Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Кунду, Квантовые интегрируемые многоатомные модели, описывающие взаимодействие излучения с веществом с учетом и без учета приближения вращающейся волны, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 110–121

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1837>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 18:15:35

© 2005 г.

А. Кунду*

КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МНОГОАТОМНЫЕ МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ С УЧЕТОМ И БЕЗ УЧЕТА ПРИБЛИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЫ

Построены и с помощью алгебраического бете-анзаца точно решены новые интегрируемые многоатомные модели, описывающие взаимодействие излучения с веществом с учетом и без учета приближения вращающейся волны (ПВВ). Модели, в которых учитывается ПВВ, строятся единообразным способом с помощью подхода, основанного на первичной модели (ancestor model). В случае рациональной R -матрицы получаются модели стандартного типа, описывающие взаимодействие излучения с веществом, в то время как случай тригонометрической R -матрицы соответствует их q -деформациям. Модели без учета ПВВ получаются для эллиптической R -матрицы в пределе модели Годена и большого спина.

Ключевые слова: интегрируемые многоатомные модели, приближение вращающейся волны, взаимодействие излучения с веществом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интересно отметить, что все реальные системы, такие как системы в квантовой оптике, индуцированные резонансным взаимодействием между атомом и квантованным лазерным полем, системы в резонаторной КЭД как в области СВЧ, так и в оптической области [1], [2], системы, состоящие из захваченного иона, взаимодействующего со своим движением центра масс и облучаемого лазерным пучком [3], [4], и т.п., содержащие сложные взаимодействия излучения с веществом (ИВ), можно успешно описывать с помощью простых моделей, таких как модели Джейнса–Каммингса (ДжК) [5] и Бака–Сукумары (БС) [6]. Многие теоретические предсказания, сделанные на основании этих моделей, такие как вакуумное расщепление Раби, осцилляция Раби и ее квантовый коллапс и возрождение и т.д., были проверены в ходе экспериментов с мазерами и лазерами.

Квантованное поле излучения в таких простейших ИВ-моделях берется в виде одной бозонной моды: $h = be^{-i\omega_f t} + b^\dagger e^{i\omega_f t}$, в то время как атом рассматривается как

*Saha Institute of Nuclear Physics, Theory Group, 1/AF Bidhan Nagar, Calcutta 700 064, India.
E-mail: anjan@tnp.saha.ernet.in

двухуровневая спиновая система с вектором поляризации $S = \sigma^- e^{-i\omega_a t} + \sigma^+ e^{i\omega_a t}$. Поэтому взаимодействие $(h \cdot S)$ содержит, вообще говоря, как быстро (с частотой $\omega_f + \omega_a$), так и медленно (с частотой $|\omega_f - \omega_a|$) осциллирующие компоненты. Однако быстро осциллирующей частью, как правило, пренебрегают, рассматривая аппроксимацию $|\omega_f - \omega_a| \ll \omega_f$, которая соответствует приближению вращающейся волны (ПВВ) и делает эту модель решаемой. Добавление членов, соответствующих свободному полю и атомному возбуждению, приводит к хорошо известной модели ДжК:

$$H_{\text{ДжК}} = \omega_f b^\dagger b + \omega_a \sigma^z + \alpha (b^\dagger \sigma^- + b \sigma^+). \quad (1)$$

Однако этого приближения, которое применимо только вблизи точки резонанса $\omega_f \approx \omega_a$, следует избегать в общем случае [7], когда должны появляться дополнительные члены, связанные с противоположно вращающейся волной (ПрВВ):

$$H_{\text{ПрВВ}} = \beta (b^\dagger \sigma^+ + b \sigma^-). \quad (2)$$

Далее, для более точного описания физических ситуаций необходимо найти обобщения исходных моделей, т.е. рассмотреть их q -деформации [8], [9], ввести высшие нелинейности [4], [10], учесть многоатомность [2], [10], [11], рассмотреть межатомные взаимодействия и т.д. Однако если точные решения для моделей ДжК и БС, а также для их простых многоатомных расширений известны [12]–[14], то это, по-видимому, уже не так для большинства упомянутых выше обобщений. Точнее, интегрируемые модели как без учета ПВВ, так и с явным учетом межатомных взаимодействий не известны для большинства ИВ-моделей, если не считать нескольких недавних попыток таких построений в [15], [16]. Более того, хотя q -деформация, связанная с введением в систему анизотропии и специфической нелинейности, рассматривалась ранее для нескольких моделей [8], [9], их многоатомные и интегрируемые варианты неизвестны. Поэтому нахождение схемы построения интегрируемых ИВ-моделей, имеющих упомянутые выше желаемые свойства, действительно представляет собой сложную задачу.

