Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Лебле, Необходимые условия ковариантности пары Лакса с одним полем,
ТМФ, 2005, том 144, номер 1, 122–132

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1838>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 07:37:37

© 2005 г.

С. Б. Лебле*

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ КОВАРИАНТНОСТИ ПАРЫ ЛАКСА С ОДНИМ ПОЛЕМ

Изучается ковариантность по отношению к преобразованиям Дарбу полиномиальных дифференциальных и разностных операторов с коэффициентами, являющимися функциями одного базисного поля. В скалярном (абелевом) случае дифференциал Фреше (первый член ряда Тейлора на пространстве продолжения) приравнивается к преобразованию Дарбу с целью установления функциональной зависимости; рассматривается пара Лакса для уравнения Буссинеска. Для пары обобщенных задач Захарова–Шабата (с операторами дифференцирования и сдвига) с операторными коэффициентами построен набор интегрируемых нелинейных уравнений вместе с явными формулами одевания. Неабелевы специальные функции выбираются как поля ковариантных пар. Вводятся разностная пара Лакса, комбинация преобразования Дарбу и калибровочного преобразования, а также решения уравнений Нама.

Ключевые слова: преобразование Дарбу, пара Лакса, уравнение Буссинеска, полиномы оператора сдвига, уравнение Нама.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим некоторый вид форминвариантности дифференциальных многочленов с учетом связи между оператором

$$\sum_{k=0}^n a_k \partial^k$$

и оператором того же порядка, но с новыми (преобразованными) коэффициентами

$$\sum_{k=0}^n a_k[1] \partial^k.$$

Будем называть это свойство “ковариантностью” оператора под действием преобразований некоторого вида. Подобный же термин будем использовать и в случае полиномиального оператора сдвига.

*Technical University of Gdan'sk, ul. G. Narutowicza, 11/12, 80-952, Gdan'sk-Wrzeszcz, Poland.
E-mail: leble@mifgate.pg.gda.pl

Доказательство ковариантности уравнения

$$\psi_t = \sum_{k=0}^n a_k \partial^k \psi \quad (1)$$

с некоммутативными коэффициентами a_k по отношению к классическому преобразованию Дарбу (ПД) [1]

$$\psi[1] = \psi' - \sigma \psi \quad (2)$$

включает вспомогательное соотношение (в статье используется сокращенное обозначение $\psi' = \partial \psi = \psi_x$) [2]

$$\sigma_t = \partial r + [r, \sigma], \quad r = \sum_0^N a_n B_n(\sigma), \quad (3)$$

где B_n – дифференциальные полиномы Белла [3]. Соотношение (3) обобщает так называемое отображение Миуры и превращается в тождество, когда $\sigma = \phi' \phi^{-1}$, где ϕ – решение уравнения (1).

При изучении совместно ковариантных комбинаций (абстрактных) производных вводят дополнительные связи для полиномиальных коэффициентов, которые можно классифицировать [4], [5]. В двух словах, при наличии общего утверждения относительно ковариантного вида линейного полиномиального дифференциального оператора, который определяет формулы преобразования для коэффициентов, самосогласованность между такими формулами приводит к появлению связей. В скалярном случае конструкции с одним потенциалом для уравнений Кортвега-де Фриза (КдФ) и Буссинеска изучались в работах [5], [6] (см. п. 2.1 данной работы) в применении к высшим уравнениям КдФ и Кадомцева–Петвиашвили (КП) [7].

