Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Дж.-Х. Ли, О. К. Пашаев, Солитонные резонансы для мКП-II, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 133–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1839>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:42:13

СОЛИТОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ ДЛЯ МКП-II

Рассмотрены второй поток (система реакции-диффузии с производной) и третий поток диссипативной $SL(2, \mathbb{R})$ -иерархии Каупа–Ньюэлла. Показано, что произведение двух функций, удовлетворяющих этим системам уравнений, является решением модифицированного уравнения Кадомцева–Петвиашвили в размерности $(2 + 1)$ с отрицательной дисперсией. Построены билинейные представления Хироты для обоих потоков и объединение этих представлений в билинейную систему для такого уравнения. С помощью этой билинейной системы уравнений найдены одно- и двухсолитонное решение модифицированного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией. При специальных значениях параметров это решение демонстрирует резонансное поведение с образованием четырех виртуальных солитонов. Предложенный подход позволяет интерпретировать резонансный солитон как сложный объект, составленный из двух диссипативных солитонов в размерности $(1 + 1)$.

Ключевые слова: солитонный резонанс, диссипативный солитон, модифицированное уравнение Кадомцева–Петвиашвили, метод Хироты, система реакции-диффузии с производной.

1. ВВЕДЕНИЕ

Калибровочная формулировка гравитационных моделей в низких размерностях, подобных модели Джакива–Тейтельбойма [1], основана на использовании репера Картана–Эйнштейна или метода подвижного репера. В этих переменных в размерности $(1 + 1)$ мы имеем дело с так называемой калибровочной BF-теорией и уравнениями движения нулевой кривизны, что обеспечивает связь с солитонными уравнениями [2]. Однако в этих переменных, представляющих собой “квадратный корень” псевдоримановой метрики, солитонные уравнения имеют диссипативный вид, поэтому соответствующие солитоны мы называем диссипативными солитонами, или “диссипатонами” [2]. Диссипативный вариант нелинейного уравнения Шредингера, обладающий богатой резонансной динамикой, представляет собой пару нелинейных уравнений диффузии и антидиффузии, которая называется системой реакции-диффузии (РД) [2], [3]. Диссипатон такой системы представляет собой пару вещественных функций, одна из которых экспоненциально возрастает, а другая убывает в пространстве и во времени. Однако произведение

*Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan. E-mail: leejh@math.sinica.edu.tw

†Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Urla-Izmir, 35430, Turkey. E-mail: oktaypashaev@iyte.edu.tr

этих функций имеет форму идеального солитона. Недавно установлено [4], что если эволюция диссипаторов системы РД по дополнительной временной переменной определяется следующим за РД членом $SL(2, \mathbb{R})$ -иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура с кубической дисперсией, то их произведение может рассматриваться как солитон $(2 + 1)$ -мерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией (КП-II). Таким способом было обнаружено резонансное поведение солитонов уравнения КП-II в терминах диссипаторов $(1 + 1)$ -мерных моделей. Более того, в рамках этого подхода был построен новый двухсолитонный резонанс уравнения КП-II с четырьмя виртуальными солитонами, который можно интерпретировать как вырожденное четырехсолитонное решение [4].

С другой стороны, как было показано ранее [5], диссипативный вариант нелинейного уравнения Шредингера с производной (НУШП) также допускает диссипативные солитонные решения с резонансным взаимодействием [6]. Более того, эти резонансы демонстрируют киральные свойства, распространяясь только в одном направлении. В настоящей работе, следуя стратегии работы [4], мы с помощью оператора рекурсии иерархии Каупа–Ньюэлла (КН) прежде всего строим следующую после НУШП диссипативную систему уравнений иерархии с кубической дисперсией. Затем, используя эти два члена $SL(2, \mathbb{R})$ -иерархии КН, показываем, что произведение соответствующих диссипаторов функций является решением модифицированного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией (мКП-II) (раздел 2). В разделе 3 билинеаризация двух рассматриваемых потоков иерархии позволяет нам найти билинейное представление для уравнения мКП-II. В разделе 4 рассматриваются киральные резонансные диссипаторы системы уравнений реакции-диффузии с производной (РДП) и обсуждается их геометрический смысл. В разделе 5 построены одно- и двухсолитонные решения уравнения мКП-II, продемонстрирован резонансный характер взаимодействия этих солитонов и свойство киральности, накладывающее ограничение на углы столкновения солитонов. В заключительном разделе 6 обсуждаются основные результаты работы.

