Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. О. Катанаев, Клиновья дислокация в геометрической теории дефектов,
ТМФ, 2003, том 135, номер 2, 338–352

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 07:21:30

КЛИНОВАЯ ДИСЛОКАЦИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДЕФЕКТОВ

Рассмотрена клиновaя дислокация в рамках теории упругости и геометрической теории дефектов. Показано, что в линейном приближении геометрическая теория количественно воспроизводит все результаты теории упругости. Согласие достигнуто путем введения постулата о том, что репер, удовлетворяющий уравнениям Эйнштейна, должен также удовлетворять калибровочному условию, которое в линейном приближении сводится к уравнениям теории упругости для поля смещений. Калибровочное условие зависит от коэффициента Пуассона, который измеряется экспериментально. Это указывает на существование выделенной системы отсчета, что является отказом от принципа относительности.

Ключевые слова: дислокация, геометрия Римана–Картана.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая теория упругости описывает малые деформации упругих сред без дефектов. Ее применение к средам, имеющим дефекты, ограничено рассмотрением отдельных дефектов, что вызвано сложностью граничных условий при математической постановке задачи. Поскольку реальные твердые тела содержат множество дефектов, то область применимости теории упругости существенно ограничена. Это ставит задачу построения теории дефектов в твердых телах. Несмотря на важность задачи и многочисленные попытки ее решения, универсальной теории дефектов в настоящее время нет.

Многообещающим подходом к этой проблеме является геометрическая теория дефектов (дислокаций и дисклинаций) в твердых телах. Такая модель (статическая) предложена в работе [1], где также можно найти ссылки на более ранние работы. Основная идея геометрической теории дефектов состоит в следующем. Бесконечная упругая среда без дефектов соответствует евклидову пространству $\mathbb{R}^3$, и деформации представляют собой диффеоморфизмы, меняющие метрику и, следовательно, экстремали. При этом пространство остается плоским в том смысле, что кручение и кривизна остаются нулевыми. При наличии дислокаций бесконечная упругая среда также топологически

* Математический институт им. В. А. Стеклова, Москва, Россия. E-mail: katanaev@mi.ras.ru

представляет собой евклидово пространство $\mathbb{R}^3$, однако геометрия меняется. Поверхностная плотность вектора Бюргерса отождествляется с тензором кручения, а кривизна при этом остается нулевой (пространство абсолютного параллелизма). Если среда обладает спиновой структурой, то в ней также возможно существование дефектов спиновой структуры – дисклинаций. Упругая среда только с дисклинациями отождествляется с римановым пространством, при этом тензор кривизны отождествляется с поверхностной плотностью вектора Франка. В общем случае при наличии и дислокаций, и дисклинаций мы получаем многообразие, топологически представляющее собой $\mathbb{R}^3$, но с нетривиальными кручением и кривизной (геометрия Римана–Картана).

Основной независимой переменной в геометрической теории дефектов является репер, который при переходе к теории упругости соответствует частным производным от вектора смещения. С математической точки зрения это дает определенные преимущества, так как при наличии дислокаций репер имеет меньше сингулярностей, чем вектор смещения. По заданному реперу можно построить метрику и анализировать рассеяние фононов на дислокациях, изучая поведение экстремалей. Эта задача рассматривалась авторами [2] и была решена для произвольного распределения прямолинейных параллельных дислокаций в [3]. Аналогичная задача в трехмерной гравитации рассматривалась в работе [4]. Недавно большое внимание было уделено физическим приложениям геометрической теории дефектов [5].

Геометрическая теория дефектов описывает с единой точки зрения упругие деформации, дислокации и дисклинации в средах. В эту схему включается описание как отдельных дефектов, так и их непрерывного распределения, что невозможно в рамках классической теории упругости. При этом теория упругости должна в определенном смысле содержаться в геометрическом подходе. Общие идеи геометрического подхода известны давно. Например, идея связать дислокации с тензором кручения была высказана еще в 50-е годы XX в. [6]. Тем не менее количественное согласие между геометрическим подходом и стандартной теорией упругости продемонстрировано не было. Настоящая статья восполняет этот пробел. А именно, на примере клиновой дислокации показано, что геометрическая теория дефектов приводит к результатам, совпадающим в линейном приближении с теми, которые дает теория упругости. Это означает, что классическая теория упругости является линейным приближением геометрической теории дефектов, причем имеет место не только качественное, но и количественное согласие между моделями.

С математической точки зрения классическая теория упругости вкладывается в геометрическую теорию дефектов следующим образом. В геометрической модели независимой переменной является репер, соответствующий частным производным первого порядка от вектора смещения теории упругости. Мы постулируем, что репер должен удовлетворять нелинейным уравнениям Эйнштейна для трехмерной метрики евклидовой сигнатуры, которые представляют собой уравнения равновесия упругой среды с дислокациями и являются уравнениями в частных производных второго порядка. Поскольку уравнения Эйнштейна ковариантны относительно общих преобразований координат, то для однозначного выбора решения необходимо зафиксировать систему коор-

динат (калибровку). Калибровочное условие представляет собой уравнение не выше первого порядка для репера, что соответствует уравнению второго порядка для вектора смещения. Для согласования геометрической теории дефектов с теорией упругости мы постулируем такое калибровочное условие для репера, которое в линейном приближении по вектору смещения совпадает с уравнениями классической теории упругости. Это обеспечивает возможность по заданному реперу в выбранной системе координат построить вектор смещения, в линейном приближении автоматически удовлетворяющий уравнениям теории упругости. Тем самым решается вопрос о количественном согласии между геометрической теорией дефектов и классической теорией упругости.

