Общероссийский математический портал

А. В. Киселев, О гамильтоновых потоках на уравнениях Эйлера, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 83–93

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1834>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 15:56:52

© 2005 г.

А. В. Киселёв*

О ГАМИЛЬТОНОВЫХ ПОТОКАХ НА УРАВНЕНИЯХ ЭЙЛЕРА

Изучаются свойства потоков гамильтоновых симметрий гиперболических уравнений Эйлера $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ лиувилевского типа. Получено описание нётеровых симметрий, ассоциированных с интегралами данных уравнений. Эти интегралы задают преобразования Миуры из $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ в многокомпонентные волновые уравнения $\mathcal{E}$. Используя такие подстановки, удастся построить бесконечно-гамильтонову коммутативную подалгебру $\mathfrak{A}$ локальных нётеровых потоков симметрии на $\mathcal{E}$, размножаемых слабо нелокальными операторами рекурсии. Соответствие между схемами Магри для $\mathfrak{A}$ и для индуцированных “модифицированных” гамильтоновых потоков $\mathfrak{B} \subset \text{sym } \mathcal{E}'_{\text{EL}}$ таково, что указанные свойства переносятся на $\mathfrak{B}$, а операторы рекурсии для $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ факторизуются. Рассмотрены два примера, связанные с двумерной цепочкой Тоды.

Ключевые слова: двумерная цепочка Тоды, уравнение КдФ, уравнение Буссинеска, преобразование Миуры, коммутативные иерархии.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача построения пар коммутативных иерархий гамильтоновых эволюционных уравнений, связанных преобразованиями Миуры и отождествляемых с подалгебрами Ли алгебр нётеровых симметрий для систем уравнений Эйлера–Лагранжа. К классу гиперболических лагранжевых систем $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ лиувилевского типа применяются две стандартные методики [1]–[3]: подстановки Миуры, заданные интегралами уравнений $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$, и построение второй гамильтоновой структуры через преобразование Миуры, с помощью которых получено явное описание нётеровых симметрий уравнений $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$, заданных их интегралами и гамильтоновых относительно (первой) структуры, определяемой из лагранжианов. Также в работе изучаются свойства схем Магри для следующей пары иерархий, связанных подстановкой Миуры: $\mathfrak{A}$, образующие которой суть симметрии волнового уравнения, и $\mathfrak{B} \subset \text{sym } \mathcal{E}'_{\text{EL}}$. Приведены два примера. В разделе 2 уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$s_{t_1} = -\beta s_{xxx} + \frac{3}{2}s_x^2, \quad w_{t_1} = -\beta w_{xxx} + 3ww_x, \quad w = s_x, \quad \beta = \text{const}, \quad (1)$$

*Department of Mathematics, Brock University, 500 Glenridge Ave., St. Catharines, Ontario, Canada L2S 3A1; Ивановский государственный энергетический университет, каф. высшей математики, 153003 Россия, Иваново, ул. Рабфаковская, 34. E-mail: arthemyp@poincare.unile.it

и многокомпонентные модифицированные уравнения КдФ [4] связаны, соответственно, с волновым уравнением и двумерной цепочкой Тоды (в частности, ассоциированной с полупростой алгеброй Ли [5]); построена факторизация оператора рекурсии для уравнения (1) в произведение двух векторнозначных операторов. В разделе 3 показано, что уравнение Буссинеска [6]

$$\begin{cases} u_{t_1} = \frac{1}{3}v_{xxx} + \frac{4}{3}v_x^2, \\ v_{t_1} = u_x, \end{cases} \quad \begin{cases} U_{t_1} = V_x, \\ V_{t_1} = \frac{1}{3}U_{xxx} + \frac{8}{3}UU_x, \end{cases} \quad \begin{cases} U = v_x, \\ V = u_x, \end{cases} \quad (2)$$

и модифицированное уравнение Буссинеска [7], равно как и гамильтоновы структуры, задающие их коммутативные локальные иерархии, определяются геометрией двухкомпонентного волнового уравнения и двумерной цепочки Тоды, соответственно.

Взаимосвязь между гамильтоновым и лагранжевым подходами к интегрируемым эволюционным уравнениям обсуждалась в работе [8]. В указанной работе представления уравнений в лагранжевой форме получались путем применения преобразования Лежандра к последовательности гамильтонианов исходного эволюционного уравнения. Таким образом, используемый подход был замкнут относительно эволюционных систем и преобразований Миуры между ними вне зависимости от способа их представления. Рассматриваемый ниже подход противоположен подходу работы [8] и основан на интерпретации (би)гамильтоновых иерархий эволюционных уравнений как потоков, заданных подалгебрами алгебры нётеровых симметрий объемлющих систем уравнений Эйлера–Лагранжа (см. также [6]). Используя канонические переменные для лагранжевых систем и трактуя дифференциальную связь между координатами u и импульсами m как правило, задающее потенциалы Клебша, мы устанавливаем соотношение между потенциальными и непотенциальными компонентами иерархий, которые описывают эволюцию координат и импульсов, соответственно. Сопряженная линеаризация $(\ell_m^u)^*$ указанной выше дифференциальной связи задает первые гамильтоновы структуры для этих иерархий, и в результате их схемы Магри оказываются согласованными. Вторые гамильтоновы структуры задают операторы рекурсии и для иерархий эволюционных уравнений, и для объемлющих их систем Эйлера.

Структура работы такова. В разделе 1 указывается взаимосвязь между дифференциальным соотношением на координаты и импульсы гиперболических лагранжевых уравнений и гамильтоновыми операторами для алгебры их симметрий. Далее рассматриваются подстановки из лагранжевых уравнений $\mathcal{E}'_{EL}$ лиувилевского типа, заданные набором их интегралов; в этом случае подстановка Миуры в подалгебру $\mathfrak{A}$ нётеровых симметрий лагранжева волнового уравнения $\mathcal{E}$ задает вторую гамильтонову структуру на $\mathfrak{A}$. Так удастся получить пару $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ последовательностей гамильтоновых потоков на уравнениях $\mathcal{E}, \mathcal{E}'_{EL}$, соответственно, скоррелированных посредством преобразования Миуры. Затем исследуются свойства потоков, содержащихся в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, и операторов рекурсии для них; выясняется, какие из полученных свойств иерархии $\mathfrak{A}$, таких как локальность, коммутативность, бигамильтоновость и т.п., имеют место также и для $\mathfrak{B}$.

