Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Л. Гандариас, С. Саез, Решения вида бегущей волны для уравнения Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса в размерности $(2 + 1)$, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 44–55

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1830>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:10:23

© 2005 г.

М. Л. Гандариас*, С. Саез*

РЕШЕНИЯ ВИДА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КАЛОДЖЕРО–ДЕГАСПЕРИСА–ФОКАСА В РАЗМЕРНОСТИ $(2 + 1)$

Наиболее интересными решениями $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого уравнения Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса (КДФ) являются солитонные решения. Ранее авторами была получена полная групповая классификация для уравнения КДФ в размерности $(2 + 1)$. В настоящей работе, используя классические симметрии Ли, авторы рассматривают редукции, приводящие к решениям вида бегущей волны с переменными скоростями, зависящими от вида некоторой произвольной функции. Соответствующие решения данного $(2 + 1)$ -мерного уравнения включают до трех произвольных гладких функций, вследствие чего они демонстрируют весьма разнообразное качественное поведение. Действительно, адекватный выбор этих произвольных функций позволяет обнаружить решения вида уединенных волн и связанных состояний.

Ключевые слова: симметрии Ли, дифференциальные уравнения в частных производных, уединенные волны.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается следующее $(2 + 1)$ -мерное интегрируемое обобщение уравнения Калоджеро–Дегаспериса–Фокаса (КДФ):

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{4}u_{xxz} - \frac{1}{2}\frac{u_x u_{xz}}{u} - \frac{1}{4}\frac{u_{xx} u_z}{u} + \frac{1}{2}\frac{u_x^2 u_z}{u^2} - \\ - \frac{1}{8}u_x \partial_x^{-1} \left(\frac{u_x^2}{u^2} \right)_z + \frac{1}{4}a^2 u^2 u_z + \frac{1}{8}a^2 u_x \partial_x^{-1} (u^2)_z + \\ + \frac{1}{2}abu_z + \frac{1}{4}abu_x + \frac{1}{4}b^2 \frac{u_z}{u^2} + \frac{1}{8}b^2 u_x \partial_x^{-1} \left(\frac{1}{u^2} \right)_z = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\partial_x^{-1} u = \int u \, dx$. Это уравнение было получено Тодой и Ю в работе [1].

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Cádiz, P.O.BOX 40, 11510, Puerto Real, Cádiz, Spain. E-mail: marialuz.gandarias@uca.es

Широкий класс дифференциальных уравнений с интересными свойствами допускает интегрирование с помощью метода обратной задачи. Одним из таких уравнений является уравнение КДФ в размерности $(1 + 1)$. Уравнение КДФ – это $(1 + 1)$ -мерное нелинейное уравнение вида

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} - \frac{3}{4}\frac{u_x u_{xx}}{u} + \frac{3}{8}\frac{u_x^3}{u^2} + \frac{3}{8}\frac{u_x}{u^2}(au^2 + b)^2 = 0, \quad (2)$$

где a и b – произвольные константы. Уравнение (2) было введено Калоджеро и Дегасперисом [2] при изучении уравнений, разрешимых с помощью матричного варианта метода обратной задачи, и независимо Фокасом [3] при изучении уравнений типа уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), обладающих определенными симметриями Ли–Беклунда. Точные многосолитонные решения уравнения (2), записанного в билинейной форме, были получены (при $a > 0$) в работе [4]. Уравнение КДФ исследовалось также и другими авторами [5], [6]. Чисто бинормальное движение нерастяжимой кривой постоянной кривизны порождает обобщенное уравнение Дима [7]. Это уравнение легко может быть получено на основе взаимосвязи с уравнением КДФ. Кроме того, хорошо известно, что уравнение КДФ сводится к уравнению Калоджеро–КдФ [8] при $a = 0$ и $b = \pm 1$, к уравнению Чена [9] при $a = -b = 1$ после преобразования $u = \exp(kw)$, $w \rightarrow \pm iw$ и к уравнению Шварца–КдФ при $a = b = 0$ после перехода от функции u к ее потенциалу: $u = \phi_x$.