Подчеркнем принципиальное отличие предлагаемого подхода от основной идеи общей теории относительности, где все системы координат считаются равноправными. В геометрической теории дефектов мы ищем решение уравнений Эйнштейна для репера в такой калибровке, которая сводится к уравнениям теории упругости для вектора смещения. Калибровочное условие, как и уравнения теории упругости, содержит коэффициент Пуассона, который можно измерить экспериментально. Это означает, что мы предполагаем существование выделенной системы координат, и эта система фиксируется теорией упругости.

В разделах 2 и 3 мы рассмотрим клиновую и краевую дислокации в рамках теории упругости, построим для них векторное поле смещения и соответствующую метрику. В разделе 4 найдем точное решение уравнений Эйнштейна для клиновой дислокации в определенной калибровке и покажем, что в линейном приближении оно действительно воспроизводит результаты теории упругости не только качественно, но и количественно. В разделе 5 мы сравним геометрическую теорию дефектов с калибровочным подходом.

2. КЛИНОВАЯ ДИСЛОКАЦИЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Пусть x^i , $i = 1, 2, 3$, – декартовы координаты трехмерного евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ с евклидовой метрикой δ_{ij} . Под клиновой дислокацией мы понимаем бесконечную упругую среду, которая топологически совпадает с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$ без оси z , являющейся ядром дислокации, и которая построена следующим образом. Берется бесконечная упругая среда без дефектов, из нее вырезается бесконечный клин с углом $-2\pi\theta$. Для определенности мы считаем, что острие клина совпадает с осью z (см. рис. 1).

Затем края разреза симметрично сдвигаются и склеиваются. После этого среда под действием упругих сил приходит в равновесное состояние. Если клин из среды вырезается, то угол дефицита будем считать отрицательным, $-1 < \theta < 0$. При положительных θ клин вставляется. Таким образом, первоначально упругая среда занимает область, большую или меньшую евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в зависимости от знака угла дефицита θ , которая в цилиндрических координатах r, φ, z задается неравенствами

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\alpha, \quad -\infty < z < \infty, \quad \alpha = 1 + \theta. \quad (1)$$

В связи с тем, что в научной литературе под термином “дислокация” иногда понимают различные дефекты, дадим общее определение для бесконечной упругой среды.

Рис. 1. Клиновая дислокация с углом дефицита $2\pi\theta$. При отрицательных или положительных θ клин соответственно вырезается или вставляется.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Рассмотрим произвольное трехмерное многообразие $\mathbb{M}$ с краем $\partial\mathbb{M}$, на котором задана евклидова метрика. Зададим диффеоморфизм $y^i(x): \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}$, где $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ – некоторое подмногообразие меньшей размерности, на которое отображается край $\partial\mathbb{M}$. Если при этом вектор смещения $u^i(x) = y^i(x) - x^i$ в линейном приближении удовлетворяет уравнениям теории упругости с некоторыми граничными условиями на бесконечности и на крае $\partial\mathbb{M}$, то пара $(\mathbb{R}^3, g_{ij})$, где

$$g_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j} \delta_{kl} \quad (2)$$

– индуцированная метрика, называется дислокацией.

В рассмотренном выше примере клиновой дислокации многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой евклидово пространство за вычетом клина, его край $\partial\mathbb{M}$ – две полуплоскости, ограничивающие клин, подмногообразие $\mathbb{S}$ – одну полуплоскость, на которой происходит склейка края клина. При этом каждой точке полуплоскости $\mathbb{S}$ за вычетом края $\partial\mathbb{S}$ соответствуют две точки края $\partial\mathbb{M}$.

Сделаем несколько общих замечаний относительно данного определения. Если многообразие $\mathbb{M}$ представляет собой евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ без края и подмногообразие $\mathbb{S}$ пусто, то мы имеем диффеоморфизм $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, что представляет собой просто деформацию бесконечной упругой среды, т.е. нетривиальные дефекты возникают в том случае, когда многообразие $\mathbb{M}$ имеет край $\partial\mathbb{M}$. В общем случае от отображения $\partial\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}$ мы не требуем взаимной однозначности, т.е. в одну точку подмногообразия $\mathbb{S}$ могут отображаться несколько точек края $\partial\mathbb{M}$. Подчеркнем, что в определении используется фиксированная система координат, в которой записываются уравнения теории упругости, что делает его неинвариантным. Конечно, можно использовать произвольную систему координат евклидова пространства, однако какая-то система координат должна быть

выбрана. Это существенно, так как уравнения теории упругости содержат коэффициент Пуассона (или константы Ламе), который измеряется экспериментально. Для определенности мы рассматривали все евклидово пространство. Однако данное определение без труда переносится на ограниченные среды, для чего достаточно заменить евклидово пространство на его часть, ограниченную некоторой поверхностью.

