Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Хорвати, Л. Мартина, П. С. Штихель, Симметрии теорий поля на некоммутативной плоскости, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 64–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1832>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 13:46:58

© 2005 г. П. А. Хорвати*, Л. Мартина†, П. С. Штихель‡

СИММЕТРИИ ТЕОРИЙ ПОЛЯ НА НЕКОММУТАТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Представлены новые результаты относительно свойств симметрии и их воздействия на специальные решения, которые допускаются некоторыми теоретико-полевыми моделями на некоммутативной плоскости. В частности, ищутся галилеево-инвариантные модели. Анализ показывает, что последнее требование сильно ограничивает допустимые взаимодействия. Более того, если скалярное поле взаимодействует с калибровочным полем Черна–Саймонса, у вихреподобных решений, преобразованных посредством галилеевых бустов, появляется геометрическая фаза.

Ключевые слова: симметрии теорий поля, некоммутативная плоскость, поле Черна–Саймонса.

Некоммутативные солитоны – решения классических уравнений движения некоммутативных теорий поля с конечным действием – привлекли в последние несколько лет большое внимание, в основном в связи с динамикой струн и бран (см. [1], [2] и приведенные там ссылки). Однако исследование дробного квантового эффекта Холла (ДКЭХ) [3] при очень низкой энергии (т.е. в физике конденсированного вещества) наводит на мысль, что это явление может быть описано в терминах квазичастиц, которые связаны с состояниями сильно коррелированных электронов, находящихся на нижнем уровне Ландау. Эти квазичастицы встроены в эффективную калибровочную связь, которая имеет полностью квантово-механическую природу и связана с фазой Берри [4]. Как следствие, квазичастицы (анионы) обладают дробными статистиками. При теоретико-полевым подходе топологический первоисточник этого эффекта заложен в нединамическом векторном потенциале $\vec{A}$, который воспроизводит абелев член Черна–Саймонса в действии, минимально взаимодействующий с массивным полем ψ в теории Ландау–Гинзбурга. Исходные квазичастицы при этом возникают как вихреподобные решения, которые переносят дробный электрический заряд и единичный магнитный поток.

С другой стороны, в пределе исчезающей массы ($m_e \rightarrow 0$) классический лагранжиан системы взаимодействующих заряженных частиц (электронов) в плоскости становится лагранжианом первого порядка относительно производных по времени, что дает

---

*Lab. Math. Phys. Théor., Université de Tours, P. Grandmont, F-37 200 Tours, France. E-mail: horvathy@phys.univ-tours.fr

†Dip. Fisica and Sez. INFN, Università di Lecce, v. Arnesano, CP. 193, I-73 100 Lecce, Italy. E-mail: luigi.martina@le.infn.it

‡An der Krebskühle 21, D-33 619 Bielefeld, Germany

гамильтоновы уравнения движения для некоммутирующих переменных [5]. Аналогичные лагранжевы (а также гамильтоновы [6]) уравнения могут быть получены для средних значений координаты и импульса волновых пакетов в магнитных зонах Блоха [7]. В этом случае также возникает зависящая от квазиимпульса связь Мида–Берри (см. [8] и приведенные там ссылки). Это снова вводит геометрическую фазу в квазиклассическое описание микросистемы.

Сходные упрощенные модели частицы в плоскости были введены в работе [9] в чисто аксиоматическом механическом контексте при помощи зависящего от ускорения лагранжиана и в работе [10], где был использован обобщенный лагранжев формализм а-ля Суррё. Вне зависимости от подхода модели оказались эквивалентными. Более интересно то, что подстройка магнитного поля относительно нового параметра k , характерного для частицы, дает нам уравнения движения, которые сводятся к уравнениям Холла для заряженной частицы в электрическом и магнитном полях.

Обнаруживаются три явления: 1) размерная редукция фазового пространства; 2) некоммутативность редуцированных “конфигурационных” переменных; 3) параметр k порождает второе центральное расширение группы Галилея на плоскости. В этом можно убедиться, вычисляя скобки Пуассона генераторов буста

$$\{G_1, G_2\} = k. \quad (1)$$

Некоторое время назад было, по сути, доказано [11], что группа Галилея в размерности $2+1$ допускает двумерное центральное расширение, в отличие от обычной группы, связанной с массой частицы. Однако в течение долгого времени физический смысл этого результата оставался неясным, и он считался не более чем математическим курьезом. Таким образом, для того чтобы воспроизвести свойства квазичастиц Лафлина, естественно рассмотреть теорию поля Черна–Саймонса на некоммутативной плоскости как более подходящее описание ДКЭХ. Эта идея была подчеркнута в работе [12]. Некоммутативная плоскость представляется как C^* -алгебра ограниченных операторов, которая порождается алгеброй Гейзенберга

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = -i\varepsilon_{ij} \theta, \quad (2)$$

здесь индексы $i, j = 1, 2$; θ – характеристический скалярный параметр, играющий ту же роль, что и $\hbar$ в фазовом пространстве; $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ – антисимметричный тензор в двумерном пространстве.