Примеры нелокальных уравнений (с неабелевыми коэффициентами), интегрируемых методом ПД, рассматривались в работах [1], [8]. Некоторые из них, обзор которых приведен в книгах [9], [10], были недавно обобщены на широкий класс полиномов от автоморфизмов дифференциального кольца [11]. Исследование некоммутативных коэффициентов является более сложным, но и значительно более богатым и многообещающим. Это видно уже с точки зрения симметричной классификации, изучение которой началось с работ [12] (см. также [13], [14] и обзор [15]). Далее, связь с подходом на основе ПД-ковариантности [16] позволяет построить и классифицировать ковариантные функции для использования их в квантовой [17] и солитонной задачах. Например, имеется класс уравнений вида

$$-i\rho_t = [H, h(\rho)], \quad (4)$$

где $h(\rho)$ – аналитическая функция. В квантовой механике операторы ρ и H играют роли матрицы плотности и гамильтониана. Ковариантность уравнений (4) по отношению к ПД установлена в работе [18]. Случаи $f(\rho) = i\rho^3$ и $f(\rho) = i\rho^{-1}$ были рассмотрены в связи с приложениями в работе [19]. Следующий шаг к существенно неабелевым функциям, например

$$h(X) = XA + AX, \quad (5)$$

$[A, X] \neq 0$, восходит к работам [20], а обобщения изучаются в статье [16]. Дальнейшие обобщения представлены в работе [21], где приведен богатый список интегрируемых уравнений. Этот список частично соответствует результатам работы [13], причем установлена также обычная для техники ПД связь с решениями посредством итерационных процедур или одевающих цепочек.

2. ПАРА ЛАКСА С ОДНИМ ПОЛЕМ ДЛЯ АБЕЛЕВА СЛУЧАЯ

2.1. Уравнения ковариантности. Сначала, как обобщение исследований примера уравнения Буссинеска [5], [22], воспроизведем схему с одним коммутативным скалярным полем. Рассмотрим уравнение (1) с коэффициентами b_k , $k = 0, 1, 2, 3$, а коэффициенты a_k будем использовать для второго оператора в паре Лакса. ПД для операторных коэффициентов третьего порядка (обобщение Матвеева классического ПД [1]) приводит к соотношениям

$$b_2[1] = b_2 + b'_3, \quad b_1[1] = b_1 + b'_2 + 3b_3\sigma', \quad (6)$$

$$b_0[1] = b_0 + b'_1 + \sigma b'_2 + 3b_3(\sigma\sigma' + \sigma''), \quad (7)$$

причем b_3 не преобразуется. Предположим, что оба оператора зависят от единственной потенциальной функции w . Задача для первого оператора формулируется следующим образом: найти ограничения на коэффициенты $b_3(x, t)$, $b_2(x, t)$, $b_1 = b(w, t)$, $b_0 = G(w, t)$, совместные с правилами ПД (6), (7) для потенциальной функции w , индуцированной ПД для b_1 или b_0 . Для простоты положим $b'_3 = 0$.

Ковариантность соответствующего спектрального уравнения

$$b_3\psi_{xxx} + b_2(x, t)\psi_{xx} + b(w, t)\psi_x + G(w, t)\psi = \lambda\psi \quad (8)$$

приводит к связи только между коэффициентами b_1 и b_0 . При исследовании задачи (8) в контексте представления Лакса для некоторого нелинейного уравнения ковариантность второго уравнения Лакса следует учесть с самого начала. Назовем такой принцип “принципом совместной ковариантности” [4]. Форма второго уравнения Лакса фиксирует положение поля w :

$$\psi_t = a_2(t)\psi_{xx} + a_1(t)\psi_x + w\psi. \quad (9)$$

Если рассмотреть уравнения (8), (9) как уравнения для пары Лакса, ПД функции w должно быть совместно с формулами ПД (подобными (6)) для обоих коэффициентов из уравнения (8), зависящих от единственной переменной w . Далее, для задачи (9) обобщенное отображение Миуры (3) имеет вид [2]

$$\sigma_t = [a_2(\sigma^2 + \sigma_x) + a_1\sigma + w]_x, \quad (10)$$

а для спектрального уравнения (8) –

$$b_3(\sigma^3 + 3\sigma_x\sigma + \sigma_{xx}) + b_2(\sigma^2 + \sigma_x) + b(w, t)\sigma + G(w) = \text{const}; \quad (11)$$

здесь ϕ является решением обоих уравнений Лакса.