Изучение многомерных систем является одной из основных тем в теории интегрируемых систем. В контексте $(2 + 1)$ -мерных уравнений, т.е. уравнений с двумя пространственными переменными и одной временной переменной, Тода и Ю [10] построили несколько моделей, которые являются интегрируемыми. Упомянутые уравнения недавно были выведены с помощью предложенного Калоджеро метода, суть которого заключается в изменении одного из операторов пары Лакса в размерности $(1 + 1)$. Таким способом из уравнения КДФ было получено уравнение (1). Хотя это уравнение возникает в нелокальном виде, оно может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} & 8\frac{u_{tx}}{u_x} - 8\frac{u_t u_{xx}}{u_x^2} + 2\frac{u_{xxx} u_z}{u_x} - 2\frac{u_{xx} u_{xxz}}{u_x^2} - 4\frac{u_{xxz}}{u} + \\ & + 4\frac{u_x u_{xz}}{u^2} - 2\frac{u_z u_{xxx}}{uu_x} - 2\frac{u_{xx} u_{xz}}{uu_x} + 2\frac{u_z u_{xx}^2}{uu_x^2} + 6\frac{u_z u_{xx}}{u^2} + \\ & + 2\frac{u_x u_{xz}}{u^2} - 6\frac{u_z u_x^2}{u^3} + 6uu_z a^2 + 2a^2\frac{u^2 u_{xz}}{u_x} - 2a^2\frac{u^2 u_z u_{xx}}{u_x^2} + \\ & + 4ab\frac{u_{xz}}{u_x} - 4ab\frac{u_z u_{xx}}{u_x^2} + 2b^2\frac{u_{xz}}{u^2 u_x} - 2b^2\frac{u_z u_{xx}}{u^2 u_x^2} - 6b^2\frac{u_z}{u^3} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Хотя для исследования свойств интегрируемых $(2 + 1)$ -мерных уравнений существуют различные средства, мы отдаем предпочтение анализу симметрий Ли. Свойства инвариантности некоторых физически важных нелинейных эволюционных уравнений, таких как уравнение Кадомцева–Петвиашвили и уравнение Дэви–Стюартсона, уже были исследованы посредством анализа симметрий Ли [11], [12]. В большинстве случаев соответствующая алгебра Ли содержит подалгебру типа Каца–Мути–Вирасоро, однако

некоторые интегрируемые $(2 + 1)$ -мерные уравнения не допускают такой подалгебры. Примерами подобных уравнений являются введенное Богоявленским уравнение, обладающее опрокидывающимся солитонным решением, $(2 + 1)$ -мерное обобщение нелинейного уравнения Шредингера [13] и уравнение Шварца–КдФ [14].

Классическим методом нахождения редукций симметрии для дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) является метод групп Ли инфинитезимальных преобразований. Используя этот метод, мы обнаруживаем ранее неизвестные свойства инвариантности и подобия, которые сводят уравнение (3) к $(1 + 1)$ -мерным ДУЧП.

В этой работе строятся редукции, приводящие к решениям вида бегущей волны с переменной скоростью, зависящим от вида некоторой произвольной функции. Сначала мы получаем точечную группу преобразований, которая оставляет уравнение (3) инвариантным. Мы рассматриваем редукции, выводимые из групп трансляций и бесконечномерных групп. Интересная особенность нашего исследования заключается в том, что данное интегрируемое $(2 + 1)$ -мерное уравнение допускает бесконечномерные точечные группы Ли симметрий, но не допускает подалгебр типа Вирасоро.

Инвариантное исследование полученных в результате редукции $(1 + 1)$ -мерных уравнений и дальнейшие редукции приводят к интегрируемым обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) второго порядка. Решения всех этих ОДУ выражаются через известные функции, некоторые из них могут быть выражены через трансценденты Пенлеве II и III. Мы строим также точные решения $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого обобщения уравнения КдФ. Некоторые из этих решений являются солитонными решениями, которые локализованы на кривой и экспоненциально затухают по мере удаления от этой кривой.