Существует взаимно однозначное отображение между пространством Шварца $\mathcal{S}$ функций ψ на $\mathbb{R}^2$ и указанной C^* -алгеброй. Оно определяется формулой квантования Вейля

$$\hat{\psi} = \int \psi(\vec{x}) \hat{\Delta}(\vec{x}) d^2(\vec{x}),$$

где

$$\hat{\Delta}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{(i\vec{k} \cdot (\hat{x} - \vec{x}))} d^2\vec{k}$$

– точечный оператор квантования. Обратное преобразование дается формулой Вигнера

$$\psi(\vec{x}) = \text{Tr}(\hat{\psi} \hat{\Delta}(\vec{x})),$$

где введено трансляционно-инвариантное отображение

$$\mathrm{Tr}(\hat{\psi}) = \int \psi(\vec{x}) d^2 \vec{x}.$$

Оно удовлетворяет соотношению $\mathrm{Tr}(\hat{\Delta}(\vec{x})\hat{\Delta}(\vec{y})) = \delta(\vec{x} - \vec{y})$. Таким образом, мы приходим к новой ассоциативной неабелевой алгебре в пространстве $\mathcal{S}$ на основе $\star$ -произведения Мойяла

$$\psi \star \varphi(\vec{x}) = \mathrm{Tr}(\hat{\psi}\hat{\phi}\hat{\Delta}(\vec{x})). \quad (3)$$

Этот результат позволяет переформулировать любую теорию поля, определенную действием

$$S[\hat{\psi}_\alpha] = \int dt \mathrm{Tr}[\mathrm{L}(\hat{\psi}_\alpha, [\hat{\partial}_i, \hat{\psi}_\alpha], \dots)] = \int dt d^2 \vec{x} \mathcal{L}(\psi_\alpha, \partial_i \psi_\alpha, \dots) \quad (4)$$

для операторов в C^* , в терминах нелокальной плотности лагранжиана, включающей классические поля ψ_α , их производные и $\star$ -произведения.

Некоммутативный вариант нерелятивистской скалярной теории поля ($m = 1$, $e = 1$), взаимодействующего с калибровочным полем Черна–Саймонса, задается плотностью лагранжиана (см. [12]–[14])

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi} \star D_t \psi - \frac{1}{2} \overline{\vec{D}\psi} \star \vec{D}\psi + \kappa \left(\frac{1}{2} \epsilon_{ij} \partial_t A_i \star A_j + A_0 \star F_{12} \right) - V(\psi, \bar{\psi}). \quad (5)$$

В (5) мы ввели $\star$ -ковариантную производную и $\star$ -тензор напряженности поля

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i A_\mu \star \psi, \quad \overline{D_\mu \psi} = \partial_\mu \bar{\psi} + i \bar{\psi} \star (A_\mu), \quad (6)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i(A_\mu \star A_\nu - A_\nu \star A_\mu), \quad (7)$$

соответственно. Согласно (6) материальное поле ψ принадлежит фундаментальному представлению калибровочной группы $U(1)_*$, т.е. локальные калибровочные поля задаются выражениями $\tilde{\psi} = e^{i\lambda(\vec{x})} \star \psi$, $\tilde{A}_\mu = e^{i\lambda(\vec{x})} \star (A_\mu + i\partial_\mu) \star e^{-i\lambda(\vec{x})}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu} = e^{i\lambda(\vec{x})} \star F_{\mu\nu} \star e^{-i\lambda(\vec{x})}$. Замечательное свойство $U(1)_*$ калибровочной теории (5) заключается в квантовании константы связи [15] $\kappa = n/2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, которое соответствует квантованному коэффициенту заполнения в ДКЭХ [12], [15]. Вихреподобные решения такой модели обсуждались в работах [13], [14].

