Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Калякин, Резонансный захват в нелинейной системе, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 74–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1833>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:55:47

© 2005 г.

Л. А. Калякин*

РЕЗОНАНСНЫЙ ЗАХВАТ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ

Исследуется система шести нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений, которая возникает при усреднении быстрых вынужденных колебаний. Построены отвечающие резонансу асимптотические решения с линейно растущими по времени амплитудами.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, асимптотика, резонанс, ВКБ-приближение.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нелинейная неавтономная система с тремя степенями свободы, записанная в переменных амплитуда–фаза:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi &= f_j \sin(\psi_j + \varphi_j), \\ \rho_j \frac{d\psi_j}{d\theta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos \psi &= f_j \cos(\psi_j + \varphi_j),\end{aligned}\tag{1}$$

где

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = \gamma_3 = -1 \quad (j = 1, 2, 3, \quad j + k + l = 6, \quad k \neq l).$$

В декартовых координатах $x_j = \rho_j \cos \psi_j$, $y_j = \rho_j \sin \psi_j$ уравнения имеют вид

$$\frac{dx_j}{d\theta} + \gamma_j (x_k y_l + y_k x_l) = f_j \sin \varphi_j, \quad \frac{dy_j}{d\theta} + \gamma_j (x_k x_l - y_k y_l) = f_j \cos \varphi_j.$$

Характерной чертой задачи является квадратичный рост на бесконечности заданных фазовых функций: $\varphi_j(\theta) = \theta^2 \alpha_j / 2 + \theta \alpha_j^1 + \alpha_j^0$, так что частоты внешней накачки $\varphi_j' = \alpha_j \theta + \alpha_j^1$ растут линейно по времени. Здесь $f_j, \alpha_j, \alpha_j^1, \alpha_j^0 = \text{const}$, и $\alpha_j \neq 0$ при $f_j \neq 0$.

Если $f_j = 0$ для всех $j = 1, 2, 3$, то система, называемая далее невозмущенной, интегрируется в эллиптических функциях, и для любого решения амплитуды $\rho_j(\theta)$ ограничены равномерно по θ . Возмущенная система ($f_j \neq 0$) не интегрируема; возможно исследование асимптотики ее решений при $\theta \rightarrow \infty$ с использованием невозмущенного

*Институт математики с ВЦ РАН, ул. Чернышевского, 112, 450077, Уфа, Россия. E-mail: klenru@mail.ru

решения в качестве главного члена. На этом пути ранее было установлено существование шестипараметрического решения с ограниченными амплитудами [1].

Ниже речь пойдет о решениях с растущими амплитудами. В частном случае при $\varphi_j(\theta) = \alpha_j^0 + \alpha_j \theta^2/2$, если исходные константы связаны соотношениями $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \equiv 3\pi/2$, $f_1^2 = \alpha_2 \alpha_3$, $f_2^2 = -\alpha_1 \alpha_3^2$, $f_3^2 = -\alpha_1 \alpha_2$, можно выписать одно точное решение такого типа: $\rho_j = \theta f_j$, $\psi_j = \pi/2 - \varphi_j$. В общем случае наличие шестипараметрического семейства решений с растущими амплитудами $\rho_j(\theta) \approx \theta$ при $\theta \rightarrow \infty$ обнаруживается в численных экспериментах. Целью данной статьи является аналитическое описание асимптотики на бесконечности для такого типа решений. Предлагаемые решения принципиально отличаются от приведенных в работе [1].

Рост амплитуд в колебательных системах обычно связывают с резонансными эффектами. Такую интерпретацию можно дать и здесь: резонанс возникает между вынуждающими колебаниями внешнего возмущения и собственными колебаниями системы. При этом необходимым условием неограниченного роста амплитуд вынужденных колебаний является изменение частоты внешней накачки¹⁾. Растущие решения в главном члене асимптотики при $\theta \rightarrow \infty$ представляют собой собственные колебания с частотами, которые меняются в соответствии с накачкой. Именно в захвате системой внешней частоты содержится главное отличие от случая ограниченных решений [1]. Самое удивительное, что такая автоподстройка собственных частот не зависит от скорости изменения внешних частот. Подобное явление автофазировки (авторезонанса) в одномерных системах хорошо исследовано [2], [3]. Для многомерных систем аналитические результаты в этом направлении будут представлены впервые.