В разделе 2 приведены необходимые сведения о геометрии двумерной цепочки Тоды $u_{xy} = \exp(Ku)$; определения и обозначения следуют работе [9]. Затем рассматривают-

ся иерархия уравнения КдФ (1) и последовательность многокомпонентных аналогов модифицированного уравнения КдФ [4], связанных с двумерной цепочкой Тоды. Получено разложение оператора рекурсии для уравнения КдФ в произведение векторнозначных операторов; доказывается, что высшие потоки многокомпонентных модифицированных уравнений КдФ локальны и попарно коммутируют.

В разделе 3 показано, что иерархия $\mathfrak{B}$ высших потоков модифицированного уравнения Буссинеска (8) образует коммутативную подалгебру нётеровых симметрий двумерной цепочки Тоды (9), ассоциированной с алгеброй $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$. Установлено, что интегралы (7) системы (9) задают вторую гамильтонову структуру (10) для уравнения (2); получена факторизация оператора рекурсии для цепочки Тоды.

1. ИЕРАРХИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МИУРЫ

Рассмотрим лагранжиан первого порядка $\mathcal{L} = [L(u, u_x, u_y; x, y) dx \wedge dy]$ с плотностью $L = -\sum_{i,j} \bar{\kappa}_{ij} u_x^i u_y^j / 2 + H(u; x, y)$, где $\bar{\kappa}$ – невырожденная вещественная симметричная постоянная $(r \times r)$ -матрица. Выберем в качестве “времени” координату y , оставив x пространственной переменной, и обозначим через $\mathfrak{m}_j = \partial L / \partial u_y^j$ координату, сопряженную к j -й зависимой переменной u^j (j -й импульс) при $1 \leq j \leq r$,

$$\mathfrak{m} = -\frac{1}{2}(\bar{\kappa} u_x)^*. \quad (3)$$

Ниже будет показано, что сопряженная обратная линеаризация $D_x^{-1} \circ \bar{\kappa}^{-1}$ дифференциальной связи (3) между координатами и импульсами является гамильтоновой структурой для гиперболического уравнения Эйлера–Лагранжа $\mathcal{E}_{\text{EL}} = \{\mathbf{E}_u(\mathcal{L}) = 0\}$ и алгебры $\text{sym } \mathcal{L}$ нётеровых симметрий этого уравнения. Применяя преобразование Лежандра $H dx \wedge dy = \langle \mathfrak{m}, \partial L / \partial u_y \rangle - \mathcal{L}$, поставим в соответствие лагранжиану $\mathcal{L}$ гамильтониан $\mathcal{H}(u, \mathfrak{m}) = [H dx]$. Гиперболическое лагранжево уравнение $\mathcal{E}_{\text{EL}}$ эквивалентно системе

$$u_y = \mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_m(\mathcal{H}), \quad \mathfrak{m}_y = -\mathbf{1} \cdot \mathbf{E}_u(\mathcal{H}),$$

которая определена канонической гамильтоновой структурой $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. В силу соотношений

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_m = \bar{\kappa}^{-1} \cdot D_x^{-1} \cdot \mathbf{E}_u, \quad \mathbf{E}_u = \frac{1}{2} D_x \circ \bar{\kappa} \cdot \mathbf{E}_m,$$

уравнения движения разделяются и принимают эволюционную форму

$$u_y = A_1 \circ \mathbf{E}_u([H[u] dx]), \quad \mathfrak{m}_y = -\frac{1}{2} \hat{A}_1 \circ \mathbf{E}_m([H[\mathfrak{m}] dx]),$$

таким образом, теперь они заданы парой взаимно обратных гамильтоновых операторов $A_1 = \bar{\kappa}^{-1} \cdot D_x^{-1}$ и $\hat{A}_1 = D_x \cdot \bar{\kappa}$.

Пусть гиперболическое лагранжево уравнение $\mathcal{E}_{\text{EL}}$ допускает поток симметрии $u_t = \phi(u_x, u_{xx}, \dots) \equiv \phi[u_x]$, где t – параметр вдоль интегральных траекторий. Тогда эволюция $\mathfrak{m}_t$ импульсов задается непотенциальным уравнением $\mathfrak{m}_t = -(\bar{\kappa}/2) \cdot D_x(\phi[\mathfrak{m}])$; уравнение (1) поставляет пример потоков симметрии волнового уравнения $s_{xy} = 0$.

ЛЕММА 1 [10]. Пусть $\mathcal{E} = \{u_{xy} = f(u; x, y)\}$ – система квазилинейных гиперболических уравнений, допускающая закон сохранения

$$\mathcal{H} = H dx + \dots : \quad d_h(\mathcal{H}) = \nabla(u_{xy} - f).$$

Тогда производящее сечение $\psi \equiv \nabla^*(1)$ для $\mathcal{H}$ имеет вид $\psi = -D_x(\mathbf{E}_u(H dx))$.

По теореме Нётер [11] нётеровы симметрии самосопряженных лагранжевых систем $\mathcal{E}_{\text{EL}} = \{\mathbf{E}_u(\mathcal{L}) = 0\}$ совпадают с производящими сечениями их законов сохранения; согласно [12] корреляция между нётеровыми симметриями $\varphi_{\mathcal{L}}$ и производящими сечениями ψ для несамосопряженных лагранжевых уравнений $\mathcal{E}_{\text{EL}} \simeq \{\bar{\kappa}^{-1} \cdot \mathbf{E}_u(\mathcal{L}) = 0\}$ с равным единичной матрице символом такова: $\psi = \bar{\kappa} \varphi_{\mathcal{L}}$.