2. ОСНОВНЫЕ ЦЕЛИ И СТРАТЕГИЯ НАШЕГО ПОСТРОЕНИЯ

Чтобы разрешить эту проблему, мы предлагаем в данной работе новые классы интегрируемых ИВ-моделей с учетом и без учета ПВВ, которые являются точно решаемыми с помощью анзаца Бете. На основе собранных знаний [17] о решении квантового уравнения Янга–Бакстера (КУЯБ) в работе [18] была предложена единая конструкция интегрируемых моделей, связанная с лежащими в их основе алгебраическими структурами. Применяя подход, основанный на первичном операторе Лакса, мы предлагаем общую интегрируемую систему, различные редукции которой могут порождать ряд интегрируемых ИВ-моделей с явным учетом межатомных взаимодействий. Этот подход охватывает новые многоатомные обобщения моделей ДжК, БС и модели захваченного иона (ЗИ), а также их интегрируемые q -деформации с использованием квантовой группы. Более того, поскольку построение наших моделей основано на алгебре Янга–Бакстера (ЯБ) общего вида, мы можем также решить их единообразным способом с помощью бете-анзаца. Результаты, касающиеся наших моделей, учитывающих ПВВ, были недавно

опубликованы в работе [19], и мы намереваемся дать здесь краткий обзор, а затем представить новые результаты, полученные для моделей без учета ПВВ.

Наша стратегия при построении моделей с учетом ПВВ заключается в том, чтобы начать с комбинации бозонного оператора Лакса $L^s(\lambda)$, описывающего излучение или осциллирующую моду, и N_a спиновых операторов Лакса $L_j^S(\lambda)$, соответствующих системе многих атомов. По построению глобальный оператор монодромии должен удовлетворять КУЯБ

$$R(\lambda - \mu)T(\lambda) \otimes T(\mu) = (I \otimes T(\mu))(T(\lambda) \otimes I)R(\lambda - \mu),$$

что приводит к условию интегрируемости $[\tau(\lambda), \tau(\mu)] = 0$ и к набору взаимно коммутирующих сохраняющихся операторов $[C_a, C_b] = 0$, получаемых из разложения $\tau(\lambda) = \text{tr } T(\lambda) = \sum_a C_a \lambda^a$ [20]. Для построения бозонного оператора Лакса мы начнем с оператора Лакса общего вида [18], связанного с квадратичной алгеброй или ее квантовой деформацией и порождающего через различные бозонные реализации $L^s(\lambda)$ различные интегрируемые системы. ИВ-модели стандартного типа, которые мы строим, связаны с алгебрами типа алгебр Ли, однако квадратичными, а также с рациональной R -матрицей спиновой XX -цепочки [20], в то время как их q -деформации связаны с квантовой квадратичной алгеброй и тригонометрической R -матрицей XXZ -цепочки [21].

Однако при построении интегрируемых ИВ-моделей без учета ПВВ описанный выше подход не работает из-за трудности бозонизации алгебры Складина. Поэтому для таких моделей, которые связаны с эллиптической R -матрицей спиновой XXZ -цепочки, нам придется изменить стратегию и перейти к пределу модели Годена, а также к пределу больших спинов.

3. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИВ-МОДЕЛИ С УЧЕТОМ ПВВ

Вначале сосредоточимся на стандартных ИВ-моделях и напомним, что в рациональном случае первичный (2×2) -оператор Лакса имеет вид [18]

$$L^s(\lambda) = \begin{pmatrix} c_1^0(\lambda + s^3) + c_1^1 & s^- \\ s^+ & c_2^0(\lambda - s^3) - c_2^1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

при этом операторы s удовлетворяют квадратичной алгебре

$$[s^+, s^-] = 2m^+s^3 + m^-, \quad [s^3, s^\pm] = \pm s^\pm, \quad [m^\pm, \cdot] = 0, \quad (4)$$

где центральные элементы $m^\pm$ выражаются через элементы, входящие в (3): $m^+ = c_1^0 c_2^0$, $m^- = c_1^1 c_2^0 + c_1^0 c_2^1$. Заметим, что алгебра (4) определяется самим КУЯБ, решение которого определяет рациональную R -матрицу. Элементы $m^\pm$, c_i^a могут иметь тривиальные собственные значения и в общем случае не могут быть устранены простым преобразованием алгебры к $sl(2)$. На самом деле определенные способы выбора этих

элементов в случае общего положения ограничивают уравнение (4) до различных известных алгебр, таких как его подалгебры, без возникновения какого бы то ни было сингулярного предела. Например, можно получить

$$\mathbf{s} = \mathbf{S} \in su(2) \text{ при } m^+ = 1, \quad m^- = 0, \quad (5a)$$

$$\mathbf{s} \in su(1, 1) \text{ при } m^+ = -1, \quad m^- = 0, \quad (5б)$$

$$\mathbf{s} \rightarrow (b, b^\dagger) \text{ (бозоны) при } m^+ = 0, \quad m^- = -1, \quad (5в)$$

$$\mathbf{s} \rightarrow (x, p) \text{ (канонические переменные) при } m^+ = m^- = 0, \quad (5г)$$

и в соответствующих случаях из (3) получаются соответствующие операторы Лакса. В случае (5а), выбирая $c_a^0 = 1$ и $c_1^1 = -c_2^1 = c_j$, мы находим из (3) хорошо известный спиновый оператор Лакса $L_j^S(\lambda)$, $j \in [1, N_a]$, описывающий N_a атомов с параметрами неоднородности c_j , в то время как другие случаи могут приводить к различным типам бозонных операторов Лакса, связанных с излучательной модой.