Происхождение задачи. Интерес к системам (1) объясняется их ролью в теории нелинейных колебаний. Эти уравнения, хотя и представляются весьма специфическими, являются стандартными при описании резонансных явлений для колебательных процессов разной природы [4]. Обычно уравнения такого типа возникают при усреднении по быстрым колебаниям других, более сложных, систем [5]. Искомые функции $\rho_j(\theta)$, $\psi_j(\theta)$ представляют собой медленно меняющиеся амплитуды и сдвиги фаз быстрых гармонических колебаний. Нелинейности исходных систем индуцируют нелинейности в усредненных уравнениях посредством главных резонансов. В частности, квадратичные резонансы приводят к квадратичным по амплитудам нелинейностям, указанным в (1). Неавтономность уравнений (1) является следствием медленной деформации параметров исходных систем таких, как частоты и амплитуды внешних сил. Как раз эффект деформации частот для ситуации общего положения содержится в квадратичных слагаемых фазовых функций $\varphi_j \approx \theta^2$. Вопрос об асимптотике по “медленному” времени $\theta \rightarrow \infty$ возникает в связи с использованием уравнений (1) для описания резонансных процессов в переходных слоях, например, в слое нелинейного резонанса или на начальном этапе авторезонанса [6]. В частности, наличие растущих решений связывается с возникновением авторезонанса, одного из интереснейших явлений в нелинейных колебаниях [7].

¹⁾ Накачка с постоянной частотой не дает такого эффекта, поскольку с ростом амплитуд (и энергии) нелинейная система выходит из резонанса.

Постановка задачи об асимптотике решений на бесконечности является классической. Современное состояние общей теории освещено в книгах [8]. Однако известные результаты непосредственно к уравнениям (1) не применимы из-за осциллирующего характера решений. Используемые нами приемы состоят в модификации разных вариантов нелинейного метода ВКБ [9]. Основной результат сформулирован в теореме 5. Он состоит в том, что построение асимптотики с растущими амплитудами $\rho_j(\theta) \approx \theta$ при $\theta \rightarrow \infty$ сводится к решению автономных уравнений для системы связанных маятников.

В разделах 2 и 3 приводятся результаты, схожие с результатами работы [1], которые необходимы для понимания подхода, предлагаемого в разделе 4.

2. НЕВОЗМУЩЕННАЯ СИСТЕМА

Основой для предлагаемых ниже асимптотических конструкций служат решения автономной системы, которая получается из системы (1) при $f_j = 0$,

$$\frac{d\rho_j}{d\eta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \sin \psi = 0, \quad \rho_j \frac{d\psi_j}{d\eta} + \gamma_j \rho_k \rho_l \cos \psi = 0. \quad (2)$$

Здесь введена независимая переменная η , значения ψ, γ_j, j, k, l те же, что в (1). Такая система легко интегрируется.

ТЕОРЕМА 1. *Существует общее шестипараметрическое решение системы уравнений (2)*

$$\rho_j = \overset{0}{R}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}), \quad \psi_j = \overset{0}{\Psi}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}) + \eta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (3)$$

с шестью произвольными константами: $\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}$, $\{S_0, S_1, S_2, S_3\}$ при $S_1 + S_2 + S_3 = 0$. Вектор-функции $\overset{0}{R}_j(\eta; \mathbf{E})$, $\overset{0}{\Psi}_j(\eta; \mathbf{E})$ являются гладкими, периодическими по η с периодом $\Theta = \Theta(\mathbf{E})$ и с частотой $\Omega = 2\pi/\Theta$. В фазовых функциях ψ_j содержатся линейные по η слагаемые с коэффициентами, которые удовлетворяют соотношению $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Все остальные решения входят в четырехпараметрические семейства и не представляют для нас интереса.