Предположим далее, что коэффициенты операторов являются аналитическими функциями от w вместе со своими производными (или интегралами) по x (такие функции носят название функций на пространстве продолжения). Для коэффициента $b_1 = b(\partial^{-1}w, w, w_x, \dots, \partial^{-1}w_t, w_t, w_{tx}, \dots)$ возникает условие ковариантности для дифференциала Фреше (ДФ) функции b на пространстве продолжения. Приравнявая это разложение и ПД, получаем условие

$$b'_2 + 3b_3\sigma' = b_w(a'_1 + 2a_2\sigma' + \sigma a'_2) + b_{w'}(a'_1 + 2a_2\sigma' + \sigma a'_2)' + \dots \quad (12)$$

Мы называем это уравнение (первым) “уравнением совместной ковариантности”. Оно гарантирует совместность коэффициентов преобразований пары Лакса (8), (9). Сравнение двух преобразований дает следующее выражение для $b(w, t)$ (с произвольным $\alpha(t)$):

$$b(w, t) = \frac{3b_3 w}{2a_2} + \alpha(t). \quad (13)$$

Приравнявая разложение $b_0 = G(\dots, w, \dots)$ на пространстве продолжения

$$G(w + a'_1 + 2a_2\sigma' + \sigma a'_2) = G(w) + G_w(a'_1 + 2a_2\sigma' + \sigma a'_2) + \dots \quad (14)$$

и ПД (7) того же коэффициента, получаем

$$\begin{aligned} b'_1 + \sigma b'_2 + 3b_3\left(\frac{\sigma^2}{2} + \sigma'\right)' &= \\ &= G_{w_x}(a'_1 + 2a_2\sigma' + \sigma a'_2)' + G_{\partial^{-1}w_t}[a_{1t} + 2\partial^{-1}(a_2\sigma'_t) + \partial^{-1}(\sigma a'_2)_t] + \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Это второе “уравнение совместной ковариантности” также упрощается при $a'_2 = 0$. Заметим, что соотношение (10), использованное в левой части (15), линейризует ДФ по σ . Окончательно получим

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{3b_3 a_1}{2a_2} + \beta(t), \\ G(w, t) &= \frac{3b_3 w_x}{2a_2} + \frac{3b_3 a'_1 \partial^{-1}w}{2a_2^2} + \frac{3b_3 \partial^{-1}w_t}{2a_2^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Мы ограничили формулы для ДФ уровнем, необходимым для минимальных потоков. Учет высших членов приводит ко всей иерархии, как в работе [7] для случая КДФ–КП.

2.2. Условия совместности. В случае, когда $a'_2 = 0$, которым мы ограничились, система Лакса (8), (9) приводит к условиям совместности

$$\begin{aligned} b_{3t} &= 2a_2b'_2 - 3b_3a''_1, \\ b_{2t} &= a_2b''_2 + 2a_2b'_1 + a_1b'_2 - 3b_3a''_1 - 2b_2a'_1 - 3b_3a'_0, \\ b_{1t} &= a_2b'_1 + a_1b'_1 - b_3a'''_1 - b_2a''_1 - b_1a'_1 - 3b_3a''_0 - 2b_2a'_0 + 2a_2b'_0, \\ b_{0t} &= a_1b'_0 + a_2b''_0 - b_1a'_0 - b_2a''_0 - b_3a'''_0. \end{aligned} \quad (17)$$

Связи (16), (17) в комбинации с выражением для b_{2t} дают

$$\beta_t = -2\beta a'_1. \quad (18)$$

Два последних уравнения (с константами, выбранными как $b_3 = 1$, $a_2 = -1$, $b'_2 = a'_1 = 0$) дают

$$\frac{3b_3(w_t + a_1w)_t}{4a_2^2} = - \left[\left(\frac{3b_3w}{2a_2} + \alpha \right) w' - \frac{b_3w'''}{4} + \frac{3b_3a_1w_t}{4a_2^2} + \left(\beta - \frac{3b_3a_1}{4a_2} \right) w'' \right]'. \quad (19)$$

Это уравнение редуцируется к уравнению Буссинеска (см., например, [9]) при $b_1 = a_1 = 0$, $b_3 = 1$, $a_2 = -1$.