2. СИММЕТРИИ ЛИ

Чтобы применить классический метод к $(2 + 1)$ -мерному ДУЧП (3), рассмотрим однопараметрическую группу Ли инфинитезимальных преобразований в пространстве (x, t, z, u) . Ассоциированная алгебра Ли инфинитезимальных симметрий есть множество векторных полей вида

$$\mathbf{v} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \zeta \frac{\partial}{\partial z} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}. \quad (4)$$

Потребуем теперь, чтобы это преобразование оставляло множество решений уравнения (3) инвариантным. Данное требование приводит к переопределенной системе линейных уравнений для инфинитезимальных элементов $\xi(x, z, t, u)$, $\zeta(x, z, t, u)$, $\tau(x, z, t, u)$ и $\eta(x, z, t, u)$. После того как инфинитезимальные элементы определены, переменные симметрии находятся путем разрешения условия инвариантности поверхности

$$\Phi_1 \equiv \xi \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u}{\partial z} + \tau \frac{\partial u}{\partial t} - \eta = 0. \quad (5)$$

Применяем классический метод к ДУЧП (3); соответствующая алгебра симметрий Ли зависит от констант a и b . Различаются следующие случаи:

1) при $a \neq 0$, $b \neq 0$ получаем генераторы

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{v}_3 = t \frac{\partial}{\partial t} + z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{v}_f = f(t) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (6)$$

где $f(t)$ – произвольная функция переменной t ;

2) при $a \neq 0$, $b = 0$ получаем генераторы (6) и

$$\mathbf{v}_4^1 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2z \frac{\partial}{\partial z} - u \frac{\partial}{\partial u};$$

3) при $a = 0$, $b \neq 0$ получаем генераторы (6) и

$$\mathbf{v}_4^2 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2z \frac{\partial}{\partial z} + u \frac{\partial}{\partial u};$$

4) при $a = 0$, $b = 0$ получаем генераторы (6) и

$$\mathbf{v}_4^3 = x \frac{\partial}{\partial x} - 2z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathbf{v}_k = k(z)u \frac{\partial}{\partial u},$$

где $k(z)$ – произвольная функция переменной z .

Заметим, что уравнение (3) не допускает подалгебры типа Вирасоро. В предыдущей работе мы выписали переменные подобия и решения подобия, а также системы ДУЧП, которые получаются при редукции $(2+1)$ -мерного уравнения (3) посредством генераторов, полученных в результате добавления бесконечномерных генераторов к генераторам оптимальной системы.

Цель настоящей работы состоит в использовании теории симметричных редукций для нахождения решений вида бегущей волны $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ. Для того чтобы получить такие решения, мы рассматриваем следующие редукции, связанные с трансляциями и бесконечномерным векторным полем, т.е. с генераторами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_f$ и $\mathbf{v}_k$.

РЕДУКЦИЯ 1. Используя генератор $\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_f$, получаем переменные подобия и решение подобия

$$z_1 = x - \int f(t) dt, \quad z_2 = z - \lambda t, \quad u = h(z_1, z_2) \quad (7)$$

и ДУЧП E_1

$$\begin{aligned} & 8h^3 h_{z_1 z_1} h_{z_2} \lambda - 8h^3 h_{z_1} h_{z_1 z_2} \lambda - 2h^2 h_{z_1} h_{z_1 z_1 z_1} h_{z_2} + 2h^2 h_{z_1 z_1}^2 h_{z_2} + \\ & + 6h h_{z_1}^2 h_{z_1 z_1} h_{z_2} - 2a^2 h^5 h_{z_1 z_1} h_{z_2} - 4ab h^3 h_{z_1 z_1} h_{z_2} - 2b^2 h h_{z_1 z_1} h_{z_2} - \\ & - 6h_{z_1}^4 h_{z_2} + 6a^2 h^4 h_{z_1}^2 h_{z_2} - 6b^2 h_{z_1}^2 h_{z_2} + 2h^3 h_{z_1} h_{z_1 z_1 z_1 z_2} - \\ & - 2h^3 h_{z_1 z_1} h_{z_1 z_1 z_2} - 4h^2 h_{z_1}^2 h_{z_1 z_1 z_2} - 2h^2 h_{z_1} h_{z_1 z_1} h_{z_1 z_2} + 6h h_{z_1}^3 h_{z_1 z_2} + \\ & + 2a^2 h^5 h_{z_1} h_{z_1 z_2} + 4ab h^3 h_{z_1} h_{z_1 z_2} + 2b^2 h_{z_1} h_{z_1 z_2} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