Доказательство теоремы основано на наличии у системы (1) трех первых интегралов $\rho_1 \rho_2 \rho_3 \cos \psi = E_1$, $\rho_2^2 + \rho_1^2 = E_2$, $\rho_3^2 + \rho_1^2 = E_3$, значения которых используются в качестве параметров. Поскольку уравнения для четырех функций $\psi, \rho_j, j = 1, 2, 3$, можно отделить от остальных, то первые интегралы обеспечивают решение задачи в терминах эллиптических функций Якоби. Например, выражение одной из компонент через функцию синус амплитуды имеет вид

$$\overset{0}{R}_1(\eta; \mathbf{E}) = \left[\eta_1 + (\eta_3 - \eta_1) k^2 \operatorname{sn}^2(\sqrt{\eta_3 - \eta_1} \eta, k) \right]^{1/2}, \quad k^2 = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_3 - \eta_1}, \quad (4)$$

где значения $\eta_1 < \eta_2 < \eta_3$ являются корнями полинома $\eta(E_2 - \eta)(E_3 - \eta) - E_1^2$. В терминах этой эллиптической функции выписываются остальные компоненты решения ρ_j, ψ_j системы уравнений (2).

При интегрировании уравнений для ψ_j появляются непериодические слагаемые, обусловленные ненулевыми средними значениями

$$\Omega_j = -\gamma_j E_1 \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta (\overset{0}{R}_j)^{-2} d\eta \equiv -\gamma_j E_1 \langle (\overset{0}{R}_j)^{-2} \rangle. \quad (5)$$

Очевидно, что коэффициенты $\Omega_j \neq 0$ при $E_1 \neq 0$. Однако $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$, поскольку комбинационная фаза $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ является периодической функцией. По той же причине из трех констант интегрирования S_j лишь две произвольны; связь между константами определяется способом фиксации средних значений фаз $\overset{0}{\Psi}_j$. Например, можно считать, что $S_1 + S_2 + S_3 = 0$.

В декартовых переменных решение в ситуации общего положения представляется трехпериодическим функциями $x_j, y_j(\eta; \mathbf{E})$ с частотами $\Omega, \Omega_j(\mathbf{E})$. Имеются исключительные значения параметров: на плоскости $E_2 = E_3$ при $E_1 \neq 0$ решение вырождается в двухчастотное с $\Omega_2 = \Omega_3$ и $\rho_2(\eta) \equiv \rho_3(\eta)$; на плоскости $E_1 = 0$ при $E_2 \neq E_3$ решение вырождается в одночастотное с $\Omega_j = 0$. На пересечении плоскостей решение будет непериодическим. Еще одно исключительное множество в пространстве параметров выделяется условием функциональной зависимости частот:

$$\mathcal{E}_0 = \left\{ \mathbf{E} \in \mathbb{R}^3 : \det \frac{\partial(\Omega, \Omega_k, \Omega_l)}{\partial(\mathbf{E})} = 0 \quad \forall k \neq l \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Ранг матрицы, составленной из градиентов частот

$$\frac{\partial(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)}{\partial(\mathbf{E})},$$

зависит от параметров $\mathbf{E}$: вне плоскостей $E_1 = 0, E_2 = E_3$ его значение $r = r(\mathbf{E}) \geq 2$, всюду вне поверхности $\mathcal{E}_0$ ранг $r = 3$ максимален.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННАЯ СИСТЕМА

Построение асимптотик на основе решения невозмущенной системы, как обычно, приводит к линеаризованным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dR_j}{d\eta} + \gamma_j [R_k \overset{0}{R}_l \cos \overset{0}{\Psi}] \overset{0}{\Psi} + \gamma_j [R_k \overset{0}{R}_l + \overset{0}{R}_k R_l] \sin \overset{0}{\Psi} &= H_{\rho,j}(\eta), \\ \frac{d\overset{0}{\Psi}_j}{d\eta} - \gamma_j \overset{0}{\Psi} \frac{R_k \overset{0}{R}_l \sin \overset{0}{\Psi}}{\overset{0}{R}_j} + \gamma_j \cos \overset{0}{\Psi} \frac{R_k \overset{0}{R}_l + R_l \overset{0}{R}_k - R_j \overset{0}{R}_k \overset{0}{R}_l / \overset{0}{R}_j}{\overset{0}{R}_j} &= H_{\psi,j}(\eta). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\overset{0}{\Psi} = \overset{0}{\Psi}_1 + \overset{0}{\Psi}_2 + \overset{0}{\Psi}_3$ ($j = 1, 2, 3, j + k + l = 6, k \neq l$).

