Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Кодама, Б. Г. Конопельченко, Л. Мартинес Алонсо, Интегрируемые деформации алгебраических кривых, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 94–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1835>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:49:14

© 2005 г.

Ю. Кодама*, Б. Г. Конопельченко[†],
Л. Мартинес Алонсо[‡]

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Представлена общая схема нахождения и исследования интегрируемых деформаций алгебраических кривых, основанная на использовании соотношений Ленарда. Акцент делается на использовании нескольких типов динамических переменных: ветвей, степенных сумм и потенциалов.

Ключевые слова: алгебраические кривые, интегрируемые системы, соотношения Ленарда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория алгебраических кривых является фундаментальной составной частью методов анализа интегрируемых нелинейных дифференциальных уравнений. Значимость этой теории проявляется, например, при описании конечнозонных решений или при формулировке метода усреднения Уизема [1], [2]. Особенно интересна задача описания и классификации интегрируемых деформаций алгебраических кривых. В работах [2] Кричевер сформулировал общую теорию бездисперсионных иерархий интегрируемых моделей, связанных с деформациями алгебраических кривых, возникающими в методе усреднения Уизема. Другой подход к нахождению интегрируемых деформаций алгебраических кривых $\mathcal{C}$, определенных алгебраическими уравнениями с единичным коэффициентом при старшей степени вида

$$F(p, k) := p^N - \sum_{n=1}^N u_n(k) p^{N-n} = 0, \quad u_n \in \mathbb{C}[k], \quad (1)$$

был предложен в работах [3], [4]. Он применяется для нахождения деформаций кривой $\mathcal{C}(x, t)$, которые согласованы со степенями полиномов u_n и характеризуются наличием функции *действия* $\mathbf{S} = \mathbf{S}(k, x, t)$, удовлетворяющей следующим условиям.

*Department of Mathematics, Ohio State University Columbus, OH 43210, USA

[†]Dipartimento di Fisica, Università di Lecce and Sezione INFN 73100 Lecce, Italy. E-mail: Boris.Konopeltchenko@le.infn.it

[‡]Departamento de Física Teórica II, Universidad Complutense E28040 Madrid, Spain. E-mail: luism@fis.ucm.es

1. Определенная уравнением (1) многозначная функция $\mathbf{p} = \mathbf{p}(k)$ может быть представлена в виде $\mathbf{p} = \mathbf{S}_x$.

2. Функция $\mathbf{S}_t$ представляет собой мероморфную функцию на $\mathcal{C}(x, t)$ с полюсами только при $k = \infty$.

Из этих условий следует, что $\mathbf{p}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \mathbf{p} = \partial_x \mathbf{Q}, \quad (2)$$

где $\mathbf{Q} := \mathbf{S}_t$ имеет вид [3], [5]

$$\mathbf{Q} = \sum_{r=1}^N a_r(k, x, t) \mathbf{p}^{N-r}, \quad a_r \in \mathbb{C}[k],$$

т.е. $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}[k, p]/\mathcal{C}$. Вид уравнения (2) определяет выбор нескольких наборов динамических переменных, использование которых упрощает описание интересующих нас деформаций. Следует отметить, что уравнение (2) дает бесконечное число законов сохранения при разложении $\mathbf{p}$ и $\mathbf{S}$ в ряд Лорана по k . В этой связи мы говорим, что уравнение (2) является интегрируемым.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Для того чтобы описать деформации кривой $\mathcal{C}$, определенной уравнением (1), мы будем использовать не только коэффициенты u_n (*потенциалы*), но и некоторые альтернативные наборы динамических переменных. Прежде всего, мы имеем N ветвей $p_i = p_i(k)$, $i = 1, \dots, N$, многозначной функции $\mathbf{p} = \mathbf{p}(k)$, удовлетворяющих условию

$$F(p, k) = \prod_{i=1}^N (p - p_i(k)) = 0. \quad (3)$$

Существует важный результат, касающийся поведения ветвей p_i . Обозначим через $\mathbb{C}((\lambda))$ поле рядов Лорана по переменной λ , которые содержат не более конечного числа членов с положительными степенями:

$$\sum_{n=-\infty}^N c_n \lambda^n, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Тогда имеет место теорема Ньютона [6], [7].