3. НЕАБЕЛЕВ СЛУЧАЙ. ЗАДАЧА ЗАХАРОВА–ШАБАТА

3.1. Условия совместной ковариантности для общих уравнений Захарова–Шабата (ЗШ). Для уравнения (1) первого порядка ($n = 1$) с коэффициентами из неабелева дифференциального кольца A (подробности см. в работе [2]) изменим обозначения следующим образом:

$$\psi_t = (J + u\partial)\psi, \quad (20)$$

где оператор $J \in A$ не зависит от x, y, t , а потенциал $a_0 \equiv u = u(x, y, t) \in A$ является функцией всех переменных. Преобразованный потенциал имеет вид

$$\tilde{u} = u + [J, \sigma], \quad (21)$$

где $\sigma = \phi_x \phi^{-1}$, а $\phi \in A$ снова является решением уравнения (20).

Предположим, что второй оператор пары Лакса имеет тот же вид, но с другими входящими в него элементами:

$$\psi_y = (Y + w\partial)\psi, \quad (22)$$

где $Y \in A$ является постоянным элементом, а потенциал $w = F(u) \in A$ — функция потенциала первого уравнения (20). Тем самым принцип совместной ковариантности [4] принимает вид

$$\tilde{w} = w + [Y, \sigma] = F(u + [J, \sigma]), \quad (23)$$

откуда непосредственно вытекает, что

$$F(u) + [Y, \sigma] = F(u + [J, \sigma]). \quad (24)$$

Таким образом, уравнение (24) определяет функцию $F(u)$; мы по-прежнему называем это уравнение уравнением совместной ковариантности.

3.2. Ковариантные комбинации симметрических многочленов. Первым естественным примером является обобщение уравнения волчка Эйлера с гамильтонианом (5), упомянутое во введении. Ковариантная пара Лакса в этом случае состоит из двух уравнений (20), (22), элементы операторов удовлетворяют “уравнению совместной ковариантности” (24) и условиям совместности, если $J = H$, $Y = H^2$ [16]. Более общая связь $Y = J^n$, $J = H$ приводит к ковариантности функции

$$P_n(H, u) = \sum_{p=0}^n H^{n-p} u H^p,$$

приведенной в работе [16]. Для дальнейшего обобщения рассмотрим комбинации таких полиномов вида

$$f(H, u) = Hu + uH + S^2u + SuS + uS^2. \quad (25)$$

Подставим $F(u) = f(H, u)$ вида (25) в (24); такая подстановка подразумевает выбор $Y = AB + CDE$, что приводит к соотношению

$$\begin{aligned} A[B, \sigma] + [A, \sigma]B + CD[E, \sigma] + C[D, \sigma]E + [C, \sigma]DE = \\ = H[J, \sigma] + [J, \sigma]H + S^2[J, \sigma] + S[J, \sigma]S + [J, \sigma]S^2. \end{aligned}$$

Это равенство выполняется тождественно, если $A = B = J = H$, $C = D = E = \alpha H$, $S = \beta H$, а также $[\alpha, H] = 0$, $[\beta, H] = 0$, с учетом связи $\alpha^3 = \beta^2$. Продолжая такой анализ, приходим к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Принцип совместной ковариантности определяет класс однородных полиномов $P_n(H, u)$, симметричных по отношению к циклическим перестановкам, как возможных гамильтонианов $h(u) = P_n(H, u)$ для эволюции типа Лиувилля–фон Неймана (4). Линейная комбинация таких полиномов $\sum_{n=1}^N \beta_n P_n(H, u)$ с коэффициентами, коммутирующими с u и H , также приводит к ковариантной паре, если выполнено соотношение $Y = \sum_{n=1}^N \alpha_n H^{n+1}$ и $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_n^{n+1} = \beta_n^n$, $n \neq 1$.*

Доказательство можно провести по индукции, основанной на однородности P_n и линейности связей по u . Функции $F_H(u) = \sum_0^\infty a_n P_n(H, u)$ также удовлетворяют связям и определяют некую функцию, если ряд сходится.

4. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Пусть A – операторное кольцо и для заданных элементов $f, g \in A$ автоморфизм T обладает свойством $T(fg) = T(f)T(g)$. Общие формулы ПД для полиномов от оператора T приведены в работе [11]. Будем называть оператор T оператором сдвига, но, согласно данному определению, он может быть общим.

4.1. Эволюция оператора сдвига первого порядка с одним полем. Возьмем общее эволюционное уравнение в случае $N = 1$:

$$\psi_t(x, t) = (U_0 + U_1 T)\psi. \quad (26)$$

В этом случае имеются два типа ПД [11], [23], обозначаемые индексами “+” и “−”. ПД первого типа (+) оставляет U_0 неизменным. Перепишем преобразование для U_1 в виде

$$U_1^+ = \sigma^+(TU_1)(T\sigma^+)^{-1}, \quad (27)$$

где $\sigma^+ = \phi(T\phi)^{-1}$, далее верхний индекс “+” не указывается.

Нетривиальные уравнения цепочки появляются для стационарного варианта уравнения (26)

$$(J + UT)\varphi = \varphi\mu, \quad (28)$$

если постоянный элемент μ не коммутирует с φ и σ .

Выведем тождество, связывающее потенциал U и σ (ср. [23]). Подставим соотношение

$$T(\sigma)T^2(\varphi) = T(\varphi) \quad (29)$$

в уравнение сдвига (28). Имеем связь типа отображения Миуры

$$\sigma T(U)\sigma = U + [J, \sigma], \quad (30)$$

где учтено, что $T(\sigma) = \sigma^{-1}$. Эта связь также упрощает формулы ПД (27):

$$U^+ = \sigma(TU)\sigma = U + [J, \sigma]. \quad (31)$$

Прямое использование уравнения (28) для выражения U через $\tau = \varphi\mu\varphi^{-1}$ и σ дает $U = \tau\sigma - J\sigma$. Подстановка результатов в (30) приводит к соотношению

$$T(\tau) = \sigma^{-1}\tau\sigma, \quad (32)$$

которое определяет элемент τ на множестве точек $T^m x_0$ как явную функцию σ :

$$\tau = \sigma^{-m}\tau(x_0)\sigma^m. \quad (33)$$

Отсюда, в свою очередь, при использовании (33) получается явное выражение для U . Окончательно, подставляя U в (31), для всех n , $n + 1$ получаем уравнение одевающей цепочки

$$\sigma_n^{-m}\tau(x_0)\sigma_n^m\sigma_n - \sigma_n J = \sigma_{n+1}^{-m}\tau(x_0)\sigma_{n+1}^m\sigma_{n+1} - J\sigma_{n+1}, \quad (34)$$

параметризованное посредством μ через $\tau(x_0)$.

Уравнение цепочки является естественным результатом выражения ПД в терминах переменной σ с помощью отображения Миуры. Оно изучалось в работе [24] в связи со знаменитой скалярной задачей КдФ и стандартной задачей Штурма–Лиувилля. Периодическое замыкание цепочек дает интегрируемые бигамильтоновы конечномерные системы, а в некоторых специальных случаях – конечнозонные потенциалы [25]. Случай уравнения Буссинеска исследован в работе [22] (см. также [26]). Уравнения цепочки для классической дифференциальной задачи ЗШ и двух типов ПД были введены в работе [27] (см. также недавний обзор [15]).

4.2. Уравнения совместной ковариантности. Возьмем реплику уравнения (26)

$$\psi_t(x, t) = (V_0 + V_1(U)T)\psi \quad (35)$$

с заменой $U_1 \rightarrow V_1 = F(U)$. Тем самым вводится пара Лакса с одним полем, составленная из двух эволюционных уравнений ЗШ. Имеется в виду, что коэффициенты обоих уравнений зависят от единственного оператора U . Инвариантность постоянной V_0 следует как свойство ПД первого типа. Преобразуем V_1 с помощью (27), рассматривая результат как ту же самую функцию от U_1^+ . Это приводит к уравнению совместной ковариантности

$$V_1^+ = F(U^+) = F(\sigma^+(TU)(T\sigma^+)^{-1}) = \sigma^+(TF(U))(T\sigma^+)^{-1}. \quad (36)$$

Аналогичное уравнение выводится для альтернативной “–”-системы.