Комбинируя спиновый и бозонные операторы Лакса:

$$T(\lambda) = L^s(\lambda) \prod_j^{N_a} L_j^S(\lambda),$$

мы можем теперь с помощью описанной выше стандартной процедуры построить набор коммутирующих сохраняющихся операторов. Самый простой из них имеет вид

$$C_{N_a} = s^3 + \sum_j^{N_a} S_j^z,$$

а старшие учитывают все более старшие многочастичные взаимодействия. Следующий сохраняющийся оператор в наборе αC_{N_a-1} , где α — произвольная константа взаимодействия, можно определить как гамильтониан нашей обобщенной ИВ-системы:

$$\begin{aligned} H_{\text{ИВ}} &= H_d + H_{Ss} + H_{SS}, \\ H_d &= \omega_f s^3 + \sum_j^{N_a} \omega_{aj} S_j^z, \\ H_{Ss} &= \alpha \sum_j^{N_a} (s^+ S_j^- + s^- S_j^+ + (c_1^0 + c_2^0) s^3 S_j^z), \\ H_{SS} &= \alpha \sum_{i < j} ((c_1^0 + c_2^0) S_i^z S_j^z + c_1^0 S_i^- S_j^+ + c_2^0 S_i^+ S_j^-). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь H_{Ss} описывает ИВ-взаимодействие, а H_{SS} — взаимодействие вещества с веществом; $\mathbf{S}_j$, $j = 1, 2, \dots, N_a$, соответствуют набору N_a атомов, каждый из которых имеет $2s + 1$ уровней, и удовлетворяют $su(2)$ -алгебре. С другой стороны, $\mathbf{s}$ обозначает излучательную или колебательную моду и удовлетворяет более общей алгебре (4). В уравнениях (6) частота излучения ω_f и атомные частоты ω_{aj} , $j = 1, 2, \dots, N_a$, определяются параметрами неоднородности оператора Лакса как

$$\omega_f = \sum_j w_j, \quad w_j = \alpha(c_1^0 - c_2^0)c_j, \quad \omega_{aj} = \omega_f - w_j + \alpha(c_1^1 + c_2^1). \quad (7)$$

Заметим, что эрмитовость этого интегрируемого гамильтониана существенно зависит от выбора входящих в него произвольных параметров.

Замечательно, что общая модель (6) единообразным способом приводит к новой серии интегрируемых многоатомных моделей БС, ДжК и ЗИ в частных случаях (5б), (5в) и (5г). Например, в случае (5б), выбирая $c_1^0 = -c_2^0 = 1$, $c_1^1 = c_2^1 \equiv c$, получаем уравнение

$$H_{bs} = \omega_f s^3 + \sum_j^{N_a} (\omega_{aj} S_j^z + \alpha(s^+ S_j^- + s^- S_j^+)) + \alpha \sum_{i < j}^{N_a} (S_i^- S_j^+ - S_i^+ S_j^-), \quad (8)$$

которое в случае бозонной реализации $su(1, 1)$ вида $s^+ = \sqrt{N}b^\dagger$, $s^- = b\sqrt{N}$, $s^3 = N + 1/2$ и со спиновым оператором s , выбранным в виде $\vec{S} = (1/2) \sum_k^{2s} \vec{\sigma}_k$, представляет собой новую *интегрируемую многоатомную ИВ-модель* с межатомными взаимодействиями и невырожденными атомными частотами. Заметим, что, как показывают наши вычисления для этой интегрируемой модели [19], хотя явный вид той части гамильтониана, которая отвечает за межатомные взаимодействия, оказывается здесь неэрмитовым, собственные значения энергии могут быть вещественными или комплексно-сопряженными в зависимости от интервала входящих в уравнение частотных параметров. При $N_a = 1$, когда взаимодействие вещества с веществом исчезает, естественным образом воспроизводится известная модель [14].

Аналогично можно рассмотреть случай (5в), выбрав $c_1^0 = \alpha$, $c_2^0 = 0$, $c_1^1 \equiv c$, $c_2^1 = -\alpha^{-1}$. Это дает возможность непосредственно получить из алгебры бозонную реализацию $s^- = b$, $s^+ = b^\dagger$, $s^3 = b^\dagger b$, а из тех же уравнений (3) и (6) – *интегрируемую многоатомную модель ДжК*, учитывающую взаимодействие вещества с веществом. Явный вид гамильтониана легко можно вывести из общей модели (6), подставляя в нее приведенные значения параметров и бозонные операторы.

Теперь можно рассмотреть случай (5г), фиксируя значения параметров в виде $c_1^0 = -1$, $c_1^1 \equiv c$, $c_2^0 = c_2^1 = 0$, и построить самосогласованную реализацию с использованием канонических переменных вида $s^\pm = e^{\mp ix}$, $s^3 = p + x$. В результате из уравнений (6) получается новая *интегрируемая многоатомная модель ЗИ*

$$H_{ЗИ} = (\omega_a - \omega_f) S^z + S^{z2} + \alpha(e^{-ix} S^+ + e^{ix} S^-) + H_{xp}, \quad (9)$$

где $H_{xp} = (1/2)(p^2 + x^2) + xp$, $\vec{S} = (1/2) \sum_k \vec{\sigma}_k$. Здесь мы привели только случай $N_a = 1$, который уже демонстрирует наличие полной экспоненциальной нелинейности без обычной линейной аппроксимации. Однако хотя такие модели и являются интегрируемыми, их трудно решать с помощью стандартного анзаца Бете из-за отсутствия псевдовакуума (как в цепочке Тоды).