2. СВЯЗЬ УРАВНЕНИЯ МКП-II С ПОТОКАМИ ИЕРАХИИ КН

Иерархия КН имеет вид [7]

$$\begin{pmatrix} q_{t_n} \\ r_{t_n} \end{pmatrix} = J L^n \begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Оператор

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

— это первая симплектическая форма, а оператор

$$L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\partial - r\partial^{-1}q\partial & -r\partial^{-1}r\partial \\ -q\partial^{-1}q\partial & \partial - q\partial^{-1}r\partial \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

есть оператор рекурсии иерархии, $\partial \equiv \partial/\partial x$. Второй поток иерархии – это система уравнений

$$q_{t_2} = \frac{1}{2} [q_{xx} + (q^2 r)_x], \quad (2.4a)$$

$$r_{t_2} = \frac{1}{2} [-r_{xx} + (r^2 q)_x], \quad (2.4b)$$

а третий –

$$q_{t_3} = -\frac{1}{4} \left[q_{xx} + 3rqq_x + \frac{3}{2}(r^2 q^2)q \right]_x, \quad (2.5a)$$

$$r_{t_3} = -\frac{1}{4} \left[r_{xx} - 3rqr_x + \frac{3}{2}(r^2 q^2)r \right]_x. \quad (2.5b)$$

Для $SL(2, \mathbb{R})$ -иерархии КН мы имеем вещественные временные переменные t_2, t_3 и будем использовать обозначения $y \equiv t_2/2$, $t \equiv -t_3/4$. В этом случае функции q и r являются вещественными; обозначим их следующим образом:

$$e^+ \equiv q, \quad e^- \equiv -r. \quad (2.6)$$

В таком случае мы имеем систему уравнений РДП [5]

$$e_y^+ = e_{xx}^+ - (e^+ e^- e^+)_x, \quad (2.7a)$$

$$e_y^- = -e_{xx}^- - (e^+ e^- e^-)_x \quad (2.7b)$$

и систему уравнений

$$e_t^+ = e_{xxx}^+ - 3(e^+ e^- e_x^+)_x + \frac{3}{2}((e^+ e^-)^2 e^+)_x, \quad (2.8a)$$

$$e_t^- = e_{xxx}^- + 3(e^+ e^- e_x^-)_x + \frac{3}{2}((e^+ e^-)^2 e^-)_x. \quad (2.8b)$$

Рассмотрим теперь пару функций трех переменных $e^+(x, y, t)$ и $e^-(x, y, t)$, удовлетворяющих системам (2.7) и (2.8). Данные системы совместны, поскольку принадлежат к одной и той же иерархии для различных времен. Это может быть установлено непосредственно из условия совместности $e_{ty}^\pm = e_{yt}^\pm$ с использованием следующих законов сохранения для систем (2.7) и (2.8), соответственно:

$$(e^+ e^-)_y = \left[(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-) - \frac{3}{2}(e^+ e^-)^2 \right]_x, \quad (2.9)$$

$$(e^+ e^-)_t = \left[(e^+ e^-)_{xx} - 3(e_x^+ e_x^-) + 3(e^+ e^-)(e^+ e_x^- - e_x^+ e^-) + \frac{5}{2}(e^+ e^-)^3 \right]_x.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функции $e^+(x, y, t)$ и $e^-(x, y, t)$ являются одновременно решениями систем (2.7) и (2.8). Тогда функция $U(x, y, t) \equiv e^+e^-$ удовлетворяет уравнению мКП-II

$$\left(-4U_t + U_{xxx} - \frac{3}{2}U^2U_x - 3U_x\partial_x^{-1}U_y \right)_x = -3U_{yy}, \quad (2.10)$$

которое можно записать и в другом виде:

$$-4U_t + U_{xxx} - \frac{3}{2}U^2U_x - 3U_xW = -3W_y, \quad (2.11a)$$

$$W_x = U_y \quad (2.11b)$$

(вторая форма получается из первой, если ввести вспомогательную переменную W в соответствии с (2.11b) и проинтегрировать по переменной x).