5. ТЕОРЕМЫ КОВАРИАНТНОСТИ ДЛЯ ВЫСШИХ ОПЕРАТОРОВ

Следующая теорема устанавливает ковариантность обоих уравнений, порождающих пару Лакса для уравнения Нама [28].

ТЕОРЕМА 5.1. *Уравнение*

$$\psi_y = uT\psi + v\psi + wT^{-1}\psi \quad (37)$$

ковариантно по отношению к ПД, скомбинированному с калибровочным преобразованием

$$\psi[1] = g(y)(T - \sigma)\psi, \quad (38)$$

где $g(y) \in A$, $\sigma = (T\phi)/\phi$, ϕ – (другое) решение того же уравнения (37). Преобразования коэффициентов уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} u[1] &= gT(u)[T(g)]^{-1}, \\ v[1] &= gT(v)g^{-1} - g\sigma u g^{-1} + gT(u)T(\sigma)g^{-1} + g_y g^{-1}, \\ w[1] &= g\sigma w[T^{-1}(g\sigma)]^{-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подстановка (38) в преобразованное уравнение (37) дает четыре уравнения, причем $T^n\psi$ являются независимыми. Три из них приводят к преобразованным потенциалам (39). Четвертое уравнение после применения преобразования принимает вид

$$\sigma_y = \sigma F - (TF)\sigma, \quad F = u\sigma + v + w[T^{-1}(\sigma)]^{-1}. \quad (40)$$

Можно проверить справедливость этого уравнения, подставляя определение σ и используя уравнение для ϕ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Теорема 5.1 естественным образом справедлива для спектральной задачи

$$\lambda\psi = uT\psi + v\psi + wT^{-1}\psi, \quad (41)$$

которая возникает для стационарных решений уравнения (37) с единственным отсутствующим последним слагаемым для преобразования $v[1]$. Преобразование использует собственную функцию ϕ с отличным собственным значением μ . Уравнение (40) переходит в соответствующий преобразованию Миуры аналог для функции σ :

$$\mu = u\sigma + v + w[T^{-1}(\sigma)]^{-1}. \quad (42)$$

6. РЕДУКЦИИ УРАВНЕНИЯ НАМА

Уравнение Нама можно записать в представлении Лакса (в пионерских работах [28] операторы пары Лакса — дифференциальные операторы), используя спектральное уравнение (41) и эволюционное уравнение

$$\psi_t = (q + pT)\psi. \quad (43)$$

Ковариантность этого уравнения по отношению к ПД (38) можно установить подобно теореме 5.1 с учетом эволюции для функции $\sigma(t)$,

$$\sigma_t = T(q)\sigma - \sigma p\sigma + T(p)T(\sigma)\sigma - \sigma q, \quad (44)$$

что доказывает следующие формулы преобразования для коэффициентов в уравнении (43):

$$p[1] = gT(p)[T(g)]^{-1}, \quad (45)$$

$$q[1] = g[T(q) - \sigma p + T(p)T(\sigma)]g^{-1} + g_y g^{-1}. \quad (46)$$

Выбор $p = u + \beta I$, $q = v/2$, $T(\varphi_i) = \varphi_i$,

$$u = \alpha \left(-\frac{i\varphi_1}{2} - \varphi_3 \right), \quad v = \varphi_3, \quad w = \alpha^{-1} \left(-\frac{i\varphi_1}{2} + \varphi_3 \right) \quad (47)$$

приводит к уравнениям Нама

$$\varphi_{i,t} = i\epsilon_{ikl}[\varphi_k, \varphi_l]. \quad (48)$$

Система (41), (43) ковариантна по отношению к комбинированному ПД и калибровочному преобразованию, если переменная $g = e^G$ выбрана так, что

$$G_t = \frac{\alpha}{2} \left[T \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right) T(\sigma) - \sigma \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]. \quad (49)$$

