + Q_a}, & Q_{eee} &= \frac{Q_{ee}(Q_{ee} Q_b + Q_e Q_{be} + Q_{ae})}{Q_b Q_e + Q_a}, \\
 Q_{bbe} &= \frac{Q_{bb}(Q_{ee} Q_b + Q_e Q_{be} + Q_{ae})}{Q_b Q_e + Q_a}, & Q_{bee} &= \frac{Q_{ee}(Q_b Q_{be} + Q_e Q_{bb} + Q_{ab})}{Q_b Q_e + Q_a}, \\
 Q_{aee} &= \frac{Q_{ee}(Q_b Q_{ae} + Q_e Q_{ab} + Q_{aa})}{Q_b Q_e + Q_a}, & Q_{abb} &= \frac{Q_{bb}(Q_b Q_{ae} + Q_e Q_{ab} + Q_{aa})}{Q_b Q_e + Q_a}, \\
 Q_{aab} &= \frac{Q_{ab}(2Q_e Q_{ab} + Q_{aa}) + Q_{bb}(2Q_a Q_{ae} - Q_e Q_{aa}) - Q_{be}(2Q_a Q_{ab} - Q_b Q_{aa})}{Q_b Q_e + Q_a}, \\
 Q_{abe} &= \frac{Q_{ae} Q_{ab} + Q_a(Q_{bb} Q_{ee} - Q_{be}^2) + Q_{be}(Q_b Q_{ae} + Q_e Q_{ab})}{Q_b Q_e + Q_a}, \\
 Q_{aae} &= \frac{2Q_a Q_{ab} Q_{ee} + Q_{aa} Q_{ae} + Q_{be}(Q_e Q_{aa} - 2Q_a Q_{ae}) + Q_b(2Q_{ae}^2 - Q_{aa} Q_{ee})}{Q_b Q_e + Q_a}, \\
 Q_{aaa} &= (Q_{aa}[2(Q_b^2 Q_{ee} + Q_e^2 Q_{bb}) + Q_b Q_{ae} + Q_e Q_{ab} + Q_{aa} - 2Q_{be}(Q_a + 2Q_b Q_e)] + \\
 &\quad + 2Q_{ab}[Q_a(Q_{ae} + 2Q_e Q_{be}) + 2Q_b(Q_e Q_{ae} - Q_a Q_{ee}) - Q_e^2 Q_{ab}] + \\
 &\quad + 2Q_{ae}[Q_a(2Q_b Q_{be} - 2Q_e Q_{bb}) - Q_b^2 Q_{ae}] + 2Q_a^2[Q_{bb} Q_{ee} - Q_{be}^2]) \times \\
 &\quad \times \frac{1}{Q_b Q_e + Q_a}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Эта система находится в инволюции, и ее общее решение зависит от 10 констант интегрирования.

Нетрудно видеть, что общее решение первых шести уравнений этой системы имеет вид

$$Q = \frac{1}{4} \ln \frac{U(a, p)}{V(a, q)}, \quad 4U_a = U_{pp}, \quad 4V_a = V_{qq},$$

где

$$p = b - e, \quad q = b + e.$$

Общее решение системы (14) может быть получено путем подстановки этого анзаца в оставшиеся уравнения. Введем обозначения

$$Q_p = -\frac{1}{4}k, \quad Q_{pp} = -\frac{1}{4}l, \quad Q_q = \frac{1}{4}m, \quad Q_{qq} = \frac{1}{4}n,$$

где $\partial_b = \partial_q + \partial_p$, $\partial_e = \partial_q - \partial_p$. Тогда восьмое из уравнений системы (14) принимает вид

$$\begin{aligned}
 4nn_a - n_q(n_q - 2mn) + 2n[2l_a + kl_p - 2l^2] = \\
 = 4ll_a - l_p(l_p - 2kl) + 2l[2n_a + mn_q - 2n^2],
 \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
 Q_a &= \frac{1}{16}[-l + n + k^2 - m^2], & Q_{be} &= \frac{1}{4}(n + l), & Q_b &= \frac{1}{4}(m - k), \\
 Q_e &= \frac{1}{4}(m + k), & Q_{bb} &= \frac{1}{4}(n - l), & Q_{ee} &= \frac{1}{4}(n - l), \\
 Q_{ae} &= \frac{1}{16}[n_q - 2mn + l_p - 2kl], & Q_{ab} &= \frac{1}{16}[n_q - 2mn - l_p + 2kl].
 \end{aligned} \tag{16}$$

Дифференцируя уравнение (15) дважды по переменным p и q , имеем

$$n_q[2l_a + kl_p - 2l^2]_p = l_p[2n_a + mn_q - 2n^2]_q.$$

Предполагая, что $n_q \neq 0$ и $l_p \neq 0$, получаем

$$l_a = l^2 - \frac{1}{2}kl_p - \eta(a)l - C(a), \quad n_a = n^2 - \frac{1}{2}mn_q - \eta(a)n - B(a),$$

где $\eta(a)$, $B(a)$ и $C(a)$ суть функции, подлежащие определению. Подставляя n_a и l_a в (15), находим

$$\begin{aligned} l_p^2 &= 4l^3 - 4\eta(a)l^2 - 4[B(a) + C(a)]l - E(a), \\ n_q^2 &= 4n^3 - 4\eta(a)n^2 - 4[B(a) + C(a)]n - E(a), \end{aligned}$$

где $E(a)$ — пока еще не определенная функция. Используя условия совместности $(l_p)_a = (l_a)_p$, $(n_q)_a = (n_a)_q$, получаем

$$B = C = \eta', \quad E = \frac{8}{3}\eta'',$$

где η — решение уравнения Шази (2). С учетом этих формул оставшиеся уравнения для Q_{aaa} , Q_{aab} и Q_{aac} обращаются в тождества.