Формула (4) показывает, что лагранжиан может быть выражен как след в гильбертовом пространстве, а именно

$$\begin{aligned} \mathrm{L} = & i\pi\kappa \mathrm{Tr}[K^\dagger D_t K - K D_t K^\dagger] - 2\pi\kappa \mathrm{Tr}[A_0] + \\ & + 2\pi\theta \mathrm{Tr} \left[i\hat{\psi}^\dagger D_t \hat{\psi} - \frac{1}{2\theta} (D\hat{\psi}(D\hat{\psi})^\dagger + \overline{D\hat{\psi}}(\overline{D\hat{\psi}})^\dagger) + V(\hat{\psi}, \hat{\psi}^\dagger) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

где мы переопределили операторы калибровочного поля следующим образом:

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}_1 - i\hat{x}_2 - i\theta(\hat{A}_1 i \hat{A}_2)) = \hat{c} - i\sqrt{2\theta}\hat{A}_+, \quad (9)$$

и соответствующий сопряженный оператор $K^\dagger = \hat{c}^\dagger + i\sqrt{2\theta}\hat{A}_-$. Оператор $\hat{c} = (1/\sqrt{2\theta}) \times (\hat{x}_1 - i\hat{x}_2)$ и его сопряженный $\hat{c}^\dagger$ удовлетворяют каноническому коммутационному соотношению $[\hat{c}, \hat{c}^\dagger] = 1$; более того, в терминах комплексных переменных $(z, \bar{z})$ мы имеем

представление $[\hat{c}, \cdot] = \sqrt{2\theta}\partial_z$, $[\hat{c}^\dagger, \cdot] = -\sqrt{2\theta}\partial_{\bar{z}}$. Ковариантная производная действует следующим образом:

$$D_t \hat{\psi} = \partial_t \hat{\psi} - i\hat{A}_0 \hat{\psi}, \quad D_t \mathcal{O} = \partial_t \mathcal{O} - i[\hat{A}_0, \mathcal{O}], \quad (10)$$

$$D \hat{\psi} = \sqrt{\frac{\theta}{2}}(D_1 - iD_2) \hat{\psi} = K \hat{\psi} - \hat{\psi} \hat{c}, \quad (11)$$

$$\bar{D} \hat{\psi} = \sqrt{\frac{\theta}{2}}(D_1 + iD_2) \hat{\psi} = \hat{\psi} \hat{c}^\dagger - K^\dagger \hat{\psi}, \quad (12)$$

$$D \mathcal{O} = [K, \mathcal{O}], \quad \bar{D} \mathcal{O} = [\mathcal{O}, K^\dagger],$$

для любого векторного оператора $\mathcal{O}$.

Точные и перенормируемые на квантовом уровне решения могут быть найдены [16] для (некалибровочной) модели Ландау–Гинзбурга с самодействием четвертого порядка

$$\mathcal{L} = L_0 - V^* = \left(i\bar{\psi} \star \partial_t \psi + \bar{\psi} \star \frac{\Delta \psi}{2} \right) - \frac{\lambda}{2} \bar{\psi} \star \bar{\psi} \star \psi \star \psi. \quad (13)$$

В частности, были найдены двухчастичные связанные состояния, которые характеризуются дипольным расстоянием, пропорциональным *полному поперечному импульсу*, и параметром θ . Это указывает на нарушение галилеевой симметрии. Такое поведение аналогично поведению, обнаруженному в некоторых струнных моделях. Вопрос галилеевой инвариантности в некоммутативных теориях рассматривался в работах [17], [18]. Далее мы дадим обзор полученных в [19], [20] результатов по буст-инвариантным решениям на некоммутативной плоскости и усилим их.

Попытку осуществить систематический анализ симметрий теорий поля на некоммутативной плоскости мы начнем с наблюдения, что свободный вариант лагранжиана (13) L_0 является квазиинвариантным и приобретает дивергентные члены (возможно, пропорциональные θ) относительно “экзотического” варианта 10-мерной алгебры симметрии Шредингера. Заметим, что в силу билинейной формы лагранжиана и интегрального свойства

$$\int f \star g(\vec{x}) d^2 \vec{x} = \int f(\vec{x}) g(\vec{x}) d^2 \vec{x},$$

действие совпадает с обычным действием в коммутативной плоскости. Евклидова подгруппа реализуется внутренними автоморфизмами

$$\begin{aligned} \psi_{\text{transl}} &= \psi(\vec{x} - \vec{h}, t) = \exp \left\{ -i \frac{\vec{\varepsilon} \vec{h}}{\theta} \cdot \vec{x} \right\} \star \psi(\vec{x}, t) \star \exp \left\{ i \frac{\vec{\varepsilon} \vec{h}}{\theta} \cdot \vec{x} \right\}, \\ \psi_{\text{rot}} &= \psi(\mathcal{R}_\varphi^{-1} \vec{x}, t), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\vec{h}$ и φ – параметры трансляций $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{h}$ и вращений $\vec{x} \rightarrow \mathcal{R}_\varphi \vec{x}$, соответственно. Соотношения (14) выражают: 1) нелокальность теории, связанную с масштабом момента $\vec{\varepsilon} \vec{h}$; 2) появление пространственных трансляций как особых калибровочных преобразований. Это позволяет выразить ковариантные производные в терминах калибровочного поля в (5), используя “ковариантные поля” (9) (см. [1], [2] и ссылки там).