ТЕОРЕМА. *Существует положительное целое число l такое, что N ветвей*

$$p_i(z) := (p_i(k))|_{k=z^l} \quad (4)$$

являются элементами поля $\mathbb{C}((z))$. Более того, если $F(p, k)$ есть неприводимый над полем $\mathbb{C}((k))$ полином, то $l_0 = N$ есть наименьшее допустимое значение l , и ветви $p_i(z)$ могут быть пронумерованы таким образом, что

$$p_i(z) = p_N(\epsilon^i z), \quad \epsilon := \exp \frac{2\pi i}{N}.$$

СОГЛАШЕНИЕ ОБ ОБОЗНАЧЕНИЯХ. Впредь для заданной алгебраической кривой $\mathcal{C}$ через z мы будем обозначать переменную, связанную с наименьшим положительным числом l_0 , для которого замена переменных $k = z^{l_0}$ влечет $p_i \in \mathbb{C}((z))$ для любого i .

Потенциалы могут быть выражены как элементарные симметрические полиномы s_n от ветвей p_i [8], [9]:

$$u_n = (-1)^{n-1} s_n(p_1, p_2, \dots) = (-1)^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N} p_{i_1} \dots p_{i_n}. \quad (5)$$

Заметим, что в силу известной теоремы Абеля [8] при $N > 4$ ветви p_i уравнения (1) общего вида не могут быть выражены через потенциалы u_n при помощи рациональных операций и радикалов.

Второй набор альтернативных динамических переменных дается *степенными суммами* [8], [9]:

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{k} (p_1^k + \dots + p_N^k), \quad k \geq 1, \quad (6)$$

где по сравнению с их обычным определением мы добавили множитель $1/k$. Связь между потенциалами и степенными суммами может быть установлена посредством рекуррентных формул Ньютона, решение которых дается формулой Варинга [9]

$$\mathcal{P}_k = \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{\binom{k}{i}}{i} (u_1 + \dots + u_N)^i, \quad (7)$$

где индекс $\binom{k}{i}$ над знаком суммы означает, что из выражения $(u_1 + \dots + u_N)^i$ удерживаются лишь члены с весом k (предполагается, что вес потенциала u_n равен n). Соответствующая формула обращения имеет вид [7]

$$\begin{aligned} u_n &= -\mathcal{S}_n(-\mathcal{P}_1, -\mathcal{P}_2, \dots) = \\ &= - \sum_{i_1 + 2i_2 + \dots + ki_k = n} \frac{1}{i_1! \dots i_k!} (-\mathcal{P}_1)^{i_1} \dots (-\mathcal{P}_k)^{i_k}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathcal{S}_n$ — полиномы Шура, определенные тождеством

$$\exp\left(\sum_{n \geq 1} \lambda^n x_n\right) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n \mathcal{S}_n(x).$$

Формула (8) есть следствие тождества [10]

$$\exp\left(-\sum_{n \geq 1} \lambda^n \mathcal{P}_n\right) = \sum_{n \geq 0} (-\lambda)^n s_n(p_1, p_2, \dots).$$

ПРИМЕРЫ. При $N = 2$ уравнение кривой имеет вид

$$F := p^2 - u_1 p - u_2 = 0, \quad (9)$$

и первые степенные суммы суть

$$\mathcal{P}_1 = u_1, \quad \mathcal{P}_2 = \frac{1}{2}u_1^2 + u_2.$$

При $N = 3$ уравнение кривой записывается как

$$F := p^3 - u_1 p^2 - u_2 p - u_3 = 0, \quad (10)$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= u_1, & \mathcal{P}_2 &= u_2 + \frac{1}{2}u_1^2, & \mathcal{P}_3 &= u_3 + u_1 u_2 + \frac{1}{3}u_1^3, \\ \mathcal{P}_4 &= u_1 u_3 + \frac{1}{2}u_2^2 + u_2 u_1^2 + \frac{1}{4}u_1^4. \end{aligned}$$

Степенные суммы также имеют смысл моментов логарифмической производной функции $F(p, k)$, как показывает следующая формула (см. гл. 7 книги [11]):

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{2\pi i k} \oint_{\partial D} p^k \frac{\partial}{\partial p} \ln F(p, k) dp,$$

где контур ∂D в комплексной плоскости есть граница области, содержащей все нули p_i функции $F(p, k)$.

3. ДЕФОРМАЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Мы ищем эволюционное уравнение для потенциалов, приводящее к уравнениям для $\mathbf{p}$ вида (2), или, что эквивалентно, к уравнениям для ветвей p_i , $i = 1, \dots, N$,

$$\partial_t p_i = \partial_x Q_i, \quad Q_i := \sum_{r=1}^N a_r(k, x, t) p_i^{N-r}. \quad (11)$$

Используя обозначения

$$\mathbf{p} := (p_1, \dots, p_N)^T, \quad \mathbf{a} := (a_N, \dots, a_1)^T,$$

можно переписать систему (11) в виде

$$\partial_t \mathbf{p} = \partial_x (V \mathbf{a}), \quad (12)$$

где V – матрица Вандермонда

$$V := \begin{pmatrix} 1 & p_1 & \dots & p_1^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & p_N & \dots & p_N^{N-1} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

которая, в свою очередь, является матрицей Якоби перехода от ветвей к степенным суммам (6). Следовательно, для степенных сумм имеем

$$\partial_t \mathbf{P} = J \mathbf{a}, \quad \mathbf{P} := (\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_N)^T, \quad (14)$$

где J – оператор Гамильтона,

$$J := V^T \partial_x V. \quad (15)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} J_{11} &= N \partial_x, \\ J_{ij} &= (i + j - 2) \mathcal{P}_{i+j-2} \partial_x + (j - 1) \mathcal{P}_{i+j-2, x}, \quad (i, j) \neq (1, 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим, наконец, закон эволюции для потенциалов. В силу известной формулы $\partial \mathcal{S}_n(x) / \partial x_k = \mathcal{S}_{n-k}(x)$ непосредственно из (8) можно вывести, что матрица Якоби преобразования от степенных сумм к потенциалам имеет вид

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -u_1 & \dots & -u_{N-1} \\ 0 & 1 & \dots & -u_{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Поэтому имеем

$$\partial_t \mathbf{u} = J_0 \mathbf{a}, \quad \mathbf{u} := (u_1, \dots, u_N)^T, \quad (18)$$

где J_0 – матричный дифференциальный оператор,

$$J_0 := T^T J = T^T V^T \partial_x V. \quad (19)$$

Теперь задача состоит в определении выражений для $\mathbf{a}$, зависящих от k и $\mathbf{u}$ таким образом, что закон эволюции в (18) согласован с полиномиальной зависимостью коэффициентов $\mathbf{u}$ от переменной k , т.е. если $d_n := \text{degree}(u_n)$ суть степени коэффициентов u_n как полиномов от k , то должны выполняться неравенства

$$\text{degree}(J_0 \mathbf{a})_n \leq d_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

где мы принимаем во внимание обозначение для $\mathbf{u}$, введенное в (18). Мы видим, что если закон эволюции в (18) является согласованным, то вследствие уравнения (12) коэффициенты разложения по z ветвей p_i являются сохраняющимися плотностями.

Наша стратегия при нахождении согласованных деформаций заключается в том, чтобы использовать соотношения типа Ленарда

$$J_0 \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r} := (r_1, \dots, r_N)^T, \quad r_i \in \mathbb{C}((k)), \quad (20)$$

для генерации систем вида

$$\mathbf{u}_t = J_0 \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} := \mathbf{r}_+. \quad (21)$$

Здесь и далее индексы $+$ и $-$ используются для обозначения частей с неотрицательными и отрицательными степенями по k , соответственно. Дело в том, что из тождества

$$J_0 \mathbf{a} = J_0 \mathbf{r}_+ = -J_0 \mathbf{r}_-$$

ясно, что достаточным условием согласованности для систем вида (21) являются следующие условия:

$$\text{degree}(J_0)_{nm} \leq d_n + 1 \quad (22)$$

для всех n и всех m таких, что $a_{N-m+1} = (\mathbf{r}_+)_m \neq 0$.