Пусть ϕ – нётерова симметрия гиперболической лагранжевой системы, тогда $u_t = \mathbf{E}_m(\mathcal{H})/2$, $m_t = -\mathbf{E}_u(\mathcal{H})/2$, где $\mathcal{H} = [H dx]$ и H – сохраняющаяся плотность, откуда $u_t = \bar{\kappa}^{-1} \cdot D_x^{-1} \mathbf{E}_u(\mathcal{H})$, $m_t = -D_x \cdot \bar{\kappa} \mathbf{E}_m(\mathcal{H})/2$. Таким образом, оба уравнения $u_t = \phi$ и $m_t = -\bar{\kappa} D_x(\phi)/2$ гамильтоновы одновременно, и их гамильтоновы операторы A_1 и $\hat{A}_1$ взаимно обратны (см., например, [13]). Индуцированную эволюцию импульсов m можно получить двумя способами: варьируя гамильтониан, при этом $m_t = -\mathbf{E}_u(\mathcal{H}) = -(\ell_m^u)^*(\mathbf{E}_m(\mathcal{H}))$, или явно используя соотношение (3), при этом $m_t = \ell_m^u(\mathbf{E}_m(\mathcal{H}))$. Для гиперболических лагранжевых уравнений результаты согласованы, поскольку выполнено условие $(\ell_m^u)^* = -\ell_m^u$. Далее, пусть R – оператор рекурсии для гиперболического лагранжева уравнения $\mathcal{E}_{\text{EL}} = \{\mathbf{E}_u(\mathcal{L}) = 0\}$, порождающий из некоторого потока ϕ_{-1} коммутативную цепочку $u_{t_i} = \phi_i[u_x]$ гамильтоновых симметрий. Понятно, что рекурсия R оказывается общей для всех уравнений $u_{t_i} = \phi_i$, а оператор R^* последовательно отображает скорости m_{t_i} эволюции импульсов (см. работу [14]).

В дальнейшем мы будем рассматривать класс гиперболических лагранжевых уравнений *лиувиллевского типа* [1], [5], [15], допускающих нетривиальные *интегралы*, т.е. функционалы $w \in \ker \bar{D}_y$, лежащие в ядре полной производной D_y , ограниченной на рассматриваемое уравнение $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$. Приведенные ниже рассуждения справедливы с точностью до перестановки $x \leftrightarrow y$ в том случае, если она является симметрией уравнения $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$, в противном случае замена x на y (и наоборот) поставит “зеркальные копии” всех конструкций и их свойств.

Если интегралы $w[\bar{m}]$ зависят от импульсов $\bar{m}$ лагранжева уравнения лиувиллевского типа, то само оно и его симметрии отображаются преобразованием Миуры $m = w[\bar{m}]$ в многокомпонентное волновое уравнение $\mathcal{E}$ и, соответственно, в его алгебру симметрий; при этом количество компонент в волновом уравнении равно числу интегралов w , задающих преобразование Миуры. В рассматриваемой ситуации определены еще два преобразования: ковариантное отображение $w_*: \text{sum } \mathcal{E}'_{\text{EL}} \rightarrow \text{sum } \mathcal{E}$ потоков симметрии (см. утверждение 4 в работе [1]) и действующее контравариантно отображение w^* гамильтонианов $H dx$ (а значит, и гамильтоновых потоков). Действительно, в силу равенства $m = w[\bar{m}]$ вариационные производные относительно импульсов m и модифицированных импульсов $\bar{m}$ связаны соотношением $\mathbf{E}_{\bar{m}} = \square \circ \mathbf{E}_m$, где $\square = (\ell_m^{\bar{m}})^*$. Используя лемму 1, получим

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Присоединенная линейаризация $\square = (\ell_{\bar{w}}^{\bar{m}})^*$ интегралов w лагранжевых уравнений $\mathcal{E}'_{\text{EL}} = \{\mathbf{E}_{\bar{u}}(\mathcal{L}') = 0\}$ лиувилевского типа, вычисленная относительно импульсов $\bar{m}$, факторизует нётеровы симметрии $\varphi_{\mathcal{L}'}$: $\varphi_{\mathcal{L}'} = \square(\mathbf{E}_{\bar{m}}(\mathcal{H}[\bar{m}]))$, причем плотность гамильтониана $\mathcal{H}$ произвольна.*

Примеры, иллюстрирующие утверждение 1, можно найти в [4], [12]; взаимосвязь структуры образующих алгебры симметрий гиперболических уравнений лиувилевского типа и их интегралов была исследована в недавней работе [16].

Рассмотрим подстановку $\bar{m} = w[\bar{m}]$ из лагранжева лиувилевского уравнения $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ в многокомпонентное волновое уравнение $\mathcal{E}$. Пара отображений (w^*, w_*) индуцирует вторую гамильтонову структуру $\hat{A}_2$ на нётеровых симметриях уравнения $\mathcal{E}$ [3]. Именно, пусть задана последовательность $\mathfrak{A}$ нётеровых потоков на $\mathcal{E}$, соответствующих сохраняющимся плотностям $H_i[\bar{m}]$ (плотностям гамильтонианов) относительно первых структур $((\ell_{\bar{m}}^u)^*)^{\pm 1}$. Тогда по каждому потоку $\phi_{i-1} = \mathbf{E}_{\bar{m}}(\mathcal{H}_i)$ на уравнении $\mathcal{E}$ можно построить поток $\bar{u}_{t_i} = \varphi_i = \square(\phi_{i-1})$ на $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$. Воспользуемся условием $(\ell_{\bar{m}}^u)^* = -\ell_{\bar{m}}^u$. Итак, корректно определена эволюция модифицированных импульсов $\bar{m}$. Эволюция $\mathfrak{D}_{\square(\phi_{i-1})}(w)$ подстановки w вдоль потока $\varphi_i \in \mathfrak{B}$ согласована с потоком ϕ_i , следующим за ϕ_{i-1} в $\mathfrak{A}$, если вторая гамильтонова структура $\hat{A}_2$ для $\mathfrak{A}$ удовлетворяет операторному уравнению

$$\ell_{\bar{m}}^{\bar{m}} \circ (\ell_{\bar{m}}^{\bar{u}})^* \circ (\ell_{\bar{m}}^{\bar{m}})^* = \hat{A}_2, \quad (4)$$