Перейдем к математической постановке задачи для клиновой дислокации в рамках теории упругости. Будем считать, что клиновая дислокация представляет собой цилиндр конечного радиуса R . Эта задача обладает трансляционной инвариантностью вдоль оси z и вращательной инвариантностью в плоскости x, y . Поэтому будем использовать цилиндрическую систему координат. Пусть

$$\hat{u}_i = (\hat{u}_r, \hat{u}_\varphi, \hat{u}_z) \quad (3)$$

— координаты ко вектора смещения относительно ортонормального базиса в цилиндрической системе координат. Этот ко вектор в области (1) удовлетворяет уравнению равновесия [7]

$$(1 - 2\sigma)\Delta\hat{u}_i + \overset{\circ}{\nabla}_i \overset{\circ}{\nabla}_j \hat{u}^j = 0, \quad (4)$$

где σ — коэффициент Пуассона ($-1 \leq \sigma \leq 1/2$), Δ — оператор Лапласа и $\overset{\circ}{\nabla}_i$ — ковариантная производная для плоской евклидовой метрики в рассматриваемой системе координат.

Для справки приведем явные выражения для дивергенции и лапласиана от ко вектора смещения в цилиндрической системе координат:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla}_i \hat{u}^i &= \frac{1}{r} \partial_r (r \hat{u}^r) + \frac{1}{r} \partial_\varphi \hat{u}^\varphi + \partial_z \hat{u}^z, \\ \Delta \hat{u}_r &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \hat{u}_r) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \hat{u}_r + \partial_z^2 \hat{u}_r - \frac{1}{r^2} \hat{u}_r - \frac{2}{r^2} \partial_\varphi \hat{u}_\varphi, \\ \Delta \hat{u}_\varphi &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \hat{u}_\varphi) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \hat{u}_\varphi + \partial_z^2 \hat{u}_\varphi - \frac{1}{r^2} \hat{u}_\varphi + \frac{2}{r^2} \partial_\varphi \hat{u}_r, \\ \Delta \hat{u}_z &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \hat{u}_z) + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 \hat{u}_z + \partial_z^2 \hat{u}_z. \end{aligned}$$

Исходя из симметрии задачи, будем искать решение уравнения (4) в виде

$$\hat{u}_r = u(r), \quad \hat{u}_\varphi = A(r)\varphi, \quad \hat{u}_z = 0$$

с граничными условиями

$$\hat{u}_r|_{r=0} = 0, \quad \hat{u}_\varphi|_{r=0} = 0, \quad \hat{u}_\varphi|_{\varphi=2\pi\alpha} = -2\pi\theta r, \quad \partial_r \hat{u}_r|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

Первые три условия являются геометрическими, последнее имеет простой физический смысл: отсутствие внешних сил на границе среды. Функцию $A(r)$ находим из третьего из граничных условий (5):

$$A(r) = -\frac{\theta}{1 + \theta} r.$$

После этого прямая подстановка показывает, что φ - и z -компоненты уравнения равновесия (4) тождественно удовлетворяются, а радиальная компонента сводится к уравнению

$$\partial_r(r\partial_r u) - \frac{u}{r} = D, \quad D = -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u = \frac{D}{2} r \ln r + c_1 r + \frac{c_2}{r}, \quad c_{1,2} = \text{const}.$$

Постоянная интегрирования c_2 равна нулю в силу граничного условия в нуле. Константу c_1 находим из четвертого из граничных условий (5). В итоге получаем известное решение рассматриваемой задачи [8]:

$$\hat{u}_r = \frac{D}{2} r \ln \frac{r}{eR}, \quad \hat{u}_\varphi = -\frac{\theta}{1+\theta} r \varphi. \quad (6)$$

Отметим, что радиальная компонента вектора смещения в пределе $R \rightarrow \infty$ расходится. Это значит, что при рассмотрении клиновой дислокации необходимо рассматривать цилиндр конечного радиуса.

Запишем найденное решение в декартовой системе координат, что понадобится при рассмотрении краевой дислокации:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} x \ln \frac{r}{eR} - y \varphi \right), \\ u_y &= -\frac{\theta}{1+\theta} \left(\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} y \ln \frac{r}{eR} + x \varphi \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Линейная теория упругости применима в области малых относительных удлинений, которые для клиновой дислокации равны

$$\frac{d\hat{u}_r}{dr} = -\frac{\theta}{1+\theta} \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \frac{r}{R}, \quad \frac{1}{r} \frac{d\hat{u}_\varphi}{d\varphi} = -\frac{\theta}{1+\theta}.$$

Это значит, что мы вправе ожидать верных результатов для поля смещений при малых углах дефицита $\theta \ll 1$ и вблизи края цилиндра ($r \sim R$).

Найдем метрику, индуцированную клиновой дислокацией, в линейном приближении по углу дефицита θ . Вычисления можно провести, воспользовавшись общей формулой (2) или используя известное выражение для вариации формы метрики

$$\delta g_{mn} = -\overset{\circ}{\nabla}_m u_n - \overset{\circ}{\nabla}_n u_m. \quad (8)$$

После несложных вычислений получим следующее выражение для метрики в плоскости x, y :

$$ds^2 = \left(1 + \theta \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \ln \frac{r}{R} \right) dr^2 + r^2 \left(1 + \theta \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \ln \frac{r}{R} + \theta \frac{1}{1-\sigma} \right) d\varphi^2. \quad (9)$$

С этой метрикой мы ниже сравним метрику, полученную в разделе 4 путем решения трехмерных уравнений Эйнштейна.