Доказательство не вызывает затруднений. Используя определение функции U и формулы (2.7), (2.9), получаем

$$\begin{aligned} U_y &= \left[(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-) - \frac{3}{2}U^2 \right]_x, \\ U_{yy} &= \left[U_{xxx} - 4(e_x^+ e_x^-)_x - 3U_x(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-) - \right. \\ &\quad \left. - U(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-)_x - \frac{3}{2}(U^2)_y \right]_x. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С другой стороны, формулы (2.8), (2.9) дают

$$U_t = \left[U_{xx} - 3(e_x^+ e_x^-) - 3U(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-) + \frac{5}{2}U^3 \right]_x, \quad (2.13)$$

$$U_{tx} = \left[U_{xxx} - 3(e_x^+ e_x^-) - 3U(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-) + \frac{5}{2}U^3 \right]_{xx}. \quad (2.14)$$

Сначала мы объединяем формулы (2.12) и (2.14), чтобы сократить член $e_x^+ e_x^-$, затем используем (2.12) для исключения члена $e_x^+ e^- - e^+ e_x^-$ и его производных в соответствии с формулой

$$(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-)_x = U_y - \frac{3}{2}(U^2)_x \quad (2.15)$$

и формулой

$$(e_x^+ e^- - e^+ e_x^-) = \partial_x^{-1}U_y - \frac{3}{2}U^2, \quad (2.16)$$

полученной из (2.15) однократным интегрированием. В результате мы приходим к мКП-II в виде (2.10).

3. БИЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОТОКОВ

Теперь, для того чтобы найти решения уравнения МКП-II в соответствии с предложением 1, построим билинейное представление для систем (2.7) и (2.8). В работе [5], для того чтобы проинтегрировать систему РДП (2.7), мы применили билинейный метод Хироты. Здесь мы применим тот же метод к уравнениям (2.8) и МКП-II. Как было отмечено в работе [5], стандартная подстановка Хироты в виде отношения двух функций не работает для функций e^+ и e^- непосредственно (это обстоятельство связано также со сложной аналитической структурой НУШП [8]). Чтобы получить стандартную подстановку Хироты, мы, следуя [5], перепишем сначала системы (2.7) и (2.8) в терминах новых функций Q^+ , Q^- :

$$e^+ = e^{+\int^x Q^+ Q^- Q^+}, \quad e^- = e^{-\int^x Q^+ Q^- Q^-}, \quad (3.1)$$

и в результате получим системы

$$Q_y^+ = Q_{xx}^+ + Q^+ Q^+ Q_x^- - \frac{1}{2}(Q^+ Q^-)^2 Q^+, \quad (3.2a)$$

$$Q_y^- = -Q_{xx}^- + Q^- Q^- Q_x^+ + \frac{1}{2}(Q^+ Q^-)^2 Q^-, \quad (3.2b)$$

и

$$Q_t^+ = Q_{xxx}^+ + 3Q_x^+ Q_x^- Q^+ - \frac{3}{2}(Q^+ Q^-)^2 Q_x^+, \quad (3.3a)$$

$$Q_t^- = Q_{xxx}^- - 3Q_x^+ Q_x^- Q^- - \frac{3}{2}(Q^+ Q^-)^2 Q_x^-. \quad (3.3b)$$

Тогда в силу того, что

$$Q^+ Q^- = e^+ e^- = U, \quad (3.4)$$

системы (3.2), (3.3) также дают решение уравнения МКП-II, что можно сформулировать в виде следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функции $Q^+(x, y, t)$ и $Q^-(x, y, t)$ являются одновременно решениями систем (3.2) и (3.3). Тогда функция $U(x, y, t) \equiv Q^+ Q^-$ удовлетворяет уравнению МКП-II (2.10) или (2.11).