и наоборот, оператор $\hat{A}_2$, заданный этим уравнением (4), всегда является гамильтоновой структурой для $\mathfrak{A}$. Иными словами, уравнение (4) — это условие приводимости структуры $\hat{A}_2$ к канонической форме “ d/dx ”, которое ограничивает набор допустимых преобразований Миуры $w = w[\bar{m}]$ и модифицированных уравнений Эйлера $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ при фиксированном операторе $\hat{A}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если окажется, что операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ совместны, а потому последовательность $\mathfrak{A}$ коммутативна и оператор рекурсии $R = (\hat{A}_2 \circ \hat{A}_1^{-1})^*$ для уравнения $\mathcal{E}$ является также и рекурсией для $\mathfrak{A}$, то бигамильтонова иерархия $\mathfrak{A}$ допускает бесконечный набор гамильтоновых структур. Действительно, пусть $\varepsilon = \{u_t = \hat{A}_1(\psi[u])\}$ есть некоторое гамильтоново уравнение, допускающее рекурсию R (в обсуждаемом выше случае оператор R размножает коммутирующие потоки симметрий волнового уравнения $\mathcal{E}$). Тогда уравнение ε гамильтоново также и относительно операторов $\hat{A}_i = R^{i-1}\hat{A}_1$ при условии, что они кососопряжены (что выполнено в силу (4)). Доказательство этого свойства основано на следующем рассуждении. Согласно [14], [17] гамильтоновы операторы A для ε удовлетворяют соотношению $\ell_\varepsilon A + A\ell_\varepsilon^* = 0$, причем обратное также верно при дополнительных предположениях регулярности. Поскольку R является рекурсией для ε , то выполнено $\ell_\varepsilon R = R\ell_\varepsilon$. В самом деле, существует такой оператор $\bar{R}$, что выполнено $\ell_\varepsilon R = \bar{R}\ell_\varepsilon$. Прокоммутируем это равенство с оператором умножения на t и получим $\bar{R} = R$. Следовательно, имеет место соотношение $\ell_\varepsilon (RA) + (RA)\ell_\varepsilon^* = 0$, и поэтому оператор RA также гамильтонов. Теперь повторим рассуждения по индукции необходимое число раз. Приведенное выше обоснование есть строгое доказательство для тех операторов $\hat{A}_i$, которые являются дифференциальными (т.е. локальными по D_x), в

противном случае все соотношения следует трактовать формально, применяя их к набору переменных, пополненному нелокальностями $D_x^{-1}(\mathbf{u})$. Получаемые операторы $\hat{A}_i$ не обязательно совместны; отметим также, что, используя пару локальных дифференциальных операторов, можно, вообще говоря, получить нелокальную последовательность $\mathfrak{A}$. Ниже мы обсудим свойства локальности более подробно.

Рассмотрим последовательность $\mathfrak{B} \subset \text{sum } \mathcal{E}'_{\text{EL}}$ нётеровых симметрий φ_i , заданных оператором рекурсии $R' = \square \circ A_1 \circ \square^* \circ \ell_{\overline{\mathbf{m}}}^{\bar{u}}$ и согласованных с бигамильтоновой последовательностью нётеровых симметрий многокомпонентного волнового уравнения $\mathcal{E}$ посредством преобразования Миуры $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$; это преобразование задано интегралами w . Последовательности $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ допускают общий набор гамильтонианов и, по построению, вторая гамильтонова структура $\hat{A}_2$ для $\mathfrak{A}$ индуцирована первой гамильтоновой структурой $\hat{B}_1 = (\ell_{\overline{\mathbf{m}}}^{\bar{u}})^*$ для $\mathfrak{B}$, что отображено на следующей диаграмме [2]:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathcal{H}_0 & & \mathcal{H}_1 & & \mathcal{H}_2 & & \\
 \downarrow \mathbf{E}_u & \searrow \mathbf{E}_m & \downarrow \mathbf{E}_u & \searrow \mathbf{E}_m & \downarrow \mathbf{E}_u & \searrow \mathbf{E}_m & \\
 \Phi_0 & \xleftrightarrow[\hat{A}_1]{A_1} \phi_0 & \xrightarrow{\hat{A}_2} \Phi_1 & \xleftrightarrow[\hat{A}_1]{A_1} \phi_1 & \xrightarrow{\hat{A}_2} \Phi_2 & \xleftrightarrow[\hat{A}_1]{A_1} \phi_2 & \\
 & \searrow \square & \uparrow \ell_{\overline{\mathbf{m}}}^{\bar{u}} & \searrow \square & \uparrow \ell_{\overline{\mathbf{m}}}^{\bar{u}} & \searrow \square & (5) \\
 & \phi_1 & \xleftrightarrow[\hat{B}_1]{B_1} \psi_1 & \xrightarrow{B_2} \phi_2 & \xleftrightarrow[\hat{B}_1]{B_1} \psi_2 & \xrightarrow{B_2} \dots & \\
 & \nwarrow \mathbf{E}_{\overline{\mathbf{m}}} & \uparrow \mathbf{E}_{\bar{u}} & \nwarrow \mathbf{E}_{\overline{\mathbf{m}}} & \uparrow \mathbf{E}_{\bar{u}} & & \\
 & \mathcal{H}_0 & & \mathcal{H}_1 & & &
 \end{array}$$

И схемы Магри [2] для $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, и факторизация (4) оператора $\hat{A}_2$ (см. [3]) стандартны. Однако теперь понятно, что *первые* гамильтоновы структуры $\hat{A}_1$ и $\hat{B}_1$ заданы лагранжианами объемлющих уравнений Эйлера, а оператор $\square$ определяется по интегралам систем $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ лиувилевского типа.