В рассматриваемых ниже случаях правые части будут периодическими по η функциями. Для периодичности решения требуются дополнительные условия на вектор правых частей. Такие условия сформулированы в данном разделе.

ТЕОРЕМА 2. Пусть вектор-столбец

$$\overset{0}{\mathbf{Y}}(\eta; \mathbf{E}, \mathbf{S}) = \{\overset{0}{R}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}), \quad \overset{0}{\Psi}_j(\eta + S_0; \mathbf{E}) + \theta \Omega_j(\mathbf{E}) + S_j\}^T$$

представляет собой построенное выше шестипараметрическое решение нелинейной системы (2) вне плоскостей $E_1 = 0$ и $E_2 = E_3$. Тогда для линеаризованной однородной системы (6) с нулевыми правыми частями существует фундаментальная матрица решений $\mathcal{W}$, столбцы которой имеют следующую структуру:

$$\mathbf{Y}_i(\eta), \quad i = 0, 1, 2; \quad \mathbf{Y}_i(\theta) = \widehat{\mathbf{Y}}_i(\eta) + \eta \sum_{m=0}^2 \nu_{i,m} \mathbf{Y}_m(\eta), \quad i = 3, 4, 5. \quad (7)$$

Вектор-функции $\mathbf{Y}_i(\eta)$ ($i = 0, 1, 2$) и $\widehat{\mathbf{Y}}_i(\eta)$ ($i = 3, 4, 5$) являются периодическими по η с частотой $\Omega(\mathbf{E})$. Число линейно независимых непериодических решений равно r – рангу матрицы $\partial(\Omega, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)/\partial(\mathbf{E})$, через элементы которой выражаются коэффициенты $\nu_{i,m} = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одна тройка линейно независимых решений получается при дифференцировании вектор-функции $\overset{0}{\mathbf{Y}}(\eta; \mathbf{E}, \mathbf{S})$ по переменным S_i и имеет вид $\mathbf{Y}_0 = \partial_\eta \{\overset{0}{R}_j, \overset{0}{\Psi}_j\}^T$, $\mathbf{Y}_1 = (0, 0, 0, 1, 0, -1)^T$, $\mathbf{Y}_2 = (0, 0, 0, 0, 1, -1)^T$. Другая тройка линейно независимых решений получается при дифференцировании по параметрам $\mathbf{E}$. Непериодичность слагаемых связана с зависимостью частот от параметров $\mathbf{E}$; ранг матрицы $\{\nu_{i,m}\}$ равен r . Легко понять, что построенные таким образом решения будут линейно независимыми. Вронскиан вычисляется через след матрицы линеаризованной системы и для определенной выше системы решений выражается по формуле $\det \mathcal{W} = -(\overset{0}{4R}_1 \overset{0}{R}_2 \overset{0}{R}_3)^{-1}$.

Наличие фундаментальной системы решений позволяет выписать решения соответствующих неоднородных уравнений через интегралы. Поскольку в этой процедуре используется метод вариации произвольных постоянных, то основными объектами являются определители $W_i[\mathbf{H}]$, которые получаются из вронскиана $W = \det \mathcal{W}$ заменой i -го столбца $\mathbf{Y}_i$ на столбец правых частей $\mathbf{H}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть значения параметров $\mathbf{E}$ не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ и поверхности $\mathcal{E}_0$. Если вектор-функция правых частей $\mathbf{H}(\eta)$ имеет период $\Theta(\mathbf{E})$, то линеаризованная неоднородная система (6) имеет ограниченное (периодическое) решение тогда и только тогда, когда выполняются три условия ортогональности

$$\int_0^\Theta W_i[\mathbf{H}] \overset{0}{R}_1 \overset{0}{R}_2 \overset{0}{R}_3(\eta) d\eta = 0, \quad i = 3, 4, 5. \quad (8)$$

Общее периодическое решение содержит три произвольные константы, стоящие при $\mathbf{Y}_i$, $i = 0, 1, 2$.