Чтобы решить системы (3.2) и (3.3), введем четыре вещественные функции g^+ , g^- , f^+ , f^- согласно формулам

$$Q^+ = \frac{g^+}{f^+}, \quad Q^- = \frac{g^-}{f^-}, \quad (3.5)$$

или, используя формулы (3.1) и (3.4), для исходных переменных e^+ и e^- получим следующую подстановку:

$$e^+ = \frac{g^+ f^+}{(f^-)^2}, \quad e^- = \frac{g^- f^-}{(f^+)^2}. \quad (3.6)$$

Теперь система (3.2) записывается в билинейном виде:

$$(D_y \mp D_x^2)(g^\pm \cdot f^\pm) = 0, \quad (3.7a)$$

$$D_x^2(f^+ \cdot f^-) + \frac{1}{2}D_x(g^+ \cdot g^-) = 0, \quad (3.7б)$$

$$D_x(f^+ \cdot f^-) - \frac{1}{2}g^+g^- = 0. \quad (3.7в)$$

Аналогичным образом для системы (3.3) имеем следующее билинейное представление:

$$(D_t - D_x^3)(g^\pm \cdot f^\pm) = 0, \quad (3.8a)$$

$$D_x^2(f^+ \cdot f^-) + \frac{1}{2}D_x(g^+ \cdot g^-) = 0, \quad (3.8б)$$

$$D_x(f^+ \cdot f^-) - \frac{1}{2}g^+g^- = 0. \quad (3.8в)$$

Сравнивая эти два билинейных представления, можно видеть, что второе и третье уравнения обеих систем имеют одинаковый вид. Поэтому для решения, удовлетворяющего одновременно (3.2), (3.3), получаем следующую билинейную систему:

$$(D_y \mp D_x^2)(g^\pm \cdot f^\pm) = 0, \quad (3.9a)$$

$$(D_t - D_x^3)(g^\pm \cdot f^\pm) = 0, \quad (3.9б)$$

$$D_x^2(f^+ \cdot f^-) + \frac{1}{2}D_x(g^+ \cdot g^-) = 0, \quad (3.9в)$$

$$D_x(f^+ \cdot f^-) - \frac{1}{2}g^+g^- = 0. \quad (3.9г)$$

Из последнего уравнения имеем

$$U = e^+e^- = Q^+Q^- = \frac{g^+g^-}{f^+f^-} = 2\frac{D_x(f^+ \cdot f^-)}{f^+f^-} = 2\frac{f_x^+f^- - f^+f_x^-}{f^+f^-},$$

что дает для решения уравнения мКП-II следующую формулу:

$$U = 2\left(\ln \frac{f^+}{f^-}\right)_x. \quad (3.10)$$

4. РЕЗОНАНСНЫЕ СОЛИТОНЫ СИСТЕМЫ РДП

Прежде всего рассмотрим систему РДП (2.7) как эволюционное уравнение, в котором переменная $y = x_0 = t$ интерпретируется как временная переменная.

4.1. Киральное диссипативное солитонное решение. Для диссипативного односолитонного решения (одиночного диссипатона) имеем

$$g^\pm = e^{\eta^\pm}, \quad f^\pm = 1 + e^{\phi^\pm} e^{\eta^+ + \eta^-}, \quad e^{\phi^\pm} = \pm \frac{k^\mp}{2(k^+ + k^-)^2}, \quad (4.1)$$

где $\eta^\pm = k^\pm x \pm (k^\pm)^2 t + \eta_0^\pm$. По соображениям регулярности мы требуем выполнения условий $k^- > 0$ и $k^+ < 0$, так что в результате получаем диссипатон

$$Q^\pm = \frac{e^{\pm(\eta^+ - \eta^-)/2 - \alpha_\pm/2}}{2 \operatorname{ch}[(\eta^+ + \eta^- + \alpha_\pm)/2]} \quad (4.2)$$

с солитонной плотностью

$$e^+ e^- = Q^+ Q^- = \frac{2k^2}{\sqrt{v^2 - k^2} \operatorname{ch} k(x - vt - x_0) + v}. \quad (4.3)$$

В последнем выражении мы ввели амплитуду $k = k^+ + k^-$ и скорость диссипатона $v = k^- - k^+$, в терминах которых приведенные выше условия означают, что скорость диссипатона ограничена снизу величиной k . Ясно, что в отличие от диссипатонов системы РД в нашем случае не существует критического значения сверху для скорости диссипатона.