Если гамильтоновы операторы $\hat{A}_1 = (\ell_{\overline{\mathbf{m}}}^{\bar{u}})^*$ и $\hat{A}_2$ совместны, то функционалы $\mathcal{H}_i[\mathbf{m}]$ находятся в инволюции относительно обеих структур, и потоки ϕ_i коммутируют [2]; согласно замечанию 1 иерархия $\mathfrak{A}$ допускает бесконечный набор гамильтоновых операторов. Кроме того, имеем

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть оператор рекурсии R для эволюционного уравнения $\varepsilon = \{\mathbf{u}_t = \phi[\mathbf{u}]\}$ построен по набору абелевых нелокальных переменных (выражений, нелокальных относительно всех входящих в ε переменных и заданных сохраняющимися токами η_α для ε , см. [9]). Тогда R слабо нелокален: $R = \text{дифференциальная часть} + \sum_\alpha \varphi_\alpha D_x^{-1} \circ \psi_\alpha$, где $\varphi_\alpha \in \text{sum } \varepsilon$, ψ_α — производящее сечение закона сохранения η_α при всяком α .

Доказательство утверждения 2 следует из определений, и его несложно обобщить на случай нескольких слоев абелевых нелокальных переменных, заданных (нелокальными) законами сохранения. Из сформулированного выше утверждения следует, что рекурсия $R^*: \Phi_i \mapsto \Phi_{i+1}$ для иерархии $\mathfrak{A}$ слабо нелокальна в силу разложений $R^* = \hat{A}_2 \circ \hat{A}_1^{-1}$ и уравнения (4).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ совместны, то потоки $\phi_i \in \text{sym } \mathcal{E}$ являются нётеровыми.*

Действительно, гомологическая формулировка (см., например, [14]) схемы Магри и тривиальность пуассоновых когомологий относительно структуры $\hat{A}_1$ [18] гарантируют существование законов сохранения $\mathcal{H}_i$ для $\mathcal{E}$. Далее следует воспользоваться леммой 1 и применить теорему Нётер [11], [12]. Мы также можем сделать вывод о том, что $\mathfrak{A}$ локальна по w .

Выясним, какие из перечисленных выше свойств переносятся также и на последовательность $\mathfrak{B}$. Очевидно, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ локальны одновременно. Ограничения отображений $B_2: \psi_i \mapsto \varphi_{i+1}$ и $\hat{B}_2: \varphi_i \mapsto \psi_{i+1}$ на функционалы $H[w] dx$, зависящие от модифицированных переменных $\bar{y}$ лишь через подстановку $w = w[\bar{m}]$, являются гамильтоновыми операторами, и функционалы $\mathcal{H}_i[w[\bar{m}]]$ находятся в инволюции относительно $\hat{B}_2$, поскольку это было верно для $\hat{A}_3$. Из замечания 1 понятно, почему тождество Якоби выполняется для операторов $B_2, \hat{B}_2$ даже в том случае, когда гамильтонианы $\mathcal{H}$ зависят от $\bar{y}$ произвольным образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *В приведенных выше обозначениях и предположениях верно следующее: если потоки $\phi_i \in \mathfrak{A}$ коммутируют и $\ker \hat{A}_2 = 0$, то последовательность $\mathfrak{B}$ также коммутативна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно утверждению 1 всякая нётерова симметрия гиперболического лагранжева уравнения $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ лиувиллевского типа делится на оператор $\square$ (с точностью до замены $x \leftrightarrow y$, если она является симметрией уравнения $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$). Коммутатор двух нётеровых симметрий $\square(\phi')$, $\square(\phi'')$ – вновь нётерова симметрия: $\{\square(\phi'), \square(\phi'')\} = \square(\phi_{\{1,2\}})$, причем выражение $\phi_{\{1,2\}}$ может содержать слагаемые, нетипичные для стандартной скобки Якоби сечений ϕ' и ϕ'' , см. приведенную ниже формулу (6). Из условия (4) следует, что $\mathfrak{E}_{\square(\phi_{\{1,2\}})}(w) = \hat{A}_2(\phi_{\{1,2\}})$. Таким образом, если оператор $\hat{A}_2$ инъективный, иерархия $\mathfrak{A}$ коммутативна, а последовательность $\mathfrak{B}$ согласована с $\mathfrak{A}$ посредством (4) и (5), то $\mathfrak{B}$ коммутативна.

Из утверждения 4 следует, что рекурсия R' для системы $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ является общей для всех уравнений, входящих в $\mathfrak{B}$. Из утверждения 2 мы также заключаем, что оператор рекурсии $(R')^*$, размножающий непотенциальную компоненту $\mathfrak{B}$, слабо нелокален.

В разделах 2 и 3 приведенная выше схема применена к иерархиям уравнений КдФ и Буссинеска. Сначала для каждой из них восстанавливается потенциальная компонента $\mathfrak{A}$, для чего первая гамильтонова структура $\hat{A}_1$ трактуется как сопряженная линеаризация связи (3), и указываются лагранжианы объемлющих гиперболических уравнений Эйлера–Лагранжа (для чего следует отыскать матрицы $\bar{k}$, поскольку плотности гамильтонианов тривиальны). Затем мы находим такие лагранжевы уравнения $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$

лиувиллевского типа, что соответствующие модифицированные иерархии $\mathfrak{B}$ состоят из потоков их симметрий, а преобразования Миуры $\mathcal{E}'_{\text{EL}} \mapsto \mathcal{E}$, переводящие $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$, заданы интегралами уравнений $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$. Далее, коммутативность потоков $\mathfrak{A}$ переносится на модифицированные потоки (локальные нётеровы симметрии уравнения $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$) и строятся разложения слабо нелокальных операторов рекурсии.