При $a = 0$ и $b = 0$ получаем генератор $\mathbf{v}_1 + \lambda \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_k$ и решение подобия

$$z_1 = x - \int f(t) dt, \quad z_2 = z - \lambda t, \quad u = h(z_1, z_2) \exp \left\{ \frac{1}{\lambda} \int k(z) dz \right\}. \quad (9)$$

РЕДУКЦИЯ 2. Используя генератор $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_f$, получаем переменные подобия и решение подобия

$$z_1 = x - zf(t), \quad z_2 = t, \quad u = h(z_1, z_2) \quad (10)$$

и ДУЧП $\mathbf{E}_2$

$$\begin{aligned} & -8h^3 h_{z_1 z_1} h_{z_2} - 2f(z_2) h^3 h_{z_1} h_{z_1 z_1 z_1 z_1} + 2f(z_2) h^3 h_{z_1 z_1} h_{z_1 z_1 z_1} + \\ & + 6f(z_2) h^2 h_{z_1}^2 h_{z_1 z_1 z_1} - 12f(z_2) h h_{z_1}^3 h_{z_1 z_1} + 8h^3 h_{z_1} h_{z_1 z_2} + \\ & + 6f(z_2) h_{z_1}^5 - 6a^2 f(z_2) h^4 h_{z_1}^3 + 6b^2 f(z_2) h_{z_1}^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

При $a = 0$ и $b = 0$ получаем генератор $\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_f + \mathbf{v}_k$ и решение подобия

$$z_1 = x - zf(t), \quad z_2 = t, \quad u = h(z_1, z_2) \exp \left\{ \int k(z) dz \right\} \quad (12)$$

и ДУЧП (11) с $a = 0$ и $b = 0$.

3. СИММЕТРИЙНЫЕ РЕДУКЦИИ К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Редуцированные $(1 + 1)$ -мерные ДУЧП допускают симметрии, которые делают возможным их дальнейшую редукцию к ОДУ. Мы снова используем технику теории групп Ли.

Уравнение $\mathbf{E}_1$ допускает следующие симметрии:

$$\mathbf{v}_{11} = \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \mathbf{v}_\alpha = \alpha(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad (13)$$

где $\alpha(z_2)$ – произвольная функция переменной z_2 . Используя генератор $\mathbf{v}_{11} + \mathbf{v}_\alpha$, получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 - \int \frac{1}{\alpha(z_2)} dz_2, \quad h = g(w) \quad (14)$$

и автономное ОДУ

$$\begin{aligned} & -g^3 g' g'''' + g^3 g'' g''' + 3g^2 (g')^2 g''' - 6g (g')^3 g'' + \\ & + 3(g')^5 - 3a^2 g^4 (g')^3 + 3b^2 (g')^3 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Разделив на $g^2 (g')^2$, проинтегрировав один раз по w и умножив затем на $g^3 (g')^2$, можно свести уравнение (15) к следующему автономному ОДУ второго порядка:

$$g'' = \frac{3}{2} \frac{(g')^2}{g} - \frac{a^2}{2} g^3 + \frac{3b^2}{2} \frac{1}{g} + k_1 g + k_2. \quad (16)$$

Умножая на $g^{-3} g'$ и интегрируя один раз по w , получаем

$$(g')^2 = -a^2 g^4 + 2k_1 g^2 + k_2 g + b^2 + 2k_3 g^3. \quad (17)$$

Интегрирование может быть доведено до конца с использованием эллиптических функций.

Уравнение $\mathbf{E}_1$ при $b = 0$ и $\lambda \neq 0$ допускает симметрии (13), а при $\lambda = 0$, кроме того, следующий генератор:

$$\mathbf{v}_{12} = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - h \frac{\partial}{\partial h}. \quad (18)$$

Используя генератор $\mathbf{v}_{11} + \mathbf{v}_\alpha$, получаем переменную подобия и решения подобия (14) и ОДУ (15) с $b = 0$.