Если потребовать выполнения условия (22) для всех $1 \leq n, m \leq N$, то мы получим достаточное условие согласованности, которое зависит лишь от кривой (1) и не имеет отношения к тому, какое частное решение соотношения Ленарда было использовано.

ПРИМЕРЫ. При $N = 2$ условия (22) сводятся к неравенству

$$d_1 \leq d_2 + 1. \quad (23)$$

Это показывает, что можно выбрать $u_2(k)$ полиномом произвольной степени, откуда следует, что для гиперэллиптических кривых произвольного рода существуют интегрируемые деформации.

При $N = 3$ условия согласованности (22) принимают вид

$$\begin{aligned} d_1 &\leq 1, & d_2 &\leq d_1 + 1, \\ d_3 &\leq d_2 + 1, & d_2 &\leq d_3 + 1, \end{aligned} \quad (24)$$

что приводит к следующим двенадцати нетривиальным способам выбора (d_1, d_2, d_3) :

$$\begin{aligned} &(0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), \\ &(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1), \\ &(1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что наши деформации позволяют иметь только тригональные кривые, чей род меньше либо равен единице. Это будет предметом отдельной публикации.

Существует естественный класс решений соотношений Ленарда (15). Действительно, из выражения (19) для J_0 очевидно, что для любого постоянного вектора $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^N$ вектор

$$\mathbf{r} := V^{-1} \mathbf{c}$$

есть решение (15). Следовательно, принимая во внимание то, что V и T суть матрицы Якоби преобразований от ветвей к степенным суммам и от степенных сумм к потенциалам, соответственно, имеем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i &:= \nabla_{\mathbf{P}} p_i = T \nabla_{\mathbf{u}} p_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ \nabla_{\mathbf{P}} p_i &:= \left(\frac{\partial p_i}{\partial \mathcal{P}_1} \dots \frac{\partial p_i}{\partial \mathcal{P}_N} \right)^T, \quad \nabla_{\mathbf{u}} p_i := \left(\frac{\partial p_i}{\partial u_1} \dots \frac{\partial p_i}{\partial u_N} \right)^T, \end{aligned} \quad (25)$$

суть решений соотношений Ленарда.

Подведем итог. Для заданной алгебраической кривой (1), удовлетворяющей условиям (22), эволюционные уравнения вида

$$\partial_t \mathbf{u} = J_0(T \nabla_{\mathbf{u}} R)_+, \quad R(z, \mathbf{p}) = \sum_i f_i(z) p_i, \quad (26)$$

где $f_i \in \mathbb{C}[z]$, определяют деформацию кривой при условии $R \in \mathbb{C}[k]$.

В заключение заметим, что рассмотренные выше нелинейные уравнения имеют очень простой вид в терминах ветвей. Действительно, из правила Крамера для нахождения столбцов V^{-1} следует, что

$$\frac{\partial p_i}{\partial \mathcal{P}_j} = \frac{|\mathbf{1p} \dots \mathbf{e}_i \dots \mathbf{p}^{N-1}|}{|\mathbf{1p} \dots \mathbf{p}^j \dots \mathbf{p}^{N-1}|}, \quad (27)$$

где $|\mathbf{1p} \dots \mathbf{p}^j \dots \mathbf{p}^{N-1}|$ — определитель матрицы V , а $|\mathbf{1p} \dots \mathbf{e}_i \dots \mathbf{p}^{N-1}|$ — определитель матрицы, получающейся из V заменой j -го столбца на вектор $(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{ij}$. Таким образом, из уравнения (12) находим

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{p} &= \partial_x (V (\nabla_{\mathbf{p}} R)_+), \\ (\nabla_{\mathbf{p}} R)_i &= \frac{|\mathbf{1p} \dots \mathbf{R}_i \dots \mathbf{p}^{N-1}|}{|\mathbf{1p} \dots \mathbf{p}^{i-1} \dots \mathbf{p}^{N-1}|}, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (28)$$

где $|\mathbf{1p} \dots \mathbf{R}_i \dots \mathbf{p}^{N-1}|$ — определитель матрицы, получающейся из V заменой i -го столбца на вектор $(\mathbf{R}_i)_j = f_j(z)$.