4. ВКБ-АСИМПТОТИКИ С ЗАХВАТОМ ВНЕШНИХ ЧАСТОТ

Исходные неавтономные уравнения (1), называемые далее возмущенными, в общем случае не интегрируются. В этом разделе найдены асимптотические при $\theta \rightarrow \infty$ осциллирующие решения с линейно растущими амплитудами. Для их построения используется полученное выше невозмущенное решение (3). В качестве независимой переменной берется функция $\eta \approx \theta^2/2$, схожая с фазами внешней накачки $\varphi_j(\theta) \approx \alpha_j \theta^2/2$ при $\theta \rightarrow \infty$. Рост амплитуд определяется множителем θ , который фигурирует в главном члене асимптотики $\rho_j \approx \theta R_j^0(\eta; \mathbf{E})$. Параметры $\mathbf{E} = (E_1^0, E_2^0, E_3^0) = \text{const}$ выбираются из резонансных условий

$$\Omega_j(\mathbf{E}) + \alpha_j = m_j \Omega(\mathbf{E}), \quad j = 1, 2, 3, \quad m_j \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

Эти соотношения являются ключевыми при выделении решений с растущими амплитудами, и с ними связан термин “резонансный захват системой внешних частот”. При разных наборах целых чисел (m_1, m_2, m_3) получаются разные корни $\mathbf{E}^0$, поэтому возможно построение растущих решений с разными главными членами. Далее рассматривается фиксированный набор (m_1, m_2, m_3) . Цель данного раздела – доказать возможность построения полного асимптотического решения в виде бесконечных рядов с выделенным выше главным членом²⁾.

Описание анзаца для асимптотического решения. Асимптотическая конструкция базируется на идеях двухмасштабных разложений в подходе Кузмака [9]. Вводится дополнительная, быстрая по сравнению с θ , переменная $\eta = S_0(\theta)/\Omega(\mathbf{E}^0)$ с фазовой функцией, определяемой из уравнения типа эйконала

$$\frac{dS_0}{d\theta} = \theta \Omega(\mathbf{E}). \quad (10)$$

В параметрах $\mathbf{E}$ допускается слабая зависимость от времени: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \theta^{-1} \mathbf{e}(\theta)$. Решение исходных уравнений (1) ищется в виде функций с выделенной зависимостью от быстрой переменной и с выделенным растущим множителем в амплитуде:

$$\rho_j(\theta) = \theta R_j(\eta, \theta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \mathbf{E}^0), \quad \psi_j(\theta) = \Psi_j(\eta, \theta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \mathbf{E}^0) + [m_j S_0 + S_j - \varphi_j(\theta)].$$

Зависимость от θ , допускаемая в параметрах $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$, $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$, находится из уравнений переноса и эйконала

$$\frac{d(\mathbf{E}^0 + \theta^{-1} \mathbf{e})}{d\theta} = \mathbf{Q}(\theta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \mathbf{E}^0), \quad \frac{dS_j}{d\theta} = \varphi_j'(\theta) + \theta[\Omega_j(\mathbf{E}^0 + \theta^{-1} \mathbf{e}) - m_j \Omega(\mathbf{E}^0 + \theta^{-1} \mathbf{e})]. \quad (11)$$

²⁾Ниже будет показано, что имеется шестипараметрическое семейство решений с фиксированным главным членом.