3. КРАЕВАЯ ДИСЛОКАЦИЯ

В природе клиновые дислокации встречаются редко, так как требуют добавления или удаления большого количества вещества, что связано с существенными энергетическими затратами. Тем не менее их изучение представляет большой интерес, так как другие прямолинейные дислокации можно представить в виде суперпозиции клиновых. Покажем это на примере краевой дислокации – одного из наиболее распространенных дефектов. Краевая дислокация, ядро которой совпадает с осью z , изображена на рис. 2а.

Рис. 2. Краевая дислокация с вектором Бюргерса $\mathbf{b}$, направленным к оси дислокации (а). Краевая дислокация как диполь, состоящий из двух клиновых дислокаций с положительным и отрицательным углом дефицита (б).

Она возникает в результате разреза среды по полуплоскости $y = 0$, $x > 0$, сдвиге нижнего берега разреза к оси z на постоянный (вдали от ядра дислокации) вектор $\mathbf{b}$, который называется вектором Бюргерса, с последующей склейкой берегов разреза. Чтобы найти поле смещений краевой дислокации, можно решить соответствующую краевую задачу для уравнения равновесия (4) [7]. Однако, зная явный вид вектора смещения для клиновой дислокации, мы поступим иначе. Краевая дислокация представляет собой диполь, состоящий из двух клиновых дислокаций с положительным $2\pi\theta$ и отрицательным $-2\pi\theta$ углом дефицита, как показано на рис. 2б. Будем считать, что оси первой и второй клиновых дислокаций параллельны оси z и пересекают плоскость x, y соответственно в точках с координатами $(0, a)$ и $(0, -a)$. Расстояние между осями клиновых дислокаций равно $2a$. Из выражений для поля смещений (7) следует, что вдали от начала координат ($r \gg a$) поле смещений клиновых дислокаций с точностью до членов первого порядка малости по θ и a/r имеет вид

$$\begin{aligned} u_x^{(1)} &\approx -\theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} x \ln \frac{r-a \sin \varphi}{eR} - (y-a) \left(\varphi - \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right], \\ u_y^{(1)} &\approx -\theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} (y-a) \ln \frac{r-a \sin \varphi}{eR} + x \left(\varphi - \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_x^{(2)} &\approx \theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} x \ln \frac{r+a \sin \varphi}{eR} - (y+a) \left(\varphi + \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right], \\ u_y^{(2)} &\approx \theta \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} (y+a) \ln \frac{r+a \sin \varphi}{eR} + x \left(\varphi + \frac{a \cos \varphi}{r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку уравнения теории упругости линейны, то для нахождения поля смещений краевой дислокации достаточно сложить поля смещений (10) и (11). После несложных вычислений с точностью до смещения всей среды как целого на постоянный вектор вдоль оси y получим

$$\begin{aligned} u_x &= b \left[\arctg \frac{y}{x} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{xy}{x^2+y^2} \right], \\ u_y &= -b \left[\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)} \ln \frac{r}{eR} + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{x^2}{x^2+y^2} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где введено обозначение для модуля вектора Бюргерса $b = |\mathbf{b}| = -2a\theta$. Этот результат совпадает с выражением для поля смещений, полученным путем прямого решения уравнений теории упругости [7].

Найдем метрику, индуцированную краевой дислокацией. Используя формулу (8), в линейном приближении по θ и a/r получим метрику в плоскости x, y

$$ds^2 = \left(1 + \frac{1-2\sigma}{1-\sigma} \frac{b}{r} \sin \varphi \right) (dr^2 + r^2 d\varphi^2) - \frac{2b \cos \varphi}{1-\sigma} dr d\varphi. \quad (13)$$

4. КЛИНОВАЯ ДИСЛОКАЦИЯ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ

Рассмотрим теперь клиновую дислокацию с геометрической точки зрения. Как было отмечено во введении, дислокации в среде характеризуются нетривиальным кручением, а дисклинации – тензором кривизны. В картановых переменных тензоры кривизны и кручения имеют вид

$$R_{mn}{}^{ij} = \partial_m \omega_n{}^{ij} - \omega_m{}^{ik} \omega_{nk}{}^j - (m \leftrightarrow n), \quad (14)$$

$$T_{mn}{}^i = \partial_m e_n{}^i - \omega_m{}^{ij} e_{nj} - (m \leftrightarrow n), \quad (15)$$

где $e_m{}^i$ и $\omega_m{}^{ij}$ – репер и $\mathbb{SO}(3)$ -связность соответственно. Нами приняты следующие обозначения [1]. Индексы $i, j, k, l = 1, 2, 3$ относятся к ортонормированному базису касательного пространства и преобразуются при локальных $\mathbb{SO}(3)$ -вращениях. Индексы $m, n, p = 1, 2, 3$ являются координатными и нумеруют координаты в произвольной локальной системе координат. Если тензор кривизны равен нулю (отсутствие дисклинаций), то существует такой репер, что $\mathbb{SO}(3)$ -связность тождественно равна нулю по крайней мере локально: $\omega_{mj}{}^i = 0$. Тогда вся геометрия определяется тензором кручения (15), однозначно задаваемым репером $e_m{}^i$, который также однозначно определяет метрику $g_{mn} = e_m{}^i e_n{}^j \delta_{ij}$, удовлетворяющую, по предположению, уравнениям Эйнштейна [1]. Таким образом, решая уравнения Эйнштейна в пространстве абсолютного параллелизма, мы находим метрику, затем строим репер и по нему восстанавливаем тензор кручения, который характеризует распределение дислокаций в упругой среде.