Используя генератор $\mathbf{v}_{12} + \mathbf{v}_\alpha$, получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 \exp \left\{ - \int \frac{1}{\alpha(z_2)} dz_2 \right\}, \quad h = g(w) \exp \left\{ - \int \frac{1}{\alpha(z_2)} dz_2 \right\} \quad (19)$$

и ОДУ

$$\begin{aligned} & -g^3 g' g'''' w + g^3 g'' g''' w + 3g^2 (g')^2 g''' w - 6g (g')^3 g'' w + \\ & + 3(g')^5 w - 3a^2 g^4 (g')^3 w - 3g^3 g' g''' + 2g^3 (g'')^2 + \\ & + 5g^2 (g')^2 g'' + a^2 g^6 g'' - 3g (g')^4 - 5a^2 g^5 (g')^2 = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Разделив уравнение (20) на $g^2 (g')^2$, проинтегрировав один раз по w , умножив затем на $g^{-3} (g')$ и снова проинтегрировав по w , приходим к уравнению Пенлеве III

$$g'' = \frac{(g')^2}{g} - \frac{g'}{w} - a^2 g^3 + \frac{k_1}{2w} - \frac{k_2 g^2}{w}. \quad (21)$$

Уравнение $\mathbf{E}_2$ допускает следующие симметрии:

$$\mathbf{v}_\zeta = \zeta(z_2) \frac{\partial}{\partial z_1}, \quad \mathbf{v}_\beta = \frac{1}{f(z_2)} \frac{\partial}{\partial z_2}, \quad f(z_2) \neq 0, \quad (22)$$

где $\zeta(z_2)$ и $f(z_2)$ — произвольные функции переменной z_2 . Используя генератор $\mathbf{v}_\zeta + \mathbf{v}_\beta$, получаем переменную подобия и решения подобия

$$w = z_1 - \int \zeta(z_2) f(z_2) dz_2, \quad h = g(w) \quad (23)$$

и ОДУ (15), которое может быть проинтегрировано в эллиптических функциях.

Уравнение $\mathbf{E}_2$ при $b = 0$ допускает симметрии (23) и

$$\mathbf{v}_\gamma = z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{3}{f(z_2)} \int f(z_2) dz_2 \frac{\partial}{\partial z_2} - h \frac{\partial}{\partial h}, \quad f(z_2) \neq 0. \quad (24)$$

Используя генератор $\mathbf{v}_\zeta + \mathbf{v}_\beta + \mathbf{v}_\gamma$, получаем переменную подобия и решения подобия

$$\begin{aligned} w &= z_1 \left(1 + 3 \int f(z_2) dz_2 \right)^{1/3} - \int \frac{f(z_2) \alpha(z_2) dz_2}{\left(1 + 3 \int f(z_2) dz_2 \right)^{4/3}}, \\ h &= g(w) \left(1 + 3 \int f(z_2) dz_2 \right)^{-1/3} \end{aligned} \quad (25)$$

и ОДУ

$$-g^3 g' g'''' + g^3 g'' g''' + 3g^2 (g')^2 g''' - 6g(g')^3 g'' + 4g^4 g'' + 3(g')^5 - 3a^2 g^4 (g')^3 - 8g^3 (g')^2 = 0. \quad (26)$$

Разделив уравнение (26) на $g^3 (g')^2$, проинтегрировав один раз по w , умножив на g' и снова проинтегрировав по w , приходим к следующему ОДУ второго порядка:

$$g'' = \frac{3}{2} \frac{(g')^2}{g} - \frac{a^2}{2} g^3 + k_2 g - 4wg + k_1. \quad (27)$$

Замена переменных $g = y^{-1}$ дает

$$y'' = \frac{1}{2} \frac{(y')^2}{y} - \frac{a^2}{2y} + k_2 y^2 + 4wy + k_1 y. \quad (28)$$

Сделав замену переменных $y = \alpha V(Z)$ с $Z = \beta w$, приходим к уравнению

$$V'' = \frac{1}{2} \frac{(V')^2}{V} + 4cV^2 - ZV - \frac{1}{2} \frac{1}{V}, \quad (29)$$

решения которого могут быть выписаны на основе уравнения Пенлеве II (см. [15]).

4. НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ ВИДА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Далее мы представим некоторые явные решения ОДУ второго порядка, а также соответствующие решения $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ вида бегущей волны. Уравнение (17) допускает интегрирование в терминах эллиптических функций. Полагая в (17) $b = 0$ и $k_2 = -4$, получаем точное решение в терминах функции Вейерштрасса $\mathcal{P}$. Ясно, что любые рациональные, гиперболические и тригонометрические вырождения функции $\mathcal{P}$ также дают решения. В частности, полагая $k_1 = -2c_2^2$, $k_2 = 0$, $k_3 = (2c_1 c_2 - a) \times (2c_1 c_2 + a)/c_1$, получаем в результате уединенные волны:

$$g = \frac{1}{c_1 - \left(c_1 + \frac{a^2}{4c_1 c_2^2}\right) \text{ch}^2(c_2 w)}.$$

Рассматривая соответствующие редукции симметрии (7) и (14), мы получаем, что “искривленное” солитонное решение $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ может быть записано в виде

$$u = \frac{1}{c_1 - \left(c_1 + \frac{a^2}{4c_1 c_2^2}\right) \text{ch}^2(c_2 x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t))}, \quad (30)$$

где

$$\varphi(t) = c_2 \int f(t) dt, \quad \delta(z_2) = c_2 \int \frac{dz_2}{\alpha(z_2)}, \quad z_2 = z - \lambda t. \quad (31)$$

Рис. 1. Искривленный солитон, $t = 1$.

На рис. 1 представлено решение (30) с $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $a = 4$, $\delta(z - \lambda t) = \sin(z - t)$ и $\varphi(t) = -t$ при $t = 1$.

Рассматривая соответствующие редукции симметрии (10) и (23), мы получаем, что солитонное решение $(2 + 1)$ -мерного уравнения КДФ может быть записано в виде

$$u = \frac{1}{c_1 - \left(c_1 + \frac{a^2}{4c_1c_2^2}\right) \text{ch}^2(c_2x - zf(t) - \psi(t))}, \quad (32)$$

где

$$\psi(t) = c_2 \int \delta(t) f(t) dt. \quad (33)$$

На рис. 2 представлено решение (32) с $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $a = 4$, $f(t) = t^4$ и $\psi(t) = t$ при $t = 0$ (рис. 2а) и $t = 1$ (рис. 2б); наблюдается “вращение” этого солитонного решения.

Рис. 2. Эволюция вращающегося солитона.

Полагая в (17) $a = 0$, $b = 0$, $k_1 = -2c_1$, $k_2 = 0$, $k_3 = 4c_2$, получаем решение

$$g = -\frac{c_1}{c_2 \operatorname{ch}^2 \sqrt{c_1} w}.$$

Рассматривая соответствующие редукции симметрии (7) и (14), мы получаем, что решение $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ может быть записано в виде

$$u = -\frac{c_1 \rho(z)}{c_2 \operatorname{ch}^2(\sqrt{c_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t)))}. \quad (34)$$

Рассматривая соответствующие редукции симметрии (10) и (23), мы получаем, что решение $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ может быть записано в виде

$$u = \frac{c_1 \rho(z)}{c_2 \operatorname{ch}^2(\sqrt{c_1}(x - z f(t) - \psi(t)))}, \quad (35)$$

где

$$\psi(t) = c_2 \int \delta(t) f(t) dt. \quad (36)$$

На рис. 3 представлено решение (34) с $\varphi(t) = 0$, $\delta(z - \lambda t) = z - t$ и $-c_1 \rho(z) = \operatorname{ch}^{-2}(z)$ (рис. 3а) и $-c_1 \rho(z) = \operatorname{ch}^{-2}(z) + \operatorname{ch}^{-2}(z + 4)$ (рис. 3б) при $t = 1$. Мы видим, что эти дромиионы и когерентные структуры локализованы во всех направлениях.

