Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Г. Конопельченко, А. Моро, Описание распространения света в нелинейной среде Коул-Коула с помощью уравнения Бюргерса–Хопфа, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 102–109

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1836>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:35:52

© 2005 г.

Б. Г. Конопельченко*, А. Моро*

ОПИСАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ КОУЛ-КОУЛА С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА–ХОПФА

Недавно была предложена новая модель распространения света в так называемой слабо нелинейной трехмерной среде Коул-Коула с нелокальностью малого радиуса действия. Было показано, что в пределе геометрической оптики эта модель является интегрируемой и подчиняется бездисперсионному уравнению Веселова–Новикова, $(1 + 1)$ -мерная редукция которого приводит к уравнению Бюргерса–Хопфа. Свойства последнего обсуждаются в контексте нелинейной геометрической оптики. В качестве иллюстрации рассмотрен явный пример.

Ключевые слова: нелинейная оптика, интегрируемые системы.

Многочисленные современные исследования, касающиеся бездисперсионных интегрируемых систем, продемонстрировали значимость таких систем для широкого круга областей физики, таких как лапласовский рост, топологическая теория поля, нелинейная оптика [1]–[3], а также их глубокую связь с различными областями математики, в частности, с теорией асимптотических разложений, конформными и квазиконформными отображениями и исследованием интегрируемых деформаций комплексных алгебраических кривых [4].

В настоящей работе нас интересует применение теории бездисперсионных интегрируемых систем в нелинейной геометрической оптике. В частности, в работе [2] было показано, что уравнения Максвелла, описывающие распространение света в слабо нелинейной трехмерной среде Коул-Коула, интегрируемы в пределе геометрической оптики. В этом пределе система подчиняется бездисперсионной иерархии Веселова–Новикова (ВН), к которой применим квазиклассический метод $\bar{\partial}$ -одевания [3].

Основанный на симметричных ограничениях метод редукции [5] представляется эффективным способом вычисления решений бездисперсионного уравнения ВН [6].

В дальнейшем мы сконцентрируем внимание на $(1 + 1)$ -мерной редукции для случая, когда показатель преломления не зависит от одной координаты. При этом бездисперсионная иерархия ВН сводится к так называемой иерархии Бюргерса–Хопфа (БХ). Для

*Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce and INFN, Sezione di Lecce, I-73100 Lecce, Italy.
E-mail: Boris.Konopeltchenko@le.infn.it, antonio.moro@le.infn.it

простоты мы будем рассматривать первые уравнения иерархий, именуемые бездисперсионным уравнением ВН и уравнением БХ.

В этом отношении определенный интерес представляет интерпретация некоторых свойств уравнения БХ применительно к случаю нелинейной геометрической оптики. Одно из таких свойств связано с существованием опрокидывающихся волновых решений. Эти решения могут быть полезны для моделирования диэлектриков, которые содержат своего рода “примеси”, вызывающие резкие изменения показателя преломления. Действительно, можно видеть, что в так называемых точках опрокидывания кризиса световых лучей претерпевает разрыв, подобно тому, как это имеет место на границе раздела различных сред.

Начнем с уравнений Максвелла в диэлектрической среде

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \wedge \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

рассматриваемых вместе с *материальными уравнениями*

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.\tag{2}$$

Будем искать монохроматические решения вида

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_0(x, y, z)e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}_0(x, y, z)e^{-i\omega t}.\end{aligned}\tag{3}$$

Тогда уравнения (1), (2) приводят к хорошо известным уравнениям второго порядка:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{E}_0 + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E}_0 + (\nabla \ln \mu) \wedge (\nabla \wedge \mathbf{E}_0) + \nabla(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla \ln \varepsilon) &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H}_0 + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{H}_0 + (\nabla \ln \varepsilon) \wedge (\nabla \wedge \mathbf{H}_0) + \nabla(\mathbf{H}_0 \cdot \nabla \ln \mu) &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Исследуемая среда характеризуется следующими свойствами [2], [3].

1. Величины ε и μ подчиняются *закону дисперсии Коул-Коула*

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_0 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{1 + (i\omega\tau_0)^{2\nu}}, \\ \mu &= \mu_0 + \frac{\tilde{\mu}}{1 + (i\omega\tau_0)^{2\nu}},\end{aligned}\quad 0 < \nu < \frac{1}{2}.\tag{5}$$

Подчеркнем, что диапазон значений показателя степени ν играет ключевую роль при построении интегрируемого предела высоких частот.

2. Величины ε_0 и μ_0 зависят только от координат x, y и z , в то время как величины $\tilde{\varepsilon}$ и $\tilde{\mu}$ предполагаются зависимыми от координат, полей и пространственных производных от полей. Последнее обстоятельство может быть объяснено на основе механизма нелокальности малого радиуса действия с помощью интегрального материального уравнения, связывающего напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ и вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ [3].