Правые части уравнений переноса ищутся в виде асимптотических рядов по обратным степеням в ходе дальнейших построений:

$$\mathbf{Q} = \theta^{-1} \overset{1}{\mathbf{Q}}(\mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}) + \sum_{n=2}^{\infty} \theta^{-n} \overset{n}{\mathbf{Q}}(\mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}). \quad (12)$$

Зависимость от медленной переменной θ содержится явно в асимптотическом решении в виде обратных степеней:

$$\begin{aligned} R_j &= \overset{0}{R}_j(\eta; \overset{0}{\mathbf{E}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \overset{n}{R}_j(\eta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}), \\ \Psi_j &= \overset{0}{\Psi}_j(\eta; \overset{0}{\mathbf{E}}) + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^{-n} \overset{n}{\Psi}_j(\eta; \mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}}). \end{aligned} \quad (13)$$

Целью асимптотической конструкции является вычисление коэффициентов рядов в формулах (12), (13) с последующим интегрированием уравнений (11). На этом пути удастся разделить задачи поиска зависимости от быстрой (η) и медленной (θ) переменных в асимптотическом решении (13). Зависимость от η в поправках $\overset{n}{\Psi}_j, \overset{n}{R}_j$ находится из линейаризованных уравнений (6). Три условия, гарантирующие периодичность этих функций по η , приводят к определению коэффициентов $\overset{n}{\mathbf{Q}}(\mathbf{e}, \mathbf{S}; \overset{0}{\mathbf{E}})$ через средние значения по η . При этом для фаз $\psi_j + \varphi_j$ в правых частях уравнений (1) в главном члене асимптотики используется представление $\psi_j + \varphi_j = S_j + \sigma_j(\eta)$, где $\sigma_j(\eta) = \overset{0}{\Psi}_j(\eta; \overset{0}{\mathbf{E}}) + m_j \Omega(\overset{0}{\mathbf{E}}) \eta$. По сути дела, описанная процедура представляет собой замену переменных, выполняемую в форме асимптотических рядов (13). Эта замена переводит исходные уравнения (1) в уравнения (10), (11), которые естественно назвать усредненными. Лишнее уравнение для фаз S_0, S_j исключается с помощью требования совместности главного члена с решением невозмущенных уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 [m_j S_0 + S_j - \varphi_j(\theta)] = 0. \quad (14)$$

В результате имеет место

ТЕОРЕМА 4. *При значениях параметров $\overset{0}{\mathbf{E}}$, которые не принадлежат плоскостям $E_1 = 0$, $E_2 = E_3$ и поверхности $\mathcal{E}_0$, существуют асимптотические ряды (12), (13) такие, что исходные уравнения (1) переходят в асимптотически эквивалентные уравнения (10), (11) с условием (14).*

ЗАМЕЧАНИЕ. В формулах (13) члены рядов с номерами $n \geq 1$ содержат произвольные константы при трех периодических решениях однородных уравнений (6). Однако независимо от выбора этих констант окончательные решения асимптотически совпадают, как это обычно бывает в ВКБ-приближениях [10].

Основным результатом описанной процедуры следует считать формулы для первых членов асимптотики правых частей $\mathbf{Q}$, из которых извлекается структура уравнений (11) в главном члене при $\theta \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{de_j}{d\theta} &= \beta_j^0(\mathbf{E}) - \sum_{k=1}^3 f_k [\beta_{j,k}^s(\mathbf{E}) \sin S_k + \beta_{j,k}^c(\mathbf{E}) \cos S_k], \\ \frac{dS_j}{d\theta} &= \alpha_j^1 + \nabla[\Omega_j^0(\mathbf{E}) - m_j \Omega(\mathbf{E})] \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3), \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (15)$$

Эти уравнения похожи на уравнения возмущенного маятника, которые возникают в такой же ситуации для одномерной задачи [3]. Коэффициенты выписываются через интегралы средних значений по быстрой переменной η . В этих интегралах, обозначаемых ниже угловыми скобками, участвуют эллиптические функции из невозмущенного решения с аргументом η и тригонометрические функции с аргументами $\sigma_k(\eta)$. Приведем соответствующие формулы в комплексном виде для $\beta_{j,k} = \beta_{j,k}^s + i\beta_{j,k}^c$:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2E_2\Omega_2^0(\mathbf{E}) + 2E_3\Omega_3^0(\mathbf{E}), \quad \beta_j = 2E_j^0, \quad (j = 2, 3), \\ \beta_{1,1} &= \langle [((R_1)^{-2} + (R_2)^{-2} + (R_3)^{-2})R_1^0 E_1^0 + i\partial_\eta R_1^0] \exp(i\sigma_1) \rangle, \\ \beta_{1,k} &= \langle R_k^{-1} [2E_1^0 + iR_1^0 \partial_\eta R_1^0] \exp(i\sigma_k) \rangle, \quad (k > 1), \\ \beta_{j,k} &= 2\langle R_k^0 \exp(i\sigma_k) \rangle \quad (j > 1, \quad k = 1 \vee k = j), \\ \beta_{j,k} &= 0 \quad (j > 1, \quad k > 1 \wedge k \neq j). \end{aligned}$$