При построении *интегрируемых q -деформированных ИВ-моделей* используется такая же стратегия; только здесь следует начинать с тригонометрической R -матрицы и связанного с ней оператора Лакса первичной модели, содержащего обобщенные q -деформированные операторы, удовлетворяющие алгебре [18]

$$[s_q^3, s_q^\pm] = \pm s_q^\pm, \quad [s_q^+, s_q^-] = \frac{1}{2 \sin \alpha} (M^+ \sin(2\alpha s_q^3) - i M^- \cos(2\alpha s_q^3)), \quad (10)$$

где $q = e^{i\alpha}$ и $M^\pm$ – центральные элементы. Поэтому с помощью таких же построений можно вывести нашу общую q -деформированную интегрируемую систему с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H_{q\text{ИВ}} &= H_d + (s_q^+ S_q^- + s_q^- S_q^+) \sin \alpha, \\ H_d &= -ic_0 \cos(\alpha X) + c \sin(\alpha X), \quad X = (s_q^3 - S_q^3 + \omega), \end{aligned} \quad (11)$$

которая представляет собой новый класс ИВ-моделей, в которых S_q принадлежат квантовой группе $su_q(2)$, а s_q принадлежат более общей квантовой алгебре (10). Здесь мы для простоты пренебрегли явными межатомными взаимодействиями.

Заметим, что квадратичная алгебра (10) также следует из КУЯБ для случая тригонометрической R -матрицы, и аналогично рациональному случаю можно получить различные “подалгебры” алгебры (10) как q -деформации модели (5):

$$s_q = S_q \in su_q(2), \quad (5'a)$$

$$s_q \in su_q(1, 1), \quad (5'b)$$

$$s_q \rightarrow (b_q, b_q^\dagger) \quad (q\text{-бозоны}), \quad (5'в)$$

$$s_q \rightarrow (x, p) \quad (\text{канонические переменные}). \quad (5'г)$$

Аналогичным образом мы можем порождать интегрируемые q -деформации построенных выше моделей. Например, случай (5'б) при $s_q \in su_q(1, 1)$ допускает реализацию с помощью q -осциллятора [9]: $s_q^+ = \sqrt{[N]_q} b_q^\dagger$, $s_q^- = b_q \sqrt{[N]_q}$, $s_q^3 = N + 1/2$. Используя эти результаты, а также оператор квантового спина S_q , представленный на $2s = N_a$ атомах с помощью своего копроизведения [21],

$$S_q^\pm = \sum_j^{2s} q^{-\sum_{k<j} \sigma_k^z} \sigma_j^\pm q^{\sum_{l>j} \sigma_l^z}, \quad S^z = \sum_j^{2s} \sigma_j^z,$$

можно получить из (11) *интегрируемую q -деформированную многоатомную модель БС*. При $s = 1/2$, т.е. в случае одиночного атома, получаем интегрируемую версию описанной ранее модели [9].

Аналогичным образом в случае (5'в), положив $s_q^+ = b_q^\dagger$, $s_q^- = b_q$, $s_q^3 = N$, можно построить новую *интегрируемую q -деформацию модели ДжК*, а в случае (5'г) реализация через канонические операторы, как и ранее, дает в результате *интегрируемую q -деформированную модель ЗИ*.

Мы снова подчеркиваем, что все предложенные нами интегрируемые ИВ-модели, аналогичные по своему единообразному построению, допускают точные решения методом бете-анзаца также единообразным путем. Более подробную информацию об описанных выше моделях и их точных решениях можно найти в работе [19].

4. ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ИВ-МОДЕЛИ БЕЗ УЧЕТА ПВВ

Основная идея, используемая при построении интегрируемых моделей, описывающих ИВ-взаимодействие с учетом ПВВ, заключается, как мы объясняли выше, в том, чтобы сначала представить часть, соответствующую веществу, спиновой XXX - или XXZ -цепочкой с произвольными спинами, а затем для построения части, относящейся

к излучению, заменить один из спиновых операторов на различные разрешенные бозонные реализации. Первый случай относится к рациональному классу, когда спины удовлетворяют алгебре типа алгебры Ли, тогда как второй случай сводится к тригонометрическому, когда операторы высших спинов удовлетворяют квантовой алгебре. К счастью, обе эти алгебры допускают бозонные реализации, позволяющие получить требуемую излучательную моду.