Обычное однопараметрическое преобразование из центрального расширения группы Галилея заменяется “экзотическим” двухпараметрическим преобразованием, инфинитезимальное и конечное выражения для которого (при $m = 1$) имеют вид

$$\delta^* \psi = (i\vec{b} \cdot \vec{x}) \star \psi - t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \psi = (i\vec{b} \cdot \vec{x}) \psi - (\theta/2) \vec{b} \times \vec{\nabla} \psi - t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \psi \quad (15)$$

и

$$\psi_b^*(\vec{x}, t) = \exp \left\{ -i \left(\frac{\vec{b}^2}{2} t \right) \right\} e^{i\vec{b} \cdot \vec{x}} \star \psi(\vec{x} - \vec{b}t, t), \quad (16)$$

соответственно, где $e^{i\vec{b} \cdot \vec{x}}$ — экспоненциальный относительно $\star$ -произведения оператор. Аналогично разрешена θ -деформированная расширенная симметрия. В инфинитезимальном виде она задается выражениями [17]

$$\begin{aligned} \delta_\eta^* \vec{x} &= \eta t \vec{x}, & \delta_\eta^* t &= \eta t^2, \\ \delta_\eta^* \psi &= -\eta \left[\left(-\frac{i}{2} x^2 + t \right) \psi + t \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \psi + t^2 \partial_t \psi \right] - \eta \left[\frac{\theta}{2} \vec{x} \times \vec{\nabla} \psi + \frac{\theta^2}{4} \partial_t \psi \right], \end{aligned} \quad (17)$$

а обычные дилатации имеют вид [21]

$$\delta_\Delta \vec{x} = \Delta \vec{x}, \quad \delta_\Delta t = 2\Delta t, \quad \delta_\Delta \psi = -\Delta [\psi + \vec{x} \cdot \vec{\nabla} \psi + 2t \partial_t \psi], \quad (18)$$

где η и $\Delta > 0$ — вещественные параметры.

По-прежнему справедлива теорема Нётер, и соответствующие сохраняющиеся величины могут приобретать новые члены

$$M = \int d^2 x |\psi|^2, \quad H_0 = \int d^2 \vec{x} \frac{1}{2} |\vec{\nabla} \psi|^2, \quad (19)$$

$$P_i = -i \int d^2 x \bar{\psi} \partial_i \psi, \quad J = -i \int d^2 \vec{x} \epsilon_{ij} x_i \bar{\psi} \partial_j \psi,$$

$$G_i = - \int d^2 \vec{x} x_i |\psi|^2 + t P_i + \frac{\theta}{2} \epsilon_{ij} P_j, \quad (20)$$

$$D = -2t H_0 + \frac{1}{2i} \int d^2 \vec{x} x_i (\bar{\psi} \partial_i \psi - (\partial_i \bar{\psi}) \psi), \quad (21)$$

$$K = t^2 H_0 + t D - \frac{1}{2} \int d^2 \vec{x} \vec{x}^2 |\psi|^2 + \frac{\theta}{2} J - \frac{\theta^2}{4} H_0.$$

Поскольку мы можем использовать обычные скобки Пуассона $\{\psi(\vec{x}, t), \bar{\psi}(\vec{x}', t')\} = -i\delta(\vec{x} - \vec{x}')$, алгебра симметрии, выраженная в терминах приведенных выше генераторов, содержит дополнительные зависящие от θ члены, как в (1). Можно установить соотношение

$$k = \theta M. \quad (22)$$

Другие модифицированные скобки суть

$$\{K, G_i\} = \theta \epsilon_{ij} G_j, \quad \{D, K\} = -2K + \theta J - \theta^2 H_0, \quad \{D, G_i\} = -G_i + \theta \epsilon_{ij} P_j. \quad (23)$$

Все остальные коммутационные соотношения между генераторами симметрии остаются такими же, как в коммутативном случае [21].

Обратившись теперь к теории со взаимодействием, можно заметить, что все самодействия могут быть записаны в терминах “киральных” плотностей $\rho_+ = \bar{\psi} \star \psi$ и $\rho_- = \psi \star \bar{\psi}$.