2. ДВУМЕРНАЯ ЦЕПОЧКА ТОДЫ И ИЕРАРХИЯ КДФ

Начнем с формулировки необходимых свойств двумерной цепочки Тоды. Пусть $r \geq 1$, $K = \|k_{ij}\|$ — произвольная постоянная вещественная невырожденная $(r \times r)$ -матрица, а вектор $\vec{a} = {}^t(a_1, \dots, a_r)$ таков, что $a_i \neq 0$ при всех $1 \leq i \leq r$ и условие $\kappa_{ij} \equiv a_i k_{ij} = \kappa_{ji}$ выполнено для всех элементов матрицы $\kappa = \|\kappa_{ij}\|$. Тогда матрица K называется *симметризуемой*; обозначим обратную к ней через $K^{-1} = \|k^{ij}\|$. Двумерная r -компонентная цепочка Тоды, ассоциированная с невырожденной симметризуемой матрицей K , имеет вид $\mathcal{E}_{\text{Toda}} = \{u_{xy} = \exp(Ku)\}$. Плотность лагранжиана $\mathcal{L}_{\text{Toda}}$ есть $L_{\text{Toda}} = -\langle u_y, \kappa u_x \rangle / 2 - \langle \vec{a}, \exp(Ku) \rangle$. Обозначим через $\vartheta = \kappa u_x$ импульсы, полученные из равенства (3). Компонента $w = \langle u_x, \kappa u_x \rangle / 2 - \langle \vec{a}, u_{xx} \rangle$ тензора энергии-импульса для уравнения $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$ принадлежит ядру ограничения $\overline{D}_y$ полной производной D_y на $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$: $\overline{D}_y(w) = 0$. Конформные веса $\vec{\Delta} = {}^t(\Delta^1, \dots, \Delta^r)$ полей $\exp(u)$ таковы: $\Delta^i = \sum_{j=1}^r k^{ij}$. Рассмотрим случай, когда функционал w и его дифференциальные следствия $\mathbf{W}$ — единственные решения уравнения $\overline{D}_y(\Omega) = 0$, зависящие от производных u ; тогда положим по определению, что матрица K *общего положения*.

Нётеровы симметрии уравнения $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$, ассоциированного с симметризуемой $(r \times r)$ -матрицей K общего положения, суть $\varphi = \square(\mathbf{E}_w(H(x, \mathbf{W}) dx))$ с точностью до преобразования $x \leftrightarrow y$ (см. [12], а также [10]); в приведенной выше формуле $\square = (\ell_w^\vartheta)^* = u_x + \vec{\Delta} \overline{D}_x$ — это векторнозначный дифференциальный оператор первого порядка, а H — произвольная гладкая функция. Оператор $R_{\text{Toda}} = \square \circ \ell_s$, где $s_x = w$ и $s_{xy} = 0$, есть нелокальный оператор рекурсии для алгебры $\text{sym } \mathcal{E}_{\text{Toda}}$ [12].

Положим $\phi_{-1} = 1$ и зададим три последовательности симметрий при $i \geq 0$: $\varphi_i = \square(\phi_{i-1}) \in \text{sym } \mathcal{E}_{\text{Toda}}$, $\phi_i = R_{\text{pKdV}}(\phi_{i-1}) \in \text{sym } \mathcal{E}_{\text{pKdV}}$ и $\Phi_i = \mathfrak{D}_{\phi_i}(w) \in \text{sym } \mathcal{E}_{\text{KdV}}$, где уравнения КДФ имеют вид (1) и $\beta \equiv \langle \vec{a}, \vec{\Delta} \rangle$. Скорости эволюции Φ_i и ϕ_i являются элементами локальных коммутативных бигамильтоновых иерархий потенциальных уравнений КДФ $w_{t_1} = \Phi_1$ и $s_{t_1} = \phi_1$, соответственно. Уравнение $u_{t_1} = \varphi_1 = \square(\phi_0)$ — это r -компонентный аналог потенциального модифицированного уравнения КДФ и в то же время — нётерова симметрия цепочки Тоды $\mathcal{E}_{\text{Toda}}$. Уравнение $u_{t_1} = \varphi_1$ гамильтоново относительно оператора $B_1 = D_x^{-1} \kappa^{-1}$; уравнение $\mathcal{E}_{\text{mKdV}} = \{\vartheta_{t_1} = \kappa D_x(\varphi_1)\}$, являющееся r -компонентным аналогом модифицированного уравнения КДФ, гамильтоново относительно $\widehat{B}_1 = \kappa D_x$. Интеграл $w[\vartheta]$ задает преобразование Миуры между высшими модифицированными уравнениями КДФ и иерархией $\mathfrak{A}$ уравнения (1). Именно, условие (4) выполнено для подстановки $w = w[\vartheta]$ и второй гамильтоновой структуры $\hat{A}_2 = -\beta D_x^3 + D_x \circ w + w \cdot D_x$ для уравнения КДФ $\mathcal{E}_{\text{KdV}}$. Вследствие этого времена t_i эволюции $u_{t_i} = \varphi_i$ согласованы со временами в иерархии $\mathfrak{A}$ уравнения $\mathcal{E}_{\text{pKdV}}$ посредством указанного преобразования; все четыре уравнения $\mathcal{E}_{(\text{p})(\text{m})\text{KdV}}$, а также их высшие