Кажется, что при построении более общих интегрируемых моделей с дополнительными ПрВВ-членами (такими как (2) и его многоатомные обобщения) можно было бы применить ту же самую идею, но только для спиновой XYZ -цепочки. Однако в этом анизотропном случае, соответствующем эллиптической R -матрице, операторы высших спинов удовлетворяют алгебре Складина [22], для которой, к сожалению, бозонная реализация неизвестна. В поисках выхода из такой ситуации можно заметить, что алгебра Складина удачным образом снова редуцируется к обычной $su(2)$ -алгебре в эллиптическом пределе Годена [23], допускающем необходимую бозонную реализацию. Однако прямая бозонная реализация одного спинного оператора в моделях Годена снова невозможна, поскольку в результате получаются или неинтегрируемые, или нефизические модели. Ситуацию в конце концов спасает дальнейший переход к пределу $s \rightarrow \infty$ для бозонной моды, который приводит к желаемой интегрируемой многоатомной модели типа модели ДжК с нетривиальными ПрВВ-членами [24]. Следует заметить, что аналогичный предел больших спинов был недавно использован при построении интегрируемой многоатомной ДжК-модели, но учитывающей ПВВ [16].

4.1. Эллиптическая модель Годена. Поскольку первым шагом в нашем построении является эллиптическая модель Годена (ЭМГ), мы дадим краткий обзор связанных с ней результатов, полученных в работе [23]. ЭМГ возникает из неоднородной спиновой XYZ -модели в пределе $\alpha \rightarrow 0$, где $q = e^{i\alpha}$, и поэтому все соответствующие объекты, такие как оператор Лакса, R -матрица, сохраняющиеся величины, а также важные формулы, используемые в методе Бете-анзаца, как то: собственные функции, собственные значения и уравнения Бете, и т.д. можно непосредственно вывести из соответствующих величин XYZ -модели [25] при переходе к тому же пределу. Оператор Лакса с параметрами неоднородности z_n и r -матрицу в ЭМГ можно выразить через эллиптические функции таким образом [23]:

$$L_n(\lambda) = \sum_{a=1}^3 w_a(\lambda - z_n) S_n^a \otimes \sigma^a, \quad r(\lambda) = \sum_{a=1}^3 w_a(\lambda) \sigma^a \otimes \sigma^a, \quad n = 0, 1, \dots, N_a, \quad (12)$$

где

$$w_1(\lambda) = \frac{\text{cn}(\lambda)}{\text{sn}(\lambda)}, \quad w_2(\lambda) = \frac{\text{dn}(\lambda)}{\text{sn}(\lambda)}, \quad w_3(\lambda) = \frac{1}{\text{sn}(\lambda)}.$$

Операторы (12) удовлетворяют квазиклассическому УЯБ:

$$[L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu)] = [r(\lambda - \mu), (L_n(\lambda) \otimes I + I \otimes L_n(\mu))],$$

полученному из КУЯБ в пределе $\alpha \rightarrow 0$. Взаимно коммутирующие сохраняющиеся величины H_n в ЭМГ находятся путем разложения коэффициентов XYZ -трансфер-матрицы

$$\tau_{xyz}(\lambda, \alpha) = I + \alpha^2 \tau^{(2)}(\lambda) + O(\alpha^3) \quad (13)$$

следующим образом:

$$\tau^{(2)}(\lambda \rightarrow z_n) = H_n = \sum_{a, m \neq n} w_a(z_n - z_m) S_n^a S_m^a, \quad (14)$$

где $\sum_n H_n = 0$.

Для наших целей важно заметить, что операторы высших спинов S_n^a , появляющиеся в модели Годена (12), редуцированы из генераторов алгебры Складина просто к операторам

$$[S_n^+, S_m^-] = 2\rho\delta_{nm}S_n^3, \quad [S_n^3, S_m^\pm] = \pm\delta_{nm}S_n^\pm, \quad (15)$$

где $\rho = \pm$ соответствует $su(2)$ (или $su(1, 1)$). Напомним, что при построении стандартных ИВ-моделей с учетом ПВВ мы использовали спинорные операторы для N_a атомов в качестве генераторов алгебры $su(2)$, тогда как для поля излучения мы рассматривали бозонные реализации различных алгебраических структур в (5). Для ЭМГ (12), однако, кроме $su(2)$, единственной другой возможной алгеброй в соответствии с (15) является алгебра $su(1, 1)$. И даже этот факт мы не можем использовать, поскольку различные алгебры не могут быть смешаны в интегрируемой модели Годена. С другой стороны, если мы выберем алгебру $su(2)$ для всех операторов и воспользуемся преобразованием Холстейна–Примакова (ПХП) $S_0^+ = b^\dagger \sqrt{s_0 - N}$, $S_0^- = \sqrt{s_0 - N}b$, $S_0^3 = N - s_0/2$, $N = b^\dagger b$ для бозонизации моды излучения, то хотя мы и сохраним интегрируемость, но при $N > s_0/2$ получим нефизический гамильтониан, а $S_0^\pm$ станет неэрмитовым!

4.2. Предел большого спина. К счастью, описанные выше трудности можно снова преодолеть, если далее рассматривать предел большого спина $s_0 \rightarrow \infty$ для поля излучения, который редуцирует ПХП к виду

$$S_0^+ = \frac{1}{\epsilon}b^\dagger, \quad S_0^- = \frac{1}{\epsilon}b, \quad S_0^3 = -\frac{1}{2\epsilon^2}, \quad \epsilon = \frac{1}{\sqrt{s_0}} \rightarrow 0, \quad (16)$$

где сохранены члены до порядка $O(1/\epsilon)$.