В конечном счете коэффициенты усредненных уравнений (15) определяются параметрами возмущения $\{\alpha_j, f_j\}$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главное преимущество усредненных уравнений (11) состоит в их автономности в главном члене при $\theta \rightarrow \infty$ и в слабой зависимости от θ в последующих поправках. Это дает возможность эффективного исследования асимптотики их решений при $\theta \rightarrow \infty$, и следовательно, асимптотики решений исходной системы (1). Сформулируем основной результат:

ТЕОРЕМА 5. *При тех значениях исходных параметров $\{f_j, \alpha_j, \alpha_j^1, \alpha_j^0\}$, для которых предельные усредненные уравнения (15) имеют ограниченные на бесконечности решения, существуют асимптотические решения уравнений (1) с растущими амплитудами $\rho_j(\theta) \approx \theta R_j^0(\eta; \mathbf{E})$, $\theta \rightarrow \infty$.*

Попросту говоря, существование ограниченных решений уравнений (15) оправдывает выбранный анзац с растущими амплитудами. В ряде случаев система (15) редуцируется к отдельным уравнениям возмущенного маятника, которые имеют ограниченные

решения при достаточно больших амплитудах накачки f_j . В ситуации общего положения при больших f_j существует шестипараметрическое семейство таких решений.

Исследование асимптотики решений усредненных уравнений (11) и выделение ограниченных решений будет предметом следующей публикации. Здесь укажем лишь на наиболее простой класс решений с чисто степенными асимптотиками, которые строятся известными способами [8] вблизи неподвижных точек системы предельных усредненных уравнений (15).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 03-01-00716, 04-02-97503, гранта Президентской программы поддержки ведущих научных школ № 1446.2003.1, а также гранта INTAS 03-51-4286.

Список литературы

- [1] Л. А. Калякин. Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 1. С. 85–97.
- [2] L. Friedland. Phys. Rev. E. 1997. V. 55. № 2. P. 1929–1939; 2000. V. 61. № 4. P. 3732–3735; Л. А. Калякин. Proc. Steklov Inst. Math. Supp. 1. 2003. P. S108–S122.
- [3] Л. А. Калякин. ТМФ. 2003. Т. 137. № 1. С. 142–152.
- [4] Н. Бломберген. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1965; Ф. Е. Каплан, Ю. А. Кривцов, В. А. Рылов. Параметрические генераторы и делители частоты. М.: Советское радио, 1966; К. А. Наугольный, Л. А. Островский. Нелинейные волновые процессы в акустике. М.: Наука, 1990; Sh. Yariv, L. Friedland. Phys. Rev. E. 1993. V. 48. № 4. P. 3072–3076; U. Rokni, L. Friedland. Phys. Rev. E. 1999. V. 59. № 5. P. 5242–5252.
- [5] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
- [6] Г. М. Заславский, Р. З. Сагдеев. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988; Л. А. Калякин. Докл. РАН. 2001. Т. 378. № 5. С. 594–597.
- [7] B. Meerson, L. Friedland. Phys. Rev. A. 1990. V. 41. P. 5233–5236; J. Fajans, L. Friedland. Am. J. Phys. 2001. V. 69. № 10. P. 1096–1102.
- [8] А. Д. Брюно. Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. М.: Физматлит, 1998; В. В. Козлов, С. Д. Фурта. Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1996.
- [9] Г. Е. Кузмак. ПММ. 1959. Т. 23. № 3. С. 515–526.
- [10] Л. А. Калякин. Вестник УГАТУ. 2001. № 1. С. 40–46.