Далее, если используется обычная реализация группы Галилея, то инфинитезимальное преобразование плотностей имеет вид

$$\delta_b^0 \rho_{\pm} = \pm \frac{\theta}{2} \vec{b} \times \vec{\nabla} \rho_{\pm} - t \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \rho_{\pm}.$$

Аналогично при обращении к “экзотическому” бусту (16) плотности преобразуются в соответствии с формулами $\delta_b^* \rho_+ = -t \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \rho_+$, $\delta_b^* \rho_- = -t \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \rho_- - \theta \vec{b} \times \vec{\nabla} \rho_-$. Следовательно, вариация общего потенциала V становится точной по отношению к такому преобразованию, если он зависит только от плотности одного типа $\rho_{\pm}$:

$$\delta_b^* \tilde{V}_+ = -t \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_+, \quad \delta_b^* \tilde{V}_- = -t \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \tilde{V}_- - \theta \vec{b} \times \vec{\nabla} \tilde{V}_-. \quad (24)$$

Любое “чистое” выражение $V_{\pm} = V(\rho_{\pm})$ обеспечивает нам теорию, которая является галилеево-инвариантной как при обычной, так и при “ $\star$ -реализации”. Киральные потенциалы такого рода рассматривались рядом авторов [22].

Наконец, с помощью прямого вычисления можно проверить, что любой потенциал, составленный из произведений $\rho_{\pm}$, непременно разрушает конформную инвариантность. Это – следствие нелокального характера теории и может быть связано с так называемым УФ/ИК-смешиванием (см. [1], [2] и ссылки там).

Анализируя теперь свойства симметрии калибровочной модели (5) с чистым самодействием четвертой степени $V = \lambda(\psi \star \bar{\psi})^2$ [13], мы видим, что уравнения движения (в представлении Мойала и операторном виде)

$$\begin{aligned} iD_t \psi + \frac{1}{2} \vec{D}^2 \psi + \left(2\lambda - \frac{1}{2\kappa}\right) \psi \star \bar{\psi} \star \psi &= 0, \\ \kappa E_i - \varepsilon_{ijk} j_{-,k} &= 0, \\ \kappa B + \rho_- &= 0 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} iD_t \hat{\psi} + \frac{1}{\theta} D \bar{D} \hat{\psi} + \left(2\lambda - \frac{1}{2\kappa}\right) \hat{\psi} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} &= 0, \\ 2\kappa iD_t K = \{K, \hat{\psi} \hat{\psi}^\dagger\} - 2\hat{\psi} \hat{c} \hat{\psi}^\dagger, \\ [K, K^\dagger] &= 1 - \frac{\theta}{\kappa} \hat{\psi} \hat{\psi}^\dagger, \end{aligned} \quad (25)$$

где $B = \varepsilon_{ij} F_{ij}$, $E_i = F_{i0}$ и $\vec{j}_- = \frac{1}{2i} (\vec{D} \psi \star \bar{\psi} - \psi \star \overline{(\vec{D} \psi)})$, обладают явной “киральностью” в законах Холла и Гаусса, соответственно. Как обычная (16), так и δ^* (15) реализации разрушают инвариантность закона Гаусса относительно галилеева буста. Однако галилеева симметрия восстанавливается, если рассмотреть *антифундаментальное представление*

$$\delta_* \psi = \psi \star (i \vec{b} \cdot \vec{x}) - t \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \psi = (i \vec{b} \cdot \vec{x}) \psi + \frac{\theta}{2} \vec{b} \times \vec{\nabla} \psi - t \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \psi, \quad (26)$$

которое получается как правое действие группы $U(1)_*$, или, говоря проще, при замене знака θ в (15). В то же время калибровочное поле A_μ преобразуется, как обычно:

$$\delta A_i = -t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} A_i, \quad \delta A_0 = -\vec{b} \cdot \vec{A} - t\vec{b} \cdot \vec{\nabla} A_0. \quad (27)$$

Наконец, можно прямо доказать, что “чистые” киральные самодействия $V_\pm$ также являются инвариантными относительно δ_* -преобразований. Таким образом, требование галилеевой симметрии приводит к строгому отбору типа взаимодействия, что было принято во внимание в (25).

С другой стороны, произвольный потенциал разрушает конформную инвариантность.

Замечательное следствие состоит в том, что можно построить новые сохраняющиеся нётеровские заряды, ассоциированные с зарядом буста,

$$\vec{G}^r = t\vec{P} - \int \vec{x} \rho_+ d^2 \vec{x}. \quad (28)$$

Их скобки Пуассона отличаются от (1) лишь знаком при θ .