Отметим, что та же метрика определяет тензор кривизны при нулевом кручении (риманова геометрия). В геометрической теории дефектов репер определяет тензор кручения, чего мы и будем придерживаться в дальнейшем.

В работе [1] для описания дефектов в упругих средах было предложено геометрическое действие. Уравнения равновесия, вытекающие из этого действия при отсутствии дисклинаций, совпадают с трехмерными уравнениями Эйнштейна для покоящейся точечной частицы и евклидовой сигнатуры метрики. При этом роль времени играет ось z . Точное решение такой задачи в гравитации хорошо известно [9]. Этим решением является описывающая коническую сингулярность в плоскости x, y метрика, которую мы запишем в виде

$$ds^2 = \frac{1}{\alpha^2} df^2 + f^2 d\varphi^2. \quad (16)$$

Здесь $\alpha = 1 + \theta$, где константа θ пропорциональна массе частицы. Радиальную координату мы обозначили буквой f , поскольку в дальнейшем будет совершено преобразование координат $f \rightarrow f(r)$.

С качественной точки зрения создание клиновой дислокации совпадает с определением конической сингулярности. Однако существует количественное расхождение, поскольку метрика (16) не совпадает с метрикой (9). Это расхождение связано с тем, что в теории упругости после вырезания клина и склейки мы требуем, чтобы вектор смещения в положении равновесия удовлетворял уравнениям равновесия. В то же время для конической сингулярности среда после склейки может быть деформирована произвольным образом. С формальной точки зрения это проявляется также в том, что индуцированная метрика (9), полученная в рамках теории упругости, зависит от коэффициента Пуассона, который отсутствует в теории гравитации. Это обстоятельство является принципиальным, поскольку коэффициент Пуассона измеряется экспериментально. Его отсутствие в уравнениях Эйнштейна означает, что в геометрическую теорию дефектов необходимо ввести дополнительный постулат.

С этой целью мы отказываемся от принципа относительности, который лежит в основе теории относительности и уравнивает все системы координат. В геометрической теории дефектов мы постулируем, что существует выделенная система отсчета, и метрика или репер в этой системе координат должны удовлетворять некоторому условию, которое в линейном приближении по полю смещений сводится к уравнению равновесия упругой среды. Из определения индуцированной метрики (2) следует, что в декартовой системе координат в линейном приближении по полю смещений метрика имеет вид

$$g_{mn} \approx \delta_{mn} - \partial_m u_n - \partial_n u_m.$$

Сравнивая это выражение с уравнением равновесия (4), нетрудно видеть, что калибровочные условия

$$g^{mn} \overset{\circ}{\nabla}_m g_{np} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} g^{mn} \overset{\circ}{\nabla}_p g_{mn} = 0, \quad (17)$$

$$\overset{\circ}{g}^{mn} \overset{\circ}{\nabla}_m g_{np} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \overset{\circ}{\nabla}_p g^T = 0 \quad (18)$$

в линейном приближении действительно совпадают с уравнениями теории упругости. В уравнении (18) введено обозначение для следа метрики $g^T = \overset{\circ}{g}{}^{mn} g_{mn}$. Проверку проще всего провести в декартовой системе координат.

Калибровочные условия (17), (18) понимаются следующим образом. Метрика $\overset{\circ}{g}{}_{mn}$ – евклидова метрика, записанная в произвольной системе координат, например, в цилиндрической или сферической. Ковариантная производная $\overset{\circ}{\nabla}_m$ построена по символам Кристоффеля, соответствующим метрике $\overset{\circ}{g}{}_{mn}$ и, следовательно, $\overset{\circ}{\nabla}_m \overset{\circ}{g}{}_{np} = 0$. Метрика g_{mn} – это метрика, соответствующая дислокации (точное решение уравнений Эйнштейна). Калибровочные условия отличаются тем, что в первом случае производится свертка с метрикой дислокации g^{mn} , а во втором случае – с евклидовой метрикой $\overset{\circ}{g}{}^{mn}$, что не меняет линейного приближения. Если решение уравнений Эйнштейна удовлетворяет одному из условий (17), (18), записанному, например, в цилиндрической системе координат, то будем говорить, что найдено решение в цилиндрической системе координат. Аналогично можно искать решения в декартовой, сферической или другой системе координат.