аналоги, допускают единый набор гамильтонианов $\mathcal{H}_i = [H_i dx]$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5 [4]. *Имеют место факторизации $R_{\text{Toda}} = \square \circ \ell_s$ и $R_{\text{pKdV}} = \ell_s \circ \square$ для операторов рекурсии $R_{\text{Toda}}: \varphi_i \mapsto \varphi_{i+1}$ и $R_{\text{pKdV}}: \phi_i \mapsto \phi_{i+1}$. Каждый поток $\varphi_k = \square \circ \mathbf{E}_w(\mathcal{H}_{k-1}) \in \text{sym } \mathcal{L}_{\text{Toda}}$ является нётеровой симметрией цепочки Тоды, причем сечение φ_k гамильтоново относительно гамильтоновой структуры $B_1 = \kappa^{-1} \cdot D_x^{-1}$ и гамильтониана $\mathcal{H}_{k-1} = [H_{k-1} dx]$ для $(k-1)$ -го высшего уравнения КдФ.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. *Симметрии φ_k коммутируют.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Иерархия $\mathfrak{A}$ уравнения КдФ коммутативна и локальна по $s_x = w$. Пусть $\varphi' = \square(\phi'(x, \mathbf{W}))$ и $\varphi'' = \square(\phi''(x, \mathbf{W}))$, тогда скобка Якоби φ' и φ'' имеет вид $\{\varphi', \varphi''\} = \square(\phi_{\{1,2\}}(x, \mathbf{W}))$, где (приведенная ниже скобка введена в работе [1] применительно к скалярному случаю)

$$\phi_{\{1,2\}} = \mathfrak{D}_{\varphi'}(\phi'') - \mathfrak{D}_{\varphi''}(\phi') + \overline{D}_x(\phi')\phi'' - \phi'\overline{D}_x(\phi''). \quad (6)$$

С одной стороны, $[\mathfrak{D}_{\varphi_{k_1}}, \mathfrak{D}_{\varphi_{k_2}}](w) = \{\Phi_{k_1}, \Phi_{k_2}\} = 0$; с другой стороны, справедливы равенства $\varphi_{k_i} = \square(\phi_{k_{i-1}})$ и $\mathfrak{D}_{\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}\}}(w) = \hat{A}_2(\phi_{\{k_1, k_2\}})$. Очевидно, гамильтонов оператор $\hat{A}_2$ для КдФ инъективен. Отсюда получаем, что $\phi_{\{k_1, k_2\}} = 0$, и потому $\{\varphi_{k_1}, \varphi_{k_2}\} = \square(0) = 0$. Это же рассуждение показывает, что оператор R_{Toda} является рекурсией для i -го уравнения $u_{t_i} = \varphi_i$ в коммутативной подалгебре симметрий $\mathfrak{B}$ при всех $i \geq 0$.

3. ИЕРАРХИЯ УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА

Первая гамильтонова структура для уравнения Буссинеска (2) есть $\hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & D_x \\ D_x & 0 \end{pmatrix}$. Зададим потенциалы u, v формулами $U = v_x$, $V = u_x$; переменные u, v удовлетворяют потенциальному уравнению Буссинеска (2). В дальнейшем будут использоваться обозначения $\mathbf{u} = {}^t(u, v)$ и $\mathbf{U} = {}^t(U, V)$. Лагранжиан объемлющего волнового уравнения $\mathcal{E} = \{v_{xy} = 0, u_{xy} = 0\}$ с плотностью $L_{\text{Bous}} = -u_x v_y / 2 - v_x u_y / 2$, получается непосредственно. Одно из преобразований Миуры для уравнения (2) задано формулами [7]

$$U = a^2 + ab + b^2 + 2a_x + b_x, \quad V = -2a(b(a+b) + b_x) - D_x(b_x + ab + b^2). \quad (7)$$

Непотенциальное модифицированное уравнение Буссинеска таково:

$$a_t = \frac{1}{3}D_x(a^2 - 2ab - 2b^2 - a_x - 2b_x), \quad b_t = \frac{1}{3}D_x(-2a^2 - 2ab + b^2 + 2a_x + b_x). \quad (8)$$

Это уравнение гамильтоново относительно оператора $\hat{B}_1 = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot D_x$ и оператора Казимира $\mathcal{H}_0 = [V dx]$. Обратим внимание на то, что $\hat{B}_1$ содержит матрицу Картана $K_{\mathfrak{sl}_3}$ алгебры $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$, см. [6]. Отметим также, что вторая серия потоков для уравнения (2) начинается с оператора Казимира $\overline{\mathcal{H}}_0 = \int [U dx]$; ясно также, что интегральные условия

$$[U dx] = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x dx = \text{const}, \quad [V dx] = \int_{-\infty}^{+\infty} u_x dx = \text{const},$$

используемые в методе обратной задачи, имеют естественную природу. Заметим еще, что гамильтонианы $\mathcal{H}_0$ и $\overline{\mathcal{H}}_0$ порождают *ненулевые* потоки симметрии на уравнениях (2), а именно, сдвиги потенциальных переменных u и v . Введем потенциалы α и β такие, что $a = (2\alpha_x - \beta_x)/3$, $b = (-\alpha_x + 2\beta_x)/3$; положим $\alpha = {}^t(\alpha, \beta)$ и $\mathbf{a} = {}^t(a, b)$. Гамильтоновы потоки $\mathbf{u}_{t_{i-1}} = \phi_{i-1}$ отображаются в потоки $\alpha_{t_i} = \varphi_i = \square(\phi_{i-1})$ под действием оператора

$$\square = (\ell_{\mathbf{U}}^{\mathbf{a}})^* = \begin{pmatrix} 2a + b - 2D_x & -4ab - 2b^2 - 2b_x + b D_x \\ a + 2b - D_x & -2a^2 - 4ab + 2D_x \circ a - D_x^2 + (a + 2b)D_x \end{pmatrix}.$$

Чтобы описать объемлющее лагранжево уравнение $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$, необходимо разрешить уравнения $\{\varphi_i \in \text{sym } \mathcal{E}'_{\text{EL}}\}$, $i \geq 0$, относительно гамильтониана H'_{EL} . Решая первые два из них, находим $H'_{\text{EL}} = c_1 \exp(\beta - \alpha) + c_2 \exp(\alpha) + c_3 \exp(-\beta)$, где $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, и, таким образом, получаем двумерную цепочку Тоды. Функционалы $\mathbf{U}[\mathbf{a}]$ являются интегралами уравнения $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$ (а значит, оно лиувилевского типа), если $c_2 = 0$, и потому

$$\alpha_{xy} = -c_1 \exp(\beta - \alpha) - c_3 \exp(-\beta), \quad \beta_{xy} = c_1 \exp(\beta - \alpha) - 2c_3 \exp(-\beta). \quad (9)$$