3. В пределе высоких частот все величины демонстрируют медленную зависимость от переменной z , что формально можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \omega^{-\nu} \frac{\partial}{\partial \xi},$$

где ξ – “медленная” переменная, определяемая формулой $z = \omega^\nu \xi$. Более того, любая функция $f(x, y, z)$ может быть разложена по степеням параметра ω^ν в асимптотический ряд вида

$$f(x, y, z) = f(x, y, \xi) + \omega^{-\nu} f_1(x, y, \xi) + \omega^{-2\nu} f_2(x, y, \xi) + \dots$$

Представляя $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ как

$$\mathbf{E}_0 = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega S}, \quad \mathbf{H}_0 = \tilde{\mathbf{H}}_0 e^{i\omega S} \quad (6)$$

и используя приведенные выше предположения в одном из уравнений (4), в пределе высоких частот ($\omega \rightarrow \infty$) получаем в порядках ω^2 и $\omega^{2-2\nu}$ главные нетривиальные вклады [2], [3]

$$S_x^2 + S_y^2 = 4u, \quad (7)$$

$$S_\xi = \varphi(x, y, \xi, S_x, S_y). \quad (8)$$

Уравнение (7) – обычное уравнение эйконала в двумерном пространстве, φ – некоторая функция, $4u = \varepsilon_0 \mu_0$. Как обсуждалось в работе [3], уравнения (7) и (8) образуют переопределенную систему для фазы S . Условие совместности налагает определенные ограничения на возможный вид функции φ и допустимые показатели преломления u . При полиномиальной зависимости φ от производных фазы S первый нетривиальный случай отвечает полиному третьей степени:

$$\varphi = \frac{1}{4} S_x^3 - \frac{3}{4} S_x S_y^2 + V_1 S_x + V_2 S_y. \quad (9)$$

Условие совместности дает уравнения

$$\begin{aligned} u_\xi &= (V_1 u)_x + (V_2 u)_y, \\ V_{1x} - V_{2y} &= -3u_x, \\ V_{2x} + V_{1y} &= 3u_y, \end{aligned} \quad (10)$$

которые суть бездисперсионное уравнение ВН. В работе [6] было показано, как симметричные ограничения позволяют построить его $(1+1)$ -мерные редукции гидродинамического типа. В работе [3] был рассмотрен ряд явных решений комплексного бездисперсионного уравнения ВН.

Частный случай, при котором показатель преломления зависит только от одной координаты в xu -плоскости, также представляет физический интерес. Предположим, таким образом, что

$$u_y = 0. \quad (11)$$

Из уравнения эйконала (7) следует, что фазовая функция S должна удовлетворять условию $S_y = c$, $c = \text{const}$; тогда

$$S = cy + \tilde{S}(x, \xi), \quad (12)$$

где $\tilde{S}$ не зависит от y . Уравнение эйконала (7) принимает вид

$$\tilde{S}_x^2 = 4u - c^2, \quad (13)$$

в то же время, выбирая $V_2 = 0$, получаем

$$V_1 = -3u,$$

и бездисперсионное уравнение ВН (10) сводится к уравнению БХ

$$u_\xi + 6uu_x = 0. \quad (14)$$

Решения уравнения БХ могут быть выражены в форме соотношений годографа следующим образом [7]:

$$x - 6u\xi + \psi(u) = 0, \quad (15)$$

где ψ — произвольная функция своего аргумента. Более того, как только функция $u(x, \xi)$ найдена из уравнения (15), фазовая функция выписывается явно:

$$S = cy \pm \int \sqrt{4u - c^2} dx. \quad (16)$$

Сингулярная структура уравнения БХ связана с существованием *точки опрокидывания* ξ^* , в которой имеет место условие

$$u_x \rightarrow \infty. \quad (17)$$

В теории дифференциальных уравнений в частных производных такие решения называются *опрокидывающимися волнами*. Вычисление точки опрокидывания является учебным упражнением [7]. Например, выбирая начальное условие в виде $u(x, 0) = (1 - \text{th } x)/6$, имеем $\xi^* = 1$ (рис. 1).

Рис. 1. Типичное опрокидывающееся решение уравнения БХ. За точкой опрокидывания ($\xi > \xi^*$) функция u становится многозначной.

Рис. 2. График плотности вещественной части показателя преломления $n = n_1 + in_2$. Штриховая линия определяет границу области с ненулевой мнимой частью показателя преломления.

Отметим, что, как обсуждалось в работе [8], сингулярный сектор иерархии БХ вызывает расслоение аффинного пространства независимых переменных, которое дает начало интегрируемым деформациям гиперэллиптических кривых.

Распространение света на плоскости $\pi: \xi = \xi_0$ ($\xi_0 = \text{const}$) подчиняется обычному уравнению эйконала (7). Обозначив через Σ конгруэнцию на π перпендикулярно семейству кривых $S(x, y, \xi_0) = \lambda$, параметризованному при помощи λ , можно представить кривизну кривой $\gamma \in \Sigma$ известной формулой [9]

$$\kappa = \frac{1}{2u} \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u, \quad (18)$$

где $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$, а $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ — единичная главная нормаль к γ на плоскости π . Заметим теперь, что кривая γ локально совпадает с проекцией светового луча на плоскость π .