Калибровочные условия можно записать и для репера e_m^i , определенного уравнением

$$g_{mn} = e_m^i e_n^j \delta_{ij}.$$

Здесь следует иметь в виду, что репер определяется метрикой с точностью до локальных $\mathbb{O}(3)$ -вращений, действующих на индексы i, j . Поэтому для него возможны различные линейные приближения. Рассмотрим две возможности в декартовой системе координат:

$$e_{mi} \approx \delta_{mi} - \partial_m u_i, \quad (19)$$

$$e_{mi} \approx \delta_{mi} - \frac{1}{2}(\partial_m u_i + \partial_i u_m), \quad (20)$$

где индекс опущен с помощью символа Кронекера. Этим возможностям и условию (18) соответствуют два калибровочных условия для репера:

$$\overset{\circ}{g}{}^{mn} \overset{\circ}{\nabla}_m e_{ni} + \frac{1}{1-2\sigma} \overset{\circ}{e}{}^m{}_i \overset{\circ}{\nabla}_m e^T = 0, \quad (21)$$

$$\overset{\circ}{g}{}^{mn} \overset{\circ}{\nabla}_m e_{ni} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \overset{\circ}{e}{}^m{}_i \overset{\circ}{\nabla}_m e^T = 0 \quad (22)$$

($e^T = \overset{\circ}{e}{}^m{}_i e_m^i$), отличающиеся коэффициентами перед вторым слагаемым. Отметим, что в криволинейной системе координат в ковариантную производную $\overset{\circ}{\nabla}_m$ необходимо включить также плоскую $\mathbb{SO}(3)$ -связность, действующую на индексы i, j . Можно написать также и другие возможные калибровочные условия, которые имеют то же линейное приближение. Вопрос о правильном выборе калибровки выходит за рамки настоящей статьи. На данном этапе мы хотим только продемонстрировать, что систему координат необходимо зафиксировать и что калибровочное условие зависит от коэффициента Пуассона, который является экспериментально наблюдаемой величиной.

Калибровочные условия (21), (22) представляют собой дифференциальные уравнения первого порядка и содержат определенный произвол. Поэтому для однозначного фиксирования решения необходимо будет наложить граничные условия на репер для каждой конкретной задачи.

Таким образом, задача описания дислокаций в рамках геометрической теории дефектов сводится к решению уравнений Эйнштейна с калибровочным условием для репера. Для краткости калибровочное условие на репер или метрику, которое в линейном приближении сводится к уравнениям теории упругости на поле смещений, будем называть упругой калибровкой. Выберем упругую калибровку (22) как самую простую в случае клиновой дислокации. Задачу нахождения метрики можно решать двумя способами. Во-первых, калибровочное условие можно подставить непосредственно в уравнения Эйнштейна. Во-вторых, можно решить задачу в какой-то удобной системе координат, а затем найти такое преобразование координат, чтобы было выполнено калибровочное условие.

Поскольку точное решение для метрики известно (16), то проще следовать второму методу. Метрике (16) можно поставить в соответствие репер

$$e_r^{\hat{r}} = \frac{1}{\alpha}, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}} = f.$$

Здесь шляпка над индексом означает, что он относится к ортонормальной системе координат, а индекс без шляпки является координатным. Компоненты этого репера – квадратные корни из соответствующих компонент метрики и поэтому имеют симметричное линейное приближение (20). Поскольку клиновая дислокация симметрична относительно вращений в плоскости x, y , то совершим преобразование радиальной координаты $f \rightarrow f(r)$, после которого компоненты репера примут вид

$$e_r^{\hat{r}} = \frac{f'}{\alpha}, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}} = f, \quad (23)$$

где штрих обозначает дифференцирование по r . Репер, соответствующий евклидовой метрике, выберем в виде

$$\overset{\circ}{e}_r^{\hat{r}} = 1, \quad \overset{\circ}{e}_\varphi^{\hat{\varphi}} = r. \quad (24)$$

Ему соответствуют символы Кристоффеля $\overset{\circ}{\Gamma}_{mn}^p$ и $\mathbb{SO}(3)$ -связность $\overset{\circ}{\omega}_{mi}^j$, определяющие ковариантную производную. Выпишем только нетривиальные компоненты:

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi = \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \overset{\circ}{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \overset{\circ}{\omega}_{\varphi\hat{r}}^{\hat{\varphi}} = -\overset{\circ}{\omega}_{\varphi\hat{\varphi}}^{\hat{r}} = 1.$$

Непосредственная подстановка репера в калибровочное условие (22) приводит к дифференциальному уравнению Эйлера для функции перехода:

$$\frac{f''}{\alpha} + \frac{f'}{\alpha r} - \frac{f}{r^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} \left(\frac{f''}{\alpha} + \frac{f'}{r} - \frac{f}{r^2} \right) = 0.$$

Его общее решение

$$f = C_1 r^{n_1} + C_2 r^{n_2}$$

зависит от двух постоянных $C_{1,2}$, а показатели степени $n_{1,2}$ являются корнями квадратного уравнения

$$n^2 + n \frac{\sigma\theta}{1-\sigma} - \alpha = 0.$$

Для фиксирования констант интегрирования наложим на репер граничные условия:

$$e_r^{\hat{r}}|_{r=R} = 1, \quad e_\varphi^{\hat{\varphi}}|_{r=0} = 0. \quad (25)$$

Первое из них соответствует четвертому из граничных условий для вектора смещения (5), а второе – отсутствию угловой составляющей у тензора деформации в ядре дислокации. Этому соответствуют следующие значения констант интегрирования:

$$C_1 = \frac{\alpha}{n_1 R^{n_1-1}}, \quad C_2 = 0.$$

Полученному реперу соответствует метрика

$$ds^2 = \left(\frac{r}{R}\right)^{2(n_1-1)} \left(dr^2 + \frac{\alpha^2 r^2}{n_1^2} d\varphi^2\right), \quad (26)$$

где

$$n_1 = \frac{-\theta\sigma + \sqrt{\theta^2\sigma^2 + 4(1+\theta)(1-\sigma)^2}}{2(1-\sigma)}.$$

Это и есть решение поставленной задачи.