Это уравнение сводится к цепочке Тоды [6] $\alpha_{xy} = \exp(K_{\mathfrak{sl}_3} \alpha)$ заменой переменных. Вспомним, что $\phi_i \in \text{im } \mathbf{E}_{\mathbf{U}}$ и $\square = (\ell_{\mathbf{U}}^{\mathbf{a}})^*$. Следовательно, потоки $\varphi_i = \square(\phi_{i-1})$ являются нётеровыми симметриями $\mathcal{E}'_{\text{EL}}$. В этом случае преобразование Миуры $\mathbf{U} = \mathbf{U}[\mathbf{a}]$ и разложение (4) задают естественную факторизацию второй гамильтоновой структуры [17]

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} -2D_x^3 + 2U D_x + U_x & 3V D_x + 2V_x \\ 3V D_x + V_x & \frac{2}{3}D_x^5 - \frac{5}{3}(U D_x^3 + D_x^3 \circ U) + \\ & + U_{xx} D_x + D_x \circ U_{xx} + \frac{8}{3}U D_x \circ U \end{pmatrix} \quad (10)$$

для уравнения Буссинеска (2). Начальные элементы иерархии Буссинеска и согласованной с ней последовательности потоков модифицированного уравнения Буссинеска, допускающие общий набор гамильтонианов $\mathcal{H}_i$, приведены в диаграмме (5); плотности гамильтонианов таковы:

$$\begin{aligned} H_0 &= V, \\ H_1 &= \frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{6}U_x^2 + \frac{2}{9}U^3, \\ H_2 &= \frac{1}{12}U_{xx}V_{xx} - \frac{5}{12}UU_{xx}V - \frac{5}{16}U_x^2V + \frac{5}{36}U^3V + \frac{5}{48}V^3, \quad \dots \end{aligned}$$

Из утверждения 4 следует, что элементы φ_i последовательности $\mathfrak{B}$ нётеровых потоков на цепочке Тоды (9), соответствующие модифицированному уравнению Буссинеска, попарно коммутируют и локальны по $\mathbf{a}$; доказательство этого факта аналогично приведенному выше для утверждения 6. Отметим, что явная формула (6), задающая скобку $\phi_{\{k_i, k_j\}}$, не используется. Кроме того, мы получаем факторизации $R_{\text{pmBous}} = \square \circ \hat{A}_1^{-1} \circ \square^* \circ \ell_{\mathbf{a}}^{\alpha}$ и $R_{\text{mBous}} = \ell_{\mathbf{a}}^{\alpha} \circ \square \circ \hat{A}_1^{-1} \circ \square^*$ операторов рекурсии $R_{\text{pmBous}} = R_{\text{mBous}}^*$, размножающих высшие модифицированные уравнения Буссинеска (8). Согласно утверждению 2 рекурсии для иерархий $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ слабо нелокальны.

Благодарности. Автор благодарен А. М. Вербовецкому, Б. А. Дубровину, И. С. Красильщику и М. В. Павлову за полезные обсуждения, а также глубоко признателен В. В. Соколову и рецензенту за важные замечания и конструктивную критику. Автор выражает благодарность оргкомитету конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. III” за поддержку. Работа выполнена при частичной поддержке гранта INTAS YS 2001/2-33 и гранта университета Лечче № 650 CP/D.

Список литературы

- [1] *A. B. Жибер, В. В. Соколов.* УМН. 2001. Т. 56. № 1. С. 63–106.
- [2] *F. Magri.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162.
- [3] *R. M. Miura.* J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1202–1204.
- [4] *A. V. Kiselev, A. V. Ovchinnikov.* J. Dynam. Control Systems. 2004. V. 10. № 3. P. 431–451.
- [5] *A. H. Лезнов, В. Г. Смирнов, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1982. Т. 51. № 1. С. 10–21.
- [6] *A. P. Fordy, J. Gibbons.* J. Math. Phys. 1980. V. 21. № 10. P. 2508–2510; 1981. V. 22. № 6. P. 1170–1175.
- [7] *М. В. Павлов.* Фунд. прикл. матем. 2004. Т. 10. № 1. С. 175–182.
- [8] *Y. Nutku, M. V. Pavlov.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 3. P. 1441–1459.
- [9] *А. В. Бочаров, А. М. Вербовецкий, А. М. Виноградов и др.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики. Ред. А. М. Виноградов и И. С. Красильщик. М.: Факториал, 1997.
- [10] *А. Г. Мешков.* ТМФ. 1985. Т. 63. № 3. С. 323–332.
- [11] *G. Barnich, F. Brandt, M. Henneaux.* Commun. Math. Phys. 1995. V. 174. P. 57–92; hep-th/9405109.
- [12] *A. V. Kiselev.* Acta Appl. Math. 2004. V. 83. № 1–2. P. 175–182.
- [13] *C. S. Gardner.* J. Math. Phys. 1971. V. 12. № 8. P. 1548–1551.
- [14] *P. Kersten, I. Krasil'shchik, A. Verbovetsky.* J. Geom. Phys. 2004. V. 50. № 1–4. P. 273–302.
- [15] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* Экспоненциальные системы типа I и матрицы Картана. Препринт. Уфа: Башкир. филиал АН СССР, 1981.
- [16] *Д. К. Демской, С. Я. Старцев.* Фунд. прикл. матем. 2004. Т. 10. № 1. С. 29–37.
- [17] *П. Олвер.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [18] *E. Getzler.* Duke Math. J. 2002. V. 111. P. 535–560.