Сделаем ряд заключительных замечаний.

1. Если (1) есть неприводимая кривая, то условие $R \in \mathbb{C}[k]$ выполнено при $z^i \mathcal{L}_i$, где $\mathcal{L}_i$ — так называемые *резольвенты Лагранжа* [8],

$$\mathcal{L}_i = \sum_j \epsilon^{ji} p_j(z), \quad \epsilon := \exp \frac{2\pi i}{N}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (29)$$

2. Уравнения (26) могут быть записаны в более простом виде, если использовать степенные суммы. Действительно, они принимают вид

$$\partial_t \mathbf{p} = J(\nabla_{\mathbf{p}} R)_+. \quad (30)$$

Такая форма уравнений должна быть особенно удобна для анализа их гамильтоновой структуры, так как определенный формулой (15) оператор J является оператором Гамильтона.

3. Основной нерешенной задачей остается классификация деформаций алгебраических кривых (1) для потенциалов общего вида с фиксированной степенью по k . В работе [4] дано полное описание деформаций гиперэллиптических кривых ($N = 2$). Тот факт, что при $N = 3$ возникают лишь двенадцать способов выбора согласованных наборов степеней для потенциала общего вида, наводит на мысль о том, что при больших N допустимые случаи, отличные от выбора Гельфанда–Дикого ($d_1 = \dots = d_{N-1} = 0$, $d_N = 1$), должны быть весьма специальными. Этого, разумеется, следует ожидать для $N \geq 5$ в силу теоремы Абеля.

Благодарности. Работа была частично поддержана DG CYT (проект BFM2002-01607) и грантом COFIN 2002 “Sintesi”, а также грантом NSF, DMS-0404931. Л. Мартинес Алонсо благодарит сотрудников физического факультета Университета г. Лечче за теплое гостеприимство.

Список литературы

- [1] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980; *E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enol'ski, A. R. Its, V. B. Matveev.* Algebro-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations. Berlin: Springer, 1994; *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков.* УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98; *H. Flaschka, M. G. Forest, D. W. McLaughlin.* Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 739; *B. A. Dubrovin.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 145. P. 415.
- [2] *И. М. Кривевер.* Функции анализа и его приложения. 1988. Т. 22. № 3. С. 37–52; *I. M. Krichever.* Commun. Pure. Appl. Math. 1994. V. 47. P. 437.
- [3] *Y. Kodama, B. G. Konopelchenko.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. L489-L500; Deformations of plane algebraic curves and integrable systems of hydrodynamic type. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment II. Proc. Intl. Workshop (Gallipoli, Lecce, Italy, 2002). Eds. M.J. Ablowitz et al. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. P. 234.
- [4] *B. G. Konopelchenko, L. Martínez Alonso.* J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 7859.
- [5] *C. L. Siegel.* Topics in Complex Function Theory. V. I. Elliptic Functions and Uniformization Theory. N.Y.: Wiley, 1969.
- [6] *R. Y. Walker.* Algebraic Curves. Berlin: Springer, 1978.
- [7] *S. S. Abhyankar.* Algebraic Geometry for Scientists and Engineers, Mathematical Surveys and Monographs. V. 35. Providence, RI: AMS, 1990.
- [8] *Б. Л. Ван дер Варден.* Алгебра. М.: Наука, 1979.
- [9] *L. Redei.* Introduction to Algebra. V. 1. Oxford: Pergamon Press, 1967.
- [10] *I. G. Macdonald.* Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford: Clarendon Press, 1979.
- [11] *L. Schwartz.* Analyse Mathématique. V. 2. Paris: Hermann, 1967.