Таким образом, общее решение инволютивной системы (14) приводит к основному классификационному результату настоящего раздела:

$$\Omega_{zt} = \frac{1}{4} \ln \frac{\theta_1(\Omega_{xx}, \Omega_{xt} - \Omega_{xz})}{\theta_1(\Omega_{xx}, \Omega_{xt} + \Omega_{xz})}, \quad (17)$$

где θ_1 — тета-функция Якоби (см. (3)).

ЗАМЕЧАНИЕ. Эта формула дает псевдопотенциалы в общем случае

$$\Omega_{tt} = \ln \Omega_{xy} - \ln \theta_1(\Omega_{xt}, \Omega_{xx}) - \frac{1}{4} \int^{\Omega_{xx}} \eta(\tau) d\tau$$

(см. введение). Все частные случаи могут быть получены вырождением параметров (см., например, [3]).

ЗАМЕЧАНИЕ. Применив к независимым переменным (z, t) линейное преобразование, уравнение (17) можно переписать в более симметричном виде:

$$e^{\Omega_{zz}} \theta_1(\Omega_{xx}, \Omega_{xz}) = e^{\Omega_{tt}} \theta_1(\Omega_{xx}, \Omega_{xt}).$$

Чтобы вычислить функцию L , рассмотрим условие совместности

$$\partial_z G(a, b, c) = \partial_t Q(e, a, b),$$

которое влечет

$$G_a e_x + G_b Q(a, b, e)_x + G_c L(e, a, b, c)_x = Q_e Q(a, b, e)_x + Q_a b_x + Q_b G(a, b, c)_x;$$

напомним, что $c_z = L(e, a, b, c)_x$. Поэтому

$$L = Q_b c + f(e, a, b)$$

и

$$\begin{aligned} Q_{bb} &= \varepsilon(Q_a + Q_b Q_e), & Q_{ab} &= \varepsilon(Q_a Q_e + Q_b F_a - F_b Q_a), \\ Q_{be} &= \varepsilon(Q_e^2 - F_b Q_e - F_a), & f_b &= (\alpha a + \beta b + \gamma)(Q_a + Q_b Q_e), \\ f_a &= (\alpha a + \beta b + \gamma)(Q_a Q_e + Q_b F_a - F_b Q_a) + \frac{1}{\varepsilon}(\alpha Q_b - \beta Q_a), \\ f_e &= (\alpha a + \beta b + \gamma)(Q_e^2 - F_b Q_e - F_a) - \frac{1}{\varepsilon}(\beta Q_e + \alpha). \end{aligned}$$

Этих соотношений достаточно для восстановления функции L .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы продемонстрировали, что применение метода гидродинамических редукций к квазилинейным уравнениям (5) и (13) дает те же результаты, что и симметричный подход, использованный в работах [2]. Таким образом, оба метода позволяют классифицировать интегрируемые $(2 + 1)$ -мерные уравнения и находить их коммутирующие потоки (подробнее см. [2]).

Благодарности. Авторы благодарны Лондонскому математическому обществу за финансовую поддержку М. В. Павлова в Лафборо, которая сделала их сотрудничество возможным.

Список литературы

- [1] *I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin.* Integrable structure of the Dirichlet boundary problem in multiply-connected domains. hep-th/0309010.
- [2] *М. В. Павлов.* УМН. 2003. Т. 58. № 2. С. 171–172; ТМФ. 2004. Т. 138; ТМФ. 2004. Т. 138. № 1. С. 55–70.
- [3] *В. М. Бухитабер, Д. В. Лейкин, М. В. Павлов.* Функц. анализа и его прилож. 2003. Т. 37. С. 13–26.
- [4] *J. Gibbons, S. P. Tsarev.* Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 19–24; 1999. V. 258. P. 263–270.
- [5] *R. Carroll, Yu. Kodama.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 6373–6387.
- [6] *E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova.* Commun. Math. Phys. 2004. V. 248. P. 187–206; J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 2949–2963; J. Math. Phys. 2004. V. 45. P. 2365–2377.
- [7] *M. Manas, L. M. Alonso, E. Medina.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 401–417.
- [8] *J. Chazy.* C. R. Acad. Sc. Paris. 1910. V. 150. P. 456–458.
- [9] *М. А. Абрамовиц, И. А. Стиган (ред.).* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Мир, 1979.
- [10] *E. V. Zakharov.* Dispersionless limit of integrable systems in $2 + 1$ dimensions. In: Singular Limits of Dispersive Waves. Proc. of a NATO Adv. Research Workshop (Lyon, France, July 8–12, 1991). NATO ASI Ser., Ser. B. Physics. V. 320. Eds. N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre. N.Y.: Plenum Press, 1994. P. 165–174.
- [11] *С. П. Царев.* ДАН СССР. 1985. Т. 282. С. 534–537; Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048–1068.
- [12] *C. P. Boyer, J. D. Finley.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 1126–1130.