На самом деле можно определить семейство сохраняющихся величин $G_i^{(\alpha)} = G_i^r + \frac{\alpha}{2} \epsilon_{ij} P_j$, зависящее от вещественного параметра α . Это приводит к новым, зависящим от α трансформационным правилам $\delta^{(\alpha)} \psi = \vec{b} \cdot \{\psi, \vec{G}^\alpha\}$ и $\delta^{(\alpha)} A_i = \vec{b} \cdot \{A_i, \vec{G}^\alpha\}$. Скобки Пуассона для зарядов буста суть

$$\{G_i^\alpha, G_j^\alpha\} = \epsilon_{ij} (\alpha - \theta) \int |\psi|^2 d^2 x, \quad (29)$$

так что при $\alpha = 0$ мы снова получаем *-реализацию (1). При $\alpha = \theta$, напротив, мы действуем на материальное поле, как в коммутативном случае, поскольку второй центральный заряд обращается в нуль, но калибровочный потенциал изменяется необычным образом. Тем не менее в соответствии с [23] калибровочные поля в некоммутативной области ($\theta \neq 0$) должны быть связаны с полями в коммутативном случае ($\theta = 0$) некоторой дифференциальной (по θ) зависимостью, а именно

$$\frac{\partial}{\partial \theta} A_i(\theta) = -\frac{1}{4} \epsilon_{kl} (A_k \star (\partial_l A_i + F_{li}) + (\partial_l A_i + F_{li}) \star A_k). \quad (30)$$

Это равенство инвариантно относительно бустов явным образом при условии, что α не зависит от θ . С другой стороны, преобразование буста для калибровочных полей на обычной плоскости ($\theta = 0$) имеет место только при $\alpha = 0$. Наконец, генератор буста (28) – единственный допустимый генератор, поскольку он непрерывен при $\theta \rightarrow 0$. Следовательно, нетривиальный второй заряд динамически определяется формулой (29) при $\alpha = 0$.

Однако предложенные инфинитезимальные преобразования (26), (27) не являются калибровочно-ковариантными. Это обстоятельство может создать трудности при выводе корректных калибровочно-инвариантных сохраняющихся величин и инвариантных относительно конкретных подгрупп симметрии конфигураций, как хорошо известно из опыта работы с калибровочными теориями поля. Однако по аналогии с последними в работе [24] было предложено сопоставить инфинитезимальному линейному преобразованию координат $\delta_f x^\mu = -f^\mu$ некоммутативной плоскости следующее инфинитезимальное калибровочно-инвариантное преобразование на векторном поле $\hat{A}_\mu$:

$$\hat{\delta}_f \hat{A}_\mu = \frac{1}{2} \{\hat{f}^\nu, \hat{F}_{\nu\mu}\}_*,$$

где $\{\cdot, \cdot\}_*$ – антикоммутатор Мойала. Говоря конкретнее, мы изменяем выражения (26), (27) калибровочно-инвариантным образом, полагая

$$\hat{\delta}_{\vec{b}}\psi = \psi \star (i\vec{b} \cdot \vec{x}) - t\vec{b} \cdot \vec{D}\psi, \quad \hat{\delta}_{\vec{b}}A_i = -tb_j F_{ji} = t\varepsilon_{ij}b_j B, \quad \hat{\delta}_{\vec{b}}A_0 = -t\vec{b} \cdot \vec{E}. \quad (31)$$

Эти преобразования, разумеется, могут быть выражены в терминах ρ_- и $\vec{j}_-$ в соответствии с (25). Примечательно, что алгебра этих преобразований замыкается с точностью до калибровочных преобразований. А именно, замечая, что

$$\hat{\delta}_{\vec{b}}B = -t\vec{b} \cdot \vec{D}B, \quad \hat{\delta}_{\vec{b}}E_i = -t\vec{b} \cdot \vec{D}E_i - \varepsilon_{ij}b_j B, \quad (32)$$

находим

$$\begin{aligned} [\hat{\delta}_{\vec{b}}, \hat{\delta}_{\vec{b}'}]\psi &= i\vec{b} \times \vec{b}'(\theta - t^2 B)\psi, \\ [\hat{\delta}_{\vec{b}}, \hat{\delta}_{\vec{b}'}]A_i &= -t^2 \vec{b} \times \vec{b}' D_i B, \quad [\hat{\delta}_{\vec{b}}, \hat{\delta}_{\vec{b}'}]A_0 = -\vec{b} \times \vec{b}'(t^2 D_0 B + 2tB). \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, алгебра ковариантных бустов замыкается с точностью до калибровочного преобразования, порожденного генератором $-\vec{b} \times \vec{b}' t^2 B$. Более того, материальное поле приобретает не зависящий от времени фазовый множитель плюс вклад калибровочного преобразования. В силу этого интегрирование таких инфинитезимальных преобразований, вообще говоря, недопустимо.

Однако интегрируемость может быть получена в частном случае $D_\mu B = 0$. Вследствие закона Гаусса ковариантная временная производная киральной плотности ρ_- обращается в нуль. Таким образом, поскольку имеет место ковариантный вариант уравнения непрерывности, киральный ток $\vec{j}_-$ является ковариантно-соленоидальным, т.е. $\vec{D} \cdot \vec{j}_- = 0$. Наконец, принимая во внимание тождество поле – ток, мы приходим к ковариантному условию отсутствия вихрей для электрического поля $\vec{D} \times \vec{E} = 0$, которое согласуется с тождеством Бьянки для связности A_μ .