Рис. 3. Дромиион и когерентная структура, $t = 1$.

На рис. 4 представлено решение (35) с $f(t) = t$, $\psi(t) = t$, $-c_1 \rho(z) = \operatorname{ch}^{-2}(z)$ при $t = 1$ (рис. 4а) и $t = 2$ (рис. 4б). Мы наблюдаем, что решение локализовано во всех направлениях, “вращается” и изменяет свою форму по мере эволюции.

Полагая в уравнении (17) $a = 0$, получаем

$$\begin{aligned} g &= \frac{\sqrt{k_2^2 - 8k_1 b^2}}{4k_1} \sin(\sqrt{2k_1}(w + c) + k_2), & g &= \frac{\sqrt{k_2^2 - 8k_1 b^2}}{4k_1} \cos(\sqrt{2k_1}(w + c) - k_2), \\ g &= \frac{\sqrt{-k_2^2 + 8k_1 b^2}}{4k_1} \operatorname{sh}(\sqrt{-2k_1}(w + c) + k_2), & g &= \frac{\sqrt{k_2^2 - 8k_1 b^2}}{4k_1} \operatorname{ch}(\sqrt{-2k_1}(w + c) + k_2). \end{aligned}$$

Рис. 4. Эволюция решения (35).

Рассматривая соответствующие редукции симметрии (7) и (14), мы получаем, что некоторые точные решения $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ могут быть записаны в виде

$$u = -\frac{\sqrt{k_2^2 - 8k_1b^2}}{4k_1} \sin(\sqrt{2k_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t) + k_2)), \quad (37)$$

$$u = -\frac{\sqrt{k_2^2 - 8k_1b^2}}{4k_1} \cos(\sqrt{2k_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t) - k_2)), \quad (38)$$

$$u = -\frac{\sqrt{-k_2^2 + 8k_1b^2}}{4k_1} \operatorname{sh}(\sqrt{-2k_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t) - k_2)), \quad (39)$$

$$u = \frac{\sqrt{k_2^2 - 8k_1b^2}}{4k_1} \operatorname{ch}(\sqrt{-2k_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t) - k_2)). \quad (40)$$

Полагая в (17) $a = 1$ и $b = 0$, получаем

$$g = -\frac{2 \operatorname{tg}(\frac{\sqrt{3}}{2}w)}{\operatorname{tg}(\frac{\sqrt{3}}{2}w) + 3}.$$

Полагая в (17) $a = \sqrt{2}i/\sqrt{3}$, $k_1 = 0$, $k_2 = 8/3$ и $b = 0$, получаем

$$g = \frac{2 \operatorname{sech}^2 w - 2}{2 \operatorname{sech}^2 w + 1}.$$

Полагая в (17) $b = 0$, $k_1 = k_2 = 0$ и $\lambda = k_3/a^2$, получаем

$$g = \frac{2\lambda}{1 + a^2\lambda^2w^2}.$$

Полагая в (17) $a = 0$, $b = 0$ и $k_2 = k_3 = 0$, получаем

$$g = \rho(z)e^{\sqrt{-2k_1}w}.$$

Рассматривая соответствующие редукции симметрии (7) и (14), мы получаем, что некоторые точные решения $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ могут быть записаны в виде

$$u = -\frac{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t))\right)}{\operatorname{tg}\frac{\sqrt{3}}{2}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t)) + 3}, \quad (41)$$

$$u = \frac{2 \operatorname{sech}^2(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t)) - 2}{2 \operatorname{sech}^2(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t)) + 1}, \quad (42)$$

$$u = \frac{2\lambda}{1 + a^2\lambda^2(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t))^2}, \quad (43)$$

$$u = \rho(z) \exp\{\sqrt{-2k_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t))\}, \quad (44)$$

где

$$\varphi(t) = c_2 \int f(t) dt, \quad \delta(z_2) = c_2 \int \frac{dz_2}{\alpha(z_2)}, \quad z_2 = z - \lambda t. \quad (45)$$

На рис. 5 представлено “искривленное” солитонное решение (43) с $a = 1$, $c = 1$, $\varphi(t) = t$ и $\delta(z_2) = (z - \lambda t)^2$ (рис. 5а) и $\delta(z_2) = \operatorname{Ai}(z - \lambda t)$ (рис. 5б) при $t = 1$.