Теперь для вывода интегрируемых моделей, описывающих ИВ-взаимодействие без учета ПВВ, мы заменим спинорные операторы при $n = 0$ бозонами для излучательной моды в уравнении (14), используя соотношения (16), и выберем произвольные параметры при $n = 0, j$ в виде

$$z_0 = K + \epsilon x_0, \quad z_j = \epsilon x_j, \quad j = 1, \dots, N_a, \quad (17)$$

где K – эллиптический интеграл [25], связанный с периодом эллиптических функций. Такой скейлинг параметра необходим для вывода набора сохраняющихся взаимно коммутирующих операторов. Мы также используем симметрию алгебры $su(2)$, чтобы для удобства следующим образом переопределить постоянные взаимодействия в уравнении (14): $w_1(z_j - z_k) \leftrightarrow w_3(z_j - z_k)$, $w_2(z_j - z_k) = -w_2(z_j - z_k)$ и аналогично для $w_a(z_0 - z_k)$. Таким образом, в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ с использованием таких свойств, как $w_\pm(z_0 -$

$z_k) = -w_{\pm}(z_k - z_0)$, и свойств эллиптических функций [25] переопределенные константы взаимодействия в требуемом порядке редуцируются к виду

$$w_1(0j) \rightarrow 1, \quad w_2(0j) \rightarrow k', \quad w_3(0j) \rightarrow 0, \quad w_a(jk) \rightarrow \frac{1}{\epsilon(x_j - x_k)}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (18)$$

с эллиптическим модулем $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Это окончательно редуцирует эллиптический гамильтониан Годена в главном порядке к интегрируемой модели, описывающей ИВ-взаимодействие, с взаимно коммутирующими гамильтонианами $[H_j, H_k] = 0$, где

$$H_j = \omega_a S_j^3 + H_j^{(bS)} + H_j^{(SS)}, \quad j = 1, \dots, N_a. \quad (19)$$

Здесь

$$H_j^{(bS)} = \Omega_+(bS_j^+ + b^\dagger S_j^-) + \Omega_-(b^\dagger S_j^+ + bS_j^-), \quad \Omega_{\pm} = 1 \pm k', \quad (20)$$

описывает ИВ-взаимодействие с явным учетом ПрВВ-членов, а

$$H_j^{(SS)} = \sum_{k \neq j}^{N_a} \frac{1}{x_j - x_k} (S_j^+ S_k^- + S_j^- S_k^+ + S_j^3 S_k^3) \quad (21)$$

отвечает за межатомные взаимодействия с неоднородными постоянными взаимодействия, которые выражаются через x_j . Эти произвольные параметры можно таким образом согласовать, чтобы напряженности, возникающие при взаимодействиях, уменьшались при возрастании расстояния между атомами. Заметим, что соотношение (21) является эрмитовым и интересным образом не содержит взаимодействий XYZ -типа, которые позволяют добавлять к гамильтониану (19) член с атомной инверсией с произвольной частотой ω_a . Нетрудно видеть, что константа взаимодействия Ω_- обращается в нуль при $k = 0$, воспроизводя тем самым предыдущий результат, полученный в ПВВ [16].

Различные комбинации гамильтонианов (19) с произвольными константами взаимодействия могут приводить к различным *интегрируемым многоатомным моделям, описывающим ИВ-взаимодействие, без учета ПВВ*. Например, если просто взять

$$H_0 = \sum_j H_j = \sum_j^{N_a} (\omega_a S_j^3 + \Omega_+(bS_j^+ + b^\dagger S_j^-) + \Omega_-(b^\dagger S_j^+ + bS_j^-)), \quad (22)$$

то, поскольку $\sum_j H_j^{(SS)} = 0$, мы приходим к *интегрируемой модели типа модели Тависа-Каммингса с нетривиальными ПрВВ-членами*. Такие модели обычно считаются нерешаемыми без дальнейших аппроксимаций [7]. Однако ниже мы покажем, что они являются точно решаемыми с помощью бете-анзаца. Для того чтобы сделать модель более физической, мы должны добавить полевой член $\omega_f b^\dagger b$ в гамильтониан (22). Полагая частоту поля ω_f малой по сравнению с ω_a , можно рассматривать этот дополнительный член как пертурбативный относительно исходной решаемой интегрируемой бете-модели. Интересно заметить, что особенно в этом пределе малой частоты поля ПВВ становится плохой аппроксимацией и ПрВВ-члены, которые мы рассматривали, оказываются более важными. Более подробное описание построения наших ИВ-моделей без учета ПВВ представлено в работе [24].

5. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ МЕТОДОМ БЕТЕ-АНЗАЦА

В основном методе алгебраического бете-анзаца (АБА) след матрицы монодромии $\tau(\lambda) = \text{tr } T(\lambda)$ порождает сохраняющиеся операторы, тогда как внедиагональные элементы $T_{21}(\lambda) \equiv B(\lambda)$ и $T_{12}(\lambda) \equiv C(\lambda)$ действуют как операторы рождения и уничтожения псевдочастиц с M -частичным состоянием, задаваемым как $|M\rangle_B = B(\lambda_1) \dots B(\lambda_M)|0\rangle$, и с псевдовакуумом $|0\rangle$, определяемым как $C(\lambda)|0\rangle = 0$. Основная цель АБА [20] состоит в том, чтобы найти решение для собственного значения: $\tau(\lambda)|M\rangle_B = \Lambda(\lambda, \{\lambda_a\})|M\rangle_B$.