Наконец, можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 6.1. Система (48) инвариантна по отношению к преобразованиям

$$\begin{aligned} \varphi_1[1] &= g \left[\left(\frac{T(\varphi_1)}{2} - iT(\varphi_3) \right) T(g)^{-1} + \sigma \left(\frac{\varphi_1}{2} + i\varphi_3 \right) [T^{-1}(g\sigma)]^{-1} \right], \\ \varphi_2[1] &= g \left[T(\varphi_2) + \alpha \left(\frac{i\sigma\varphi_1}{2} - \frac{i\varphi_1 T(\sigma)}{2} + \sigma\varphi_3 - T(\varphi_3\sigma) \right) \right] g^{-1}, \\ \varphi_3[1] &= g \left[\left(T \left(-\frac{i\varphi_1}{2} - \varphi_3 \right) \right) T(g)^{-1} + \sigma \left(-\frac{i\varphi_1}{2} + \varphi_3 \right) [T^{-1}(g\sigma)]^{-1} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

с функцией $g = e^G$, где G получена интегрированием (49).

7. РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НАМА

Следуя построению, описанному в предыдущем разделе, проследим за алгоритмом на простом примере, рассматривая T как оператор сдвига $T\psi(x, y) = \psi(x + 1, y)$. В качестве затравочного решения уравнений Нама (48) рассмотрим коммутирующие постоянные матрицы $\varphi_i = A_i$, $i = 1, 2, 3$, что означает, что в уравнении (47) величины u, v, w являются постоянными. Прежде всего следует построить решение пары Лакса (41), (43), которое можно найти в виде (все элементы предполагаются обратимыми)

$$\phi = \xi(t)\Phi(x). \quad (51)$$

Уравнение для ξ получается в виде

$$\xi_t = \left[\frac{v}{2} + (u + \beta I)T \right] \xi = Z\xi \quad (52)$$

и имеет решение

$$\xi = e^{Zt} \xi_0. \quad (53)$$

Подстановка ϕ в (41) приводит к спектральной задаче с разностными операторами сдвига:

$$\mu\Phi(x) = \xi^{-1} [u\xi\Phi(x+1) + v\xi\Phi + w\xi\Phi(x-1)]. \quad (54)$$

Снова разделяя переменные, строим класс частных решений в виде

$$\Phi = \eta e^{\Sigma x} \quad (55)$$

и таким образом получаем матричную спектральную задачу для η :

$$\mu\eta = \xi^{-1} [u\xi\eta e^{\Sigma} + v\xi\eta + w\xi\eta e^{-\Sigma}], \quad (56)$$

с оператором в правой части, а потому со спектральным параметром μ , параметризованным посредством t . Окончательно матрица σ составляется как

$$\sigma = \xi(t)\eta e^{\Sigma}\eta^{-1}\xi^{-1}(t). \quad (57)$$

Подходящий выбор коммутаторной алгебры для A_i, Σ, η позволяет получить явный вид σ и, следовательно, построить и решить уравнение (49) для G :

$$G_t = \frac{\alpha}{2} \left[\left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right) \xi(t)\eta e^{\Sigma}\eta^{-1}\xi^{-1}(t) - \xi(t)\eta e^{\Sigma}\eta^{-1}\xi^{-1}(t) \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right], \quad (58)$$

и, далее, ее экспоненту, т.е. матрицу g , необходимую для формул одевания (50). Подчеркнем, что матрицы σ и g не зависят от x , а потому от x не зависит и одетая матрица $\varphi[i]$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе развит общий метод построения операторов с одним полем, ковариантных относительно ПД. С помощью этого метода можно получить уравнения совместной ковариантности для операторных коэффициентов как функций на пространстве продолжения. Найдены некоторые решения уравнений на пути обобщения тейлорова разложения функций [29].