Хотя приведенные выше условия ограничивают нас специальными полевыми конфигурациями, мы тем не менее покажем, что нетривиальные решения по-прежнему существуют.

Начнем со статических решений (25) в пределе Богомольного–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ) $2\lambda\kappa = 1$ [13]. Такие решения даются формулами

$$\hat{\psi} = \sqrt{\frac{\kappa}{\theta}}|0\rangle\langle 0|, \quad K = \zeta_0|0\rangle\langle 0| + S_1\hat{c}S_1^\dagger, \quad A_0 = -\frac{1}{2\kappa}|0\rangle\langle 0|, \quad (34)$$

где

$$S_1 = \sum_{i=0}^{\infty} |i\rangle\langle i+1|,$$

$|0\rangle$ – фоковский вакуум $\hat{c}|0\rangle = 0$ и $|\zeta_0\rangle$ – когерентное состояние с центром в точке ζ_0 , т.е.

$$|\zeta_0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\zeta_0|^2} e^{\zeta_0 \hat{c}^\dagger} |0\rangle. \quad (35)$$

Закон Гаусса дает $B = -(1/\theta)|0\rangle\langle 0|$, т.е. мы имеем полевою конфигурацию класса $D_\mu B = 0$ и $\vec{E} = 0$.

Далее, зависящие от времени решения получаются посредством действия на статические решения конечным калибровочно-ковариантным бустом (со скоростью v) (34).

Действительно, подставляя статическое решение в инфинитезимальные преобразования (31) и (32), получаем

$$\hat{\psi} = \sqrt{\frac{\kappa}{\theta}} |0\rangle \langle \phi(t)|, \quad (36)$$

где

$$|\phi(t)\rangle = e^{(t-i\theta)\hat{c}^\dagger - \bar{v}(t+i\theta) + t(\bar{v}\zeta_0 - v\bar{\zeta}_0)} |\zeta_0\rangle. \quad (37)$$

Преобразуя данное выражение с помощью формулы Бейкера–Кэмпбелла–Хаусдорфа, приходим к выражению

$$|\phi(t)\rangle = e^{i\alpha(t)} |\zeta_0 + v(t-i\theta)\rangle, \quad (38)$$

которое представляет собой когерентное состояние, движущееся равномерно со скоростью v . Зависящий от времени фазовый множитель $\alpha(t)$ имеет вид

$$i\alpha(t) = -i\frac{\theta}{2}(\bar{v}\zeta_0 + v\bar{\zeta}_0) + \frac{t}{2}(\bar{v}\zeta_0 - v\bar{\zeta}_0). \quad (39)$$

Для калибровочной составляющей получаем выражение

$$K(t) = (\zeta_0 + vt)|0\rangle\langle 0| + S_1 \hat{c} S_1^\dagger, \quad (40)$$

в то время как A_0 остается не зависящим от времени. Отметим, что величина B является левоинвариантной, т.е. по-прежнему принадлежит классу $D_\mu B = 0$. Решения типа (36) были найдены в работе [19]. Из равенств (32) видно, что электрическое поле Черна–Саймонса принимает значение $E_i = -(1/\theta)\varepsilon_{ij}v_j|0\rangle\langle 0|$. Обратим внимание, что эта полевая конфигурация похожа на холловское движение. В частности, имеет место соотношение $|\vec{E}|/|\vec{B}| = v$, в то время как частица движется в направлении, перпендикулярном $\vec{E}$.

Наконец, в БПЗ-пределе $2\lambda\kappa = 1$ мы получаем простое выражение для энергии частицы, которая взаимодействует с полем Черна–Саймонса и сама с собой: $\mathcal{E} = -2\pi \times \text{Tr}[\hat{\psi}^\dagger \bar{D} D \hat{\psi}]$. Для решения (36) имеем

$$\mathcal{E} = 2\pi\kappa\theta|v|^2 = \frac{1}{2}\theta M|v|^2,$$

что подтверждает непрерывность спектра энергии вихря. Более интересно, что последнее выражение представляет собой выражение для кинетической энергии частицы, обладающей вторым центральным зарядом (22) в качестве массы и движущейся с холловской скоростью, найденной из отношения $|\vec{E}|/|\vec{B}|$.