Все наши модели, учитывающие ПВВ, построенные единообразным способом с помощью схемы, соответствующей первичной модели, могут быть также единообразно решены на основе метода АБА в его стандартной формулировке [20]. Опуская детали [19], сосредоточимся на АБА-решении наших интегрируемых моделей без учета ПВВ (19)–(22). При выводе АБА-соотношений для этих моделей следует повторить шаги, сделанные при получении выражений для их гамильтонианов. То есть мы должны начать с АБА-соотношений для спиновой XYZ -цепочки произвольных спинов, где для определения модифицированного псевдовакуума [25], [26] следует использовать калибровочно преобразованные операторы и состояния. Если тщательно рассмотреть предел $\alpha \rightarrow 0$, то можно получить соответствующие АБА-соотношения для ЭМГ [23]. Если в этих соотношениях взять предел больших спинов для излучательной моды, то мы в конце концов найдем собственные значения и уравнения Бете для наших интегрируемых моделей без учета ПВВ.

Начнем поэтому с ЭМГ и, используя ключевые АБА-соотношения из [23], получим энергетический спектр в виде

$$E_n^{\text{ЭМГ}} = 2s_n \theta'_{11}(0) \left(i\pi\nu + \sum_{b=1}^M \frac{\theta'_{11}(z_n - \lambda_b)}{\theta_{11}(z_n - \lambda_b)} + \sum_{m \neq n}^M s_m \frac{\theta'_{11}(z_n - z_m)}{\theta_{11}(z_n - z_m)} \right) \quad (23)$$

с произвольными значениями спина s_n операторов в n -м узле и с эллиптической функцией θ_{11} ; здесь число возбуждений $M = \sum_n s_n$ больше не является произвольным. Можно найти соответствующие уравнения Бете [23] в виде

$$\sum_{n=1}^N s_n \frac{\theta'_{11}(\lambda_a - z_n)}{\theta_{11}(\lambda_a - z_n)} = -i\pi\nu + \sum_{b \neq a}^M \frac{\theta'_{11}(\lambda_a - \lambda_b)}{\theta_{11}(\lambda_a - \lambda_b)}. \quad (24)$$

Выбирая параметры неоднородности при $n = 0, j$ как в уравнении (17), вводя два ряда параметров Бете со скейлингами $\lambda_a = \epsilon l_a$, $a = 1, \dots, N_a/2$, и $\lambda_\alpha^0 = \epsilon l_\alpha^0 + K$, $\alpha = 1, \dots, s_0$, и используя некоторые свойства θ_{11} -функции, из соотношения (23) при $n = j$ можно теперь получить точное собственное значение для нашей модели, описывающей ИВ-взаимодействие, без учета ПВВ. Таким образом, в пределе больших спинов (или, что эквивалентно, при $\epsilon \rightarrow 0$) для поля излучения с гамильтонианом (19) мы находим значение энергии

$$E_j^{\text{ПрВВ}} = \theta'_{11}(0) \left(\omega_a + \sum_{b=1}^{N_a/2} \frac{1}{(x_j - l_b)} + \frac{1}{2} \sum_{k \neq j}^{N_a} \frac{1}{(x_j - x_k)} + \frac{\theta''_{10}}{\theta_{10}}(0) (2x_j - x_0 - l^0) \right), \quad (25)$$

где, чтобы получить определенное решение $l^0 = x_0$, мы предположили, что параметр вырождения имеет значения $l_\alpha^0 = l^0$ для всех $\alpha = 1, \dots, s_0$. Чтобы найти оставшиеся параметры Бете $\{l_a\}$, необходимо решить следующее уравнение Бете, полученное редукцией уравнения (24):

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_a} \frac{1}{(x_k - l_a)} = \omega_a + \sum_{b \neq a}^{N_a/2} \frac{1}{(l_b - l_a)}, \quad a = 1, \dots, \frac{N_a}{2}, \quad (26)$$

для заданного набора произвольных невырожденных параметров неоднородности x_j , $j = 1, \dots, N_a$. Заметим, что от значений $l^0 = x_0$ в уравнении (25) можно избавиться с помощью сдвига параметров x_j и l_a .

Взяв сумму в уравнении (25) и используя для упрощения уравнение Бете (26), можно также легко получить точные собственные значения для нашей модели Тависа–Каммингса (22) с явными ПрВВ-членами.

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В реальных моделях, описывающих ИВ-взаимодействие, при наличии многих атомов должны появляться межатомные взаимодействия. Более того, в общем случае необходимо избегать приближения ПрВВ, по крайней мере вне точки резонанса. Однако если не нарушать свойство интегрируемости, эти важные случаи нельзя включать в рассмотрение в большинстве предложенных ранее решаемых моделей. Нами предложены новые интегрируемые модели, где оба этих случая можно объединить, сохраняя при этом интегрируемость системы, и получить точные решения с помощью бете-анзаца. Для моделей, учитывающих ПВВ, найден ряд интегрируемых многоатомных моделей с учетом межатомных взаимодействий, откуда получаются обобщения моделей ДжК, БС и модели ЗИ, а также их q -деформации. Эти модели относятся к рациональному или тригонометрическому классу, и их можно точно решить единообразным способом.