В линейном приближении по θ

$$n_1 \approx 1 + \theta \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}$$

и метрика (26), как нетрудно проверить, действительно совпадает с метрикой (9), полученной в рамках теории упругости. Однако вне рамок теории возмущений мы видим существенные различия. Метрика (9) сингулярна в начале координат, в то время как метрика (26), полученная вне рамок теории возмущений, регулярна.

Задача восстановления поля смещений по заданной метрике сводится к решению дифференциальных уравнений (2), где в правую часть необходимо подставить метрику (26), с граничными условиями (5). На этой задаче мы останавливаться не будем.

5. СРАВНЕНИЕ С КАЛИБРОВОЧНЫМ ПОДХОДОМ

Сравним геометрическую теорию дефектов с калибровочной теорией дислокаций и дисклинаций, рассмотренной в работах [10]. В калибровочном подходе репер имеет вид

$$e_m^i = \partial_m y^i + y^j \omega_{mj}^i + \phi_m^i, \quad (27)$$

где $y^i(x)$ – сечение главного расслоения со структурной группой трехмерных трансляций $T(3)$ и $\phi_m^i(x)$ – калибровочное поле для подгруппы трансляций. Данное построение аналогично калибровочной теории для группы Пуанкаре, рассмотренной, напри-

мер, в статье [11]. При локальных вращениях $S_j^i(x) \in \mathbb{SO}(3)$ и сдвигах $a^i(x) \in \mathbb{T}(3)$ поля преобразуются по следующим правилам:

$$\begin{aligned} y'^i &= y^j S_j^i + a^i, \\ \omega'_{mj}{}^i &= S_j^{-1k} \omega_{mk}{}^l S_l^i - S_j^{-1k} \partial_m S_k^i, \\ \phi'_m{}^i &= \phi_m^j S_j^i - a^j (S_j^{-1k} \omega_{mk}{}^l S_l^i - S_j^{-1k} \partial_m S_k^i) - \partial_m a^i. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что закон преобразования репера имеет вид $e'_m{}^i = e_m^j S_j^i$. Это значит, что он инвариантен относительно трансляций.

В калибровочном подходе [10] в качестве независимых переменных рассматриваются поля $y^i(x)$ и $\phi_m^i(x)$. В геометрическом подходе [1] независимым полем является только репер (27). В пользу такого выбора говорит следующее обстоятельство. Лагранжиан, инвариантный относительно локальных трансляций, может зависеть от полей y^i и ϕ_m^i только в инвариантной комбинации (27). Это следует из того, что полупростое произведение группы вращений $\mathbb{SO}(3)$ на группу трансляций $\mathbb{T}(3)$ не является полупрямым и не имеет двусторонне-инвариантной невырожденной метрики. Поскольку параметр локальных трансляций всегда можно выбрать таким, что $y^i(x) = 0$, то в этой калибровке репер совпадает с калибровочным полем для трансляций $e_m^i = \phi_m^i$. В результате мы приходим к геометрии Римана–Картана, которая и является отправным пунктом геометрического подхода [1]. Результирующая модель инвариантна относительно общих преобразований координат и локальных вращений, а инвариантность относительно локальных трансляций в ней отсутствует.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы описали клиновую дислокацию двумя способами: в рамках классической теории упругости и в рамках геометрического подхода. Впервые показано, что геометрическая теория дефектов в линейном приближении количественно воспроизводит все результаты, полученные в теории упругости. Это обстоятельство заслуживает внимания, так как при решении задачи было найдено точное решение нелинейных уравнений Эйнштейна со сложными калибровочными условиями. Уравнения геометрической теории дефектов сложны, но в то же время предоставляют широкие возможности для решения тех проблем, которые кажутся непреодолимыми в рамках теории упругости.

Остановимся на достоинствах геометрического подхода, которые были продемонстрированы в настоящей статье. С физической точки зрения клиновая дислокация обладает вращательной симметрией, так как свойства среды не изменяются от того, в каком именно месте вырезается или вставляется клин. Соответствующее поле смещений – основная независимая переменная теории упругости – вращательной симметрией не обладает и имеет разрыв на поверхности склейки. При этом с физической точки зрения поверхность склейки ничем не выделена, и существенно лишь ядро дислокации. В геометрической теории дефектов независимой переменной является репер или соответствующая ему метрика. Как решение уравнений Эйнштейна репер для клиновой дислокации обладает вращательной симметрией и регулярен всюду, кроме оси, где

метрика имеет коническую сингулярность. Поэтому геометрические переменные представляются естественными. С математической точки зрения при наличии нескольких дислокаций граничные условия на поле смещений становятся настолько сложными, что решение уравнений теории упругости представляется невозможным. В геометрической теории дефектов наличие нескольких дислокаций приводит только к изменению правой части уравнений Эйнштейна. При этом задача без труда обобщается на важный случай непрерывного распределения дефектов, которому соответствует гладкая правая часть уравнений. Для непрерывного распределения дефектов поля смещений не существует, а поле репера определить можно, и это важно.