Рис. 5. Искривленные солитоны (43), $t = 1$.

Полагая в (17) $b = 0$ и $k_2 = 0$, получаем

$$g = \frac{4k_1}{\sqrt{k_4^2 - 8k_1a^2} \operatorname{ch}(\sqrt{-2k_1}(w + c) - k_4)}, \quad g = \frac{4k_1}{\sqrt{k_4^2 - 8k_1a^2} \cos(\sqrt{2k_1}(w + c) - k_4)}.$$

Рассматривая соответствующие редукции симметрии (7) и (14), мы получаем, что некоторые точные решения $(2+1)$ -мерного уравнения КДФ могут быть записаны в виде

$$u = \frac{4k_1}{\sqrt{k_4^2 - 8k_1a^2} \operatorname{ch}(\sqrt{-2k_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t) + c) - k_4)}, \quad (46)$$

$$u = \frac{4k_1}{\sqrt{k_4^2 - 8k_1a^2} \cos(\sqrt{2k_1}(x - \varphi(t) - \delta(z - \lambda t) + c) - k_4)}. \quad (47)$$

Наиболее интересными решениями являются солитонные решения; наличие некоторых произвольных функций $\rho(z)$, $\varphi(t)$, $\delta(z - \lambda t)$ делает возможным качественное многообразие поведения этих решений.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы исследовали редукции симметрии и точные решения $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого обобщения уравнения КДФ. Используя классические симметрии Ли, мы рассмотрели редукции, приводящие к решениям вида бегущей волны, для этого $(2 + 1)$ -мерного интегрируемого уравнения. Стоит отметить ту интересную особенность, что это интегрируемое уравнение в размерности $(2 + 1)$ не допускает подалгебр типа Вирасоро. Используя классический метод симметрий Ли, мы получили ДУЧП в размерности $(1 + 1)$ и системы ОДУ, а с помощью дальнейших редукций – интегрируемые ОДУ второго порядка, решения которых могут быть выражены через известные функции; некоторые решения выражаются в терминах трансцендентов Пенлеве II и III. Для уравнения КДФ в размерности $(2 + 1)$ мы получили семейства решений с весьма разнообразным качественным поведением. Это связано со свободой при выборе произвольных функций $\varphi(t)$, $\rho(z)$ и $\delta(z - \lambda t)$.

Благодарности. Авторам приятно поблагодарить проф. Р. Конта и проф. Е. Медину за их полезные советы.

Список литературы

- [1] *K. Toda, S. Yu.* Rep. Math. Phys. 2001. V. 48. P. 255.
- [2] *F. Calogero, A. Degasperis.* J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 23.
- [3] *A. S. Fokas.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 1318.
- [4] *A. Nakamura, R. Hirota.* J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 48. P. 1755.
- [5] *K. M. Tamizhmani, M. Lakshmanan.* Phys. Lett. A. 1982. V. 90. P. 159.
- [6] *P. Rosenau.* Phys. Lett. A. 1996. V. 211. P. 265.
- [7] *W. K. Schief, C. Rogers.* Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1999. V. 455. P. 3163.
- [8] *M. V. Pavlov.* Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 245.
- [9] *H. H. Chen.* Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 925.
- [10] *K. Toda, S. Yu.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 4747.
- [11] *D. David, N. Kamran, D. Levi, P. Winternitz.* J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 1225.
- [12] *D. Levi, P. Winternitz.* Phys. Lett. A. 1988. V. 129. P. 165.
- [13] *M. Senthil Velan, M. Lakshmanan.* J. Nonlin. Math. Phys. 1998. V. 5. P. 190.
- [14] *J. Ramirez, M. S. Bruzon, C. Muriel, M. L. Gandarias.* J. Phys. A. 2002. V. 36. P. 1467.
- [15] *Э. Л. Айнс.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ДНТБУ, 1939.