Нами также впервые построены точно решаемые многоатомные модели, описывающие ИВ-взаимодействие, без учета ПВВ, близкие к физическим системам, содержащим требуемые члены, соответствующие случаю ПрВВ. Мы получили этот результат, взяв предел больших спинов для поля излучения в ЭМГ. Однако в отличие от моделей с учетом ПВВ, где нам удалось построить модели различного типа, описывающие ИВ-взаимодействие, наши успехи при построении моделей без учета ПВВ ограничены, здесь мы смогли получить только модели типа модели ДжК с ПрВВ-членами. Более того, в таких интегрируемых моделях члены, соответствующие полю возбуждения, не появляются естественным путем и должны быть включены пертурбативным образом в точный результат, полученный с помощью бете-анзаца.

Отжествление моделей с реальными системами и экспериментальная проверка представленных в настоящей работе результатов, особенно в экспериментах с многоатомными микролазерами [27] или с ионами, захваченными вне точки резонанса [7], могли бы оказаться важными применениями.

Список литературы

- [1] *G. Rempe, H. Walther, N. Klein.* Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 353; *G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, H. Walther.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 2783.
- [2] *M. Raizen R. J. Thompson, R. J. Brecha et al.* Phys. Rev. Lett. 1989. V. 63. P. 240.
- [3] *C. A. Blockley, D. F. Walls, H. Risken.* Europhys. Lett. 1992. V. 17. P. 509.
- [4] *W. Vogel, R. de Mito Filho.* Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4214.
- [5] *E. T. Jaynes, F. W. Cummings.* Proc. IEEE. 1963. V. 51. P. 89.
- [6] *B. Buck, C. V. Sukumar.* Phys. Lett. A. 1981. V. 81. P. 132.
- [7] *R. Angelo, M. K. Furuya, M. C. Nemes, G. Q. Pellegrino.* Phys. Rev. A. 2001. V. 64. P. 043801.
- [8] *V. Buzek.* J. Mod. Opt. 1992. V. 39. P. 949.
- [9] *M. Chaichian, D. Ellinas, P. Kulish.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. P. 980.
- [10] *H.-S. Zheng, L. M. Kuang, K. L. Gao.* Jaynes–Cummings model dynamics in two trapped ions. quant-ph/0106020.
- [11] *G. S. Agarwal.* Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1732.
- [12] *M. Tavis, F. W. Cummings.* Phys. Rev. 1968. V. 170. P. 379; *W. R. Mallory.* Phys. Rev. 1969. V. 188. P. 1976.
- [13] *N. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 6305.
- [14] *A. Rybin, G. Kastelewicz, J. Timonen, N. Bogoliubov.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 4705.
- [15] *L. Amico, K. Hikami.* Integrable spin-boson interaction in the Tavis–Cummings model from a generic boundary twist. cond-mat/0309680.
- [16] *J. Dukelsky, G. G. Dussel, C. Echebag, S. Pittel.* Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 050403.
- [17] *P. Kulish, E. K. Sklyanin.* Quantum spectral transform method. Recent developments. In: Integrable Quantum Field Theories. Proc. of the Symp. (Tvaerminne, Finland, 23–27 March, 1981). Lect. Notes Phys. V. 151. Eds. J. Hietarinta, C. Montonen. Berlin: Springer, 1982. P. 61; *A. G. Izergin, V. E. Korepin.* Lett. Math. Phys. 1984. V. 8. P. 259; *B. O. Tapasco.* ТМФ. 1985. Т. 63. С. 175; *L. D. Faddeev.* Int. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10. P. 1845.
- [18] *A. Kundu.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 3936.
- [19] *A. Kundu.* J. Phys. A. 2004. V. 37. P. L281.
- [20] *L. Takhtajan.* Introduction to algebraic Bethe ansatz. In: Exactly Solvable Problems in Condensed Matter and Relativistic Field Theory. Proc. Winter School, Int. Colloq. (Panchgani, India, January 30 – February 12, 1985). Lect. Notes Phys. V. 242. Eds. B. S. Shastri, S. S. Jha, V. Singh. Berlin: Springer, 1985. P. 175.
- [21] *V. Pasquier, H. Saleur.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 523.
- [22] *Е. К. Склянин.* Функци. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27; 1983. Т. 17. № 4. С. 34.
- [23] *Е. К. Sklyanin, T. Takebe.* Phys. Lett. A. 1996. V. 219. P. 217.
- [24] *A. Kundu.* Integrable multi atom matter-radiation models without rotating wave approximation. cond-mat/0411166.
- [25] *Л. А. Тажмаджян, Л. Д. Фаддеев.* УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 13.
- [26] *T. Takebe.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 1071; 1995. V. 28. P. 6675.
- [27] *K. An, J. J. Childs, R. R. Dasari, M. S. Feld.* Phys. Rev. Lett. 1994. V. 73. P. 3375; *K. An.* J. Phys. Soc. Japan. 2003. V. 72. P. 811.