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке Министерства научных исследований и информационных технологий Польши, грант PBZ-Min-008/P03/03.

Список литературы

- [1] V. B. Matveev. Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 213, 217, 503.
- [2] A. A. Zaitsev, S. B. Leble. Rep. Math. Phys. 2000. V. 46. P. 165; math-ph/9903005.
- [3] F. di Bruno. Pure Appl. Math. 1857. V. 1. P. 359.
- [4] S. Leble. Darboux transforms algebras in $2 + 1$ dimensions. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Proc. of the 7th Workshop (NEEDS-91) (Baia, Verde, Italy, June 19–29, 1991). Eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Singapore: World Scientific, 1992. P. 53.
- [5] С. Б. Лебле. ТМФ. 2001. Т. 128. С. 65.
- [6] F. Lambert, S. Leble, J. Springael. Glasgow Math. J. A. 2001. V. 43. P. 55.
- [7] F. Lambert, I. Loris, J. Springael. Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 1067.
- [8] М. А. Салль. ТМФ. 1982. Т. 53. С. 227; С. Б. Лебле, М. А. Салль. ДАН СССР. 1985. Т. 284. С. 110.
- [9] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux transformations and solitons. Berlin: Springer, 1991.
- [10] C. Roger, W. K. Schiff. Backlund and Darboux Transformations. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2002.
- [11] V. B. Matveev. Am. Math. Soc. Transl. II. 2000. V. 201. P. 179.
- [12] P. J. Olver, V. V. Sokolov. Commun. Math. Phys. 1998. V. 193. № 2. P. 245; Inverse Problems. 1998. V. 14. P. L5.
- [13] А. Б. Михайлов, В. В. Соколов. ТМФ. 2000. Т. 122. С. 88.
- [14] R. H. Heredero, A. Shabat, V. Sokolov. J. Phys. A. 2003. V. 36. № 47. P. L605.
- [15] А. Б. Шабат. ТМФ. 2003. Т. 136. № 2. С. 197.
- [16] S. B. Leble, M. Czachor. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 7091.
- [17] A. A. Andrianov, F. Cannata, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. 5037.
- [18] N. Ustinov, S. Leble, M. Czachor, M. Kuna. Phys. Lett. A. 2001. V. 279. P. 333.
- [19] A. Minic. Phys. Lett. B. 2002. V. 536. P. 305.
- [20] С. В. Манаков. Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. С. 93; M. Adler, P. van Moerbeke. Adv. Math. 1980. V. 38. P. 267.
- [21] J. Cieslinski, M. Czachor, N. Ustinov. J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 1763.
- [22] S. Leble. Covariant forms of Lax one-field operators: from Abelian to non-commutative. In: Bilinear Integrable Systems: from Classical to Quantum, from Continuous to Discrete. Proc. NATO Advanced Research Workshop (St. Petersburg, Russia, 15–19 September, 2002). NATO Sci. Ser. II: Math. Phys. Chem. V. 201. Eds. L. Faddeev, P. van Moerbeke, F. Lambert. Dordrecht: Kluwer, 2005; math-ph/0302053.
- [23] S. Leble. Dressing chain equations associated with difference soliton systems. In: Probing the structure of quantum mechanics. Nonlinearity, nonlocality, computation, axiomatics. Eds. D. Aerts, M. Czachor, T. Durt. London: World Scientific, 2002. P. 354.
- [24] J. Weiss. J. Math. Phys. 1986. V. 27. P. 2647.
- [25] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. С. 1.
- [26] В. Э. Адлер, В. Г. Маризин, А. Б. Шабат. ТМФ. 2001. Т. 129. № 2. С. 163.
- [27] А. Б. Шабат. ТМФ. 1999. Т. 121. № 1. С. 165.
- [28] W. Nahm. Phys. Lett. B. 1980. V. 90. P. 413; N. J. Hitchin. Commun. Math. Phys. 1983. V. 89. № 2. P. 145.
- [29] R. W. Atherton, G. M. Homsy. Studies Appl. Math. 1975. V. 54. P. 31.