В силу условия (11) формула (18) принимает вид

$$\kappa = \frac{\nu_1}{2u} u_x. \quad (19)$$

Далее, на основании того, что величина u_x претерпевает разрыв, мы заключаем, что кривизна светового луча также претерпевает разрыв. Это типичное поведение световых лучей на границе раздела различных сред. Решения такого рода могут быть полезны для описания ситуаций, в которых световые лучи распространяются в неоднородной

Рис. 3. а) Трехмерный график мнимой части показателя преломления. б) Трехмерный график мнимой части фазы S . Мнимая часть обращается в нуль везде, за исключением области поглощения.

среде, встречая в определенных точках на своем пути те или иные примеси. Эти примеси, оптические свойства которых радикально отличаются от свойств остальной среды, могут обуславливать резкое изменение направления распространения.

Как хорошо известно из электродинамики, комплексные показатели преломления тоже имеют физический смысл, поскольку могут быть использованы для описания эффектов поглощения излучения. В нашем конкретном случае комплексные значения показате-

Рис. 4. Конфигурация волновых фронтов на плоскости (x, ξ) .

теля преломления n соответствуют сильному затуханию электромагнитных волн. Этот факт мы продемонстрируем на следующем явном примере.

Рассмотрим решение, получающееся из соотношения годографа (15), если положить в нем $\psi(u) = u^2$. Явно выражая u из (15) и подставляя в выражение (16), получаем

$$u = \frac{1}{2}(-6\xi + \sqrt{36\xi^2 - 4x}), \quad (20)$$

$$S = \frac{4}{15}\sqrt{2}\sqrt{-6\xi + \sqrt{36\xi^2 - 4x}}(6\xi(-6\xi + \sqrt{36\xi^2 - 4x}) + 12x). \quad (21)$$

Заметим, что показатель преломления $n = 2\sqrt{u}$ (мы не рассматриваем отрицательные показатели преломления) не является вещественным во всей $x\xi$ -плоскости. В тех областях, где коэффициент преломления принимает комплексные значения, фазовая функция S также становится комплекснозначной. Таким образом, полагая $S = S_1 + iS_2$, мы видим, что если $S_2 > 0$, то электрическое поле приобретает экспоненциально затухающий множитель

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\omega S_2} e^{i\omega S_1}. \quad (22)$$

В этих областях имеют место сильные эффекты поглощения.

На рис. 2 представлена зависимость вещественной части показателя преломления $n = 2\sqrt{u}$ от координаты x .

На рис. 3а приведен трехмерный график зависимости мнимой части показателя преломления от x, t . Там, где показатель преломления комплексный, мнимая часть фазы S также отлична от нуля, что указывает на сильное поглощение (см. рис. 3б).

На рис. 4 представлена конфигурация волновых фронтов на $x\xi$ -плоскости. Затененная область представляет область поглощения. При $\xi \rightarrow -\infty$ мы имеем почти плоский

волновой фронт. По направлению к области поглощения волновые фронты деформируются, следуя линиям уровня показателя преломления. В непосредственной близости от области поглощения волновые фронты отклоняются почти под прямым углом.

Благодарности. Работа частично поддержана COFIN PRIN “SINTESI” 2002

Список литературы

- [1] *I. K. Kostov, I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. V. Zabrodin.* The τ -function for analytic curves. In: Random Matrix Models and Their Applications. Math. Sci. Res. Inst. Publ. V. 40. Eds. P. Bleher, A. Its. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001. P. 285–299; *M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. V. Zabrodin.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 22. P. 5106–5109; *P. B. Wiegmann, A. V. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 213. P. 523–538; *I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. V. Zabrodin.* Physica D. 2004. V. 198. P. 1–28; nlin.SI/0311005; Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 415–429; Commun. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 437–475; *B. A. Dubrovin.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 145. P. 195–207; Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627–689.
- [2] *B. G. Konopelchenko, A. Moro.* J. Phys. A. 2004. V. 37. P. L105–L111.
- [3] *B. G. Konopelchenko, A. Moro.* Stud. Appl. Math. 2004. V. 113. P. 325–352; nlin.SI/0403051.
- [4] *P. D. Lax, C. D. Levermore.* Commun. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 253–290; P. 571–593; P. 809–830; *B. G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso.* Phys. Lett. A. 2001. V. 286. P. 161–166; *B. G. Konopelchenko, L. Martinez Alonso.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. № 7. P. 3807–3823; J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 7859–7877; nlin.SI/0403052.
- [5] *L. Bogdanov, B. G. Konopelchenko.* Phys. Lett. A. 2004. V. 330. P. 448–459; nlin.SI/0312013.SI.
- [6] *Л. В. Богданов, Б. Г. Конопельченко, А. Моро.* Фунд. прикл. матем. 2004. Т. 10. С. 5–15; nlin.SI/0406023.
- [7] *Дж. Уизем.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [8] *Y. Kodama, B. G. Konopelchenko.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. L489–L500.
- [9] *M. Born, E. Wolf.* Principles of Optics. Oxford: Pergamon Press, 1980.