Обратим внимание на калибровочные условия (18), (21) и (22). Если их записать через вектор смещения, то получим уравнения нелинейной теории упругости [7]. С этой точки зрения геометрическая теория дефектов дает решение задачи нелинейной теории упругости. При этом метрика (26) является регулярным точным решением задачи во всем пространстве за исключением ядра дислокации, где она имеет коническую сингулярность. Для сравнения отметим, что метрику, полученную в рамках линейной теории упругости (13), можно использовать только при малых углах дефицита и вблизи края дислокации.

На первый взгляд кажется удивительным, что репер, удовлетворяющий уравнениям Эйнштейна, можно выразить через поле смещений, которое будет удовлетворять уравнениям теории упругости. Математическая причина этого проста. Любое решение уравнений Эйнштейна определено с точностью до диффеоморфизма. Поскольку векторное поле смещений параметризует диффеоморфизмы, то мы вправе потребовать от него выполнения уравнений теории упругости.

В настоящей статье показано, что теорию упругости можно вложить в геометрическую теорию дефектов путем наложения на репер калибровочного условия, которое воспроизводит уравнения теории упругости для вектора смещения. Поскольку калибровочное условие явно зависит от экспериментально наблюдаемой величины (коэффициента Пуассона), то это означает отказ от принципа относительности. Другими словами, существует выделенная система отсчета. Если геометрическую теорию дефектов обратить и рассматривать теорию гравитации как теорию упругого эфира с дефектами, то возникает область для спекуляций. Например, появляется задача об измерении коэффициента Пуассона эфира. Ответы на такие вопросы могут дать только дальнейшие исследования.

Несмотря на несомненные достоинства геометрического подхода, многие проблемы остаются открытыми. В частности, существует много калибровочных условий, сводящихся в линейном приближении к уравнениям теории упругости, и неясно, какое из них выбрать. Предстоит также исследовать, каким образом решать уравнения Эйнштейна непосредственно в упругой калибровке. Эти и другие вопросы выходят за рамки настоящей статьи.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность И. В. Воловичу за обсуждение статьи. Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 96-15-96131 и 02-01-01084.

Список литературы

- [1] *M. O. Katanaev, I. V. Volovich.* Ann. Phys. 1992. V. 216. № 1. P. 1–28.
- [2] *F. Moraes.* Phys. Lett. A. 1996. V. 214. № 3,4. P. 189–192; *A. de Padua, F. Parisio-Filho, F. Moraes.* Phys. Lett. A. 1998. V. 238. P. 153–158.
- [3] *M. O. Katanaev, I. V. Volovich.* Ann. Phys. 1999. V. 271. P. 203–232.
- [4] *G. Clement.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 5807–5819.
- [5] *S. Azevedo, C. Furtado, F. Moraes.* Phys. Stat. Sol. B. 1998. V. 207. P. 387–392; *A. P. Balachandran, V. John, A. Momen, F. Moraes.* Int. J. Mod. Phys. A. 1998. V. 13. № 5. P. 841–861; *R. Bausch, R. Schmitz, L. A. Turski.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. № 11. P. 2257–2260; *S. Azevedo, F. Moraes.* Phys. Lett. A. 1998. V. 246. P. 374–376; *A. De S. Barbosa, E. R. Bezerra De Mello, V. B. Bezerra.* Int. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. № 22. P. 3565–3580; *C. Furtado, F. Moraes.* Europhys. Lett. 1999. V. 45. № 3. P. 279–282; *S. Azevedo, J. Pereira.* Phys. Lett. A. 2000. V. 275. P. 463–466; *M. Lazar.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 1983–2004.
- [6] *K. Kondo.* On the geometrical and physical foundations of the theory of yielding. In: Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Applied Mechanics. Tokyo: Sci. Council of Japan, 1953. P. 41–47; *B. A. Bilby, R. Bullough, E. Smith.* Proc. Roy. Soc. London A. 1955. V. 231. P. 263–273.
- [7] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория упругости. М.: Наука, 1987.
- [8] *А. М. Косевич.* Физическая механика реальных кристаллов. Киев: Наукова думка, 1981.
- [9] *A. Staruszkiewicz.* Acta Phys. Polon. 1963. V. 24. № 6(12). P. 735–740; *G. Clement.* Nucl. Phys. B. 1976. V. 114. P. 437–448.
- [10] *А. Кадич, Д. Эделен.* Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М.: Мир, 1987; *C. Malyshev.* Ann. Phys. 2000. V. 286. P. 249–277.
- [11] *М. О. Катанаев.* ТМФ. 1983. Т. 54. № 3. С. 381–387.

Поступила в редакцию 20.V.2002 г.,
после доработки 2.IX.2002 г.