В заключение отметим следующее. Мы рассмотрели симметрии теории поля на некоммутативной плоскости. Главный результат состоит в том, что можно получить галилеево-инвариантные теории, но при этом допустимы лишь “киральные” взаимодействия. Генераторы бустов более не коммутируют, однако они замыкаются посредством введения второго центрального параметра расширения κ , который динамически определяется массой частицы и некоммутативным параметром плоскости. Наконец, с помощью свободно движущихся когерентных состояний могут быть построены классы равномерно движущихся решений. Однако соответствующие магнитные и электрические поля Черна–Саймонса совершенно нетривиальны, даже если в результате они оказываются статическими. Можно найти более общий тип движущихся решений [20] и затем подвергнуть их преобразованию буста. В частности, можно показать, что два вихревых решения могут быть подвергнуты преобразованию буста без изменения их относительного положения. Это отличает такие решения от дипольных решений, найденных в [16].

Благодарности. Приведенные выше результаты были представлены Л. Мартиной, которая благодарит организаторов конференции, а также П. Хорвати и П. Штихеля. Работа была частично поддержана Murst (грант SINTESI 2002) и INFN (Iniz. Spec. Le41).

Список литературы

- [1] *M. R. Douglas, N. A. Nekrasov.* Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 977.
- [2] *R. J. Szabo.* Phys. Rep. 2003. V. 378. P. 203; hep-th/0109162.
- [3] *R. B. Laughlin.* Phys. Rev. Lett. 1983. V. 50. P. 1395.
- [4] *D. Arovas, J. R. Schrieffer, F. Wilczek.* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 772.
- [5] *S. M. Girvin, T. Jach.* Phys. Rev. A. 1984. V. 29. P. 5617.
- [6] *P. A. Horváthy, L. Martina, P. C. Stichel.* Enlarged Galilean symmetry of anyons and the Hall effect. hep-th/0412090.
- [7] *M.-C. Chang, Q. Niu.* Phys. Rev. B. 1996. V. 53. P. 7010.
- [8] *A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, J. Zwanziger.* The Geometric Phase in Quantum Systems (Text and Monographs in Physics). Berlin: Springer, 2003.
- [9] *J. Lukierski, P. C. Stichel, W. J. Zakrzewski.* Ann. Phys. 1997. V. 260. P. 224; 2003. V. 306. P. 78; hep-th/0207149.
- [10] *C. Duval, P. A. Horváthy.* Phys. Lett. B. 2000. V. 479. P. 284; hep-th/0002233; J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10097; hep-th/0106089; *P. A. Horváthy.* Ann. Phys. 2002. V. 299. P. 128; hep-th/0201007.
- [11] *J.-M. Lévy-Leblond.* Galilei group and Galilean invariance. In: Group Theory and Applications. V. II. Ed. E. Loeb. N.Y.: Acad. Press, 1971. P. 221; *A. Ballesteros, N. Gadella, M. del Olmo.* J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 3379; *Y. Brihaye, C. Gonsky, S. Giller, P. Kosiński.* Galilean invariance in $2 + 1$ dimensions. hep-th/9503046; *D. R. Grigore.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 240; P. 460.
- [12] *L. Susskind.* The quantum Hall fluid and non-commutative Chern-Simons theory. hep-th/0101029.
- [13] *G. S. Lozano, E. F. Moreno, F. A. Schaposnik.* JHEP. 2001. V. 02. P. 036; hep-th/0012266; *F. A. Schaposnik.* Three lectures on noncommutative field theories. hep-th/0408132.
- [14] *D. Bak, S. K. Kim, K.-S. Soh, J. H. Yee.* Phys. Rev. D. 2001. V. 64. P. 025018.
- [15] *D. Bak, K. Lee, J.-H. Park.* Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 030402.
- [16] *D. Bak, S. K. Kim, K.-S. Soh, J. H. Yee.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3087.
- [17] *P. A. Horváthy, L. Martina, P. C. Stichel.* Phys. Lett. B. 2003. V. 564. P. 149.
- [18] *P. A. Horváthy, L. Martina, P. C. Stichel.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 673. P. 301.
- [19] *P. A. Horváthy, P. C. Stichel.* Phys. Lett. B. 2004. V. 583. P. 353.
- [20] *L. Hadasz, U. Lindstrom, M. Rocek, R. von Unge.* Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P. 105020.
- [21] *R. Jackiw.* Phys. Today. 1980. V. 25. P. 23; *U. Niederer.* Helv. Phys. Acta. 1972. V. 45. P. 802; *C. R. Hagen.* Phys. Rev. D. 1972. V. 5. P. 377.
- [22] *E. Langmann, R. J. Szabo.* Phys. Lett. B. 2002. V. 533. P. 168; *E. Langmann.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 654. P. 404; *E. Langmann, R. J. Szabo, K. Zarembo.* Exact solution of noncommutative field theory in background magnetic field. hep-th/0303082.
- [23] *N. Seiberg, E. Witten.* JHEP. 1999. V. 09. P. 032.
- [24] *R. Jackiw, S.-Y. Pi.* Phys. Rev. Lett. 2002. V. 88. P. 1116031.