Для плотностей массы и импульса имеем выражения

$$\rho = e^+ e^- = 2 \partial_x \ln \frac{f^+}{f^-}, \quad (4.4)$$

$$p = \frac{1}{2} (e^+ \partial_x e^- - e^- \partial_x e^+ + (e^+ e^-)^2) = \partial_x^2 \ln f^+ f^-, \quad (4.5)$$

которые позволяют вычислять соответствующие сохраняющиеся величины

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho dx = 2 \ln \frac{f^+}{f^-} \Big|_{-\infty}^{+\infty}, \quad P = \int_{-\infty}^{+\infty} p dx = \partial_x \ln f^+ f^- \Big|_{-\infty}^{+\infty}. \quad (4.6)$$

Тогда для массы и импульса одиночного диссипатона получаем

$$M = \ln \left(\frac{v + k}{v - k} \right)^2, \quad P = k. \quad (4.7)$$

Благодаря соотношению $|v| > |k|$ масса M положительна. Переписывая импульс в каноническом виде $k = \mu v$, находим выражение для эффективной массы $\mu = \operatorname{th}(M/4)$.

4.2. Геометрическая интерпретация. Рассматриваемая модель имеет геометрическую интерпретацию как двумерное псевдориманово пространство-время с постоянной скалярной кривизной $R = \Lambda < 0$ [2], [3]. Эта модель известна как модель гравитации Джакива–Тейтельбойма [1], которая допускает калибровочную формулировку как ВФ-теория. Калибровочные потенциалы суть диады Картана–Эйнштейна $e_\mu^\pm$, так что $g_{\mu\nu} = (e_\mu^+ e_\nu^- + e_\nu^+ e_\mu^-)/2$ – метрика, ω_μ , $\mu = 0, 1$, – спиновая связность. Тогда уравнения движения

$$D_\mu^\mp e_\nu^\pm = D_\nu^\mp e_\mu^\pm, \quad (4.8)$$

$$\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu = -\frac{\Lambda}{4} (e_\mu^+ e_\nu^- - e_\nu^+ e_\mu^-), \quad (4.9)$$

где $D_\mu^\pm = \partial_\mu \pm \omega_\mu$, представляют собой условия отсутствия кручения и постоянства кривизны, соответственно. Зафиксируем калибровку и соответствующую эволюцию, наложив следующие условия на множители Лагранжа:

$$e_0^\pm = \pm \left(\partial_1 \mp \frac{\Lambda}{4} \mp e^+ e^- \right) e^\pm, \quad (4.10)$$

и спинорные связности:

$$\omega_0 = \frac{\Lambda^2}{16} + \frac{\Lambda}{4} e^+ e^-, \quad \omega_1 = -\frac{\Lambda}{4}. \quad (4.11)$$

Тогда после отождествления $(t, x) = (x_0, x_1)$ система (4.8), (4.9) сводится к системе РДП (2.7). Ясно, что в отличие от системы РД [3] в нашем случае скалярная кривизна не входит в уравнения движения, но по-прежнему присутствует в линейной задаче. Более того, она имеет смысл квадрата спектрального параметра $\Lambda = -8\lambda^2$.

Компонента g_{00} метрического тензора выражается через определенные формулами (3.1) новые переменные следующим образом:

$$g_{00} = e_0^+ e_0^- = - \left(\partial_1 - \frac{\Lambda}{4} \right) Q^+ \left(\partial_1 + \frac{\Lambda}{4} \right) Q^-. \quad (4.12)$$

Вычисляя эту компоненту для диссипатона (4.2), находим, что горизонт событий $g_{00} = 0$ существует только для скоростей из ограниченного интервала $-k + (-\Lambda/2) < v < k + (-\Lambda/2)$ на расстоянии

$$x_H - vt_H - x_{0H} = \frac{1}{k} \ln \frac{4k^2(k - v - \Lambda/2)}{(k + v)(k + v + \Lambda/2)}. \quad (4.13)$$

В отличие от диссипатона системы РД с двумя симметричными горизонтами событий, которые соответствуют двум направлениям движения, в данном случае мы имеем только одно направление движения и называем соответствующий единственный горизонт событий *киральным горизонтом событий*.

5. РЕЗОНАНСНЫЕ СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ МКП-II

Рассмотрим теперь решение системы (3.9), которое дает $(2+1)$ -мерное решение уравнения МКП-II. Для односолитонного решения имеем

$$g^\pm = e^{\eta_1^\pm}, \quad f^\pm = 1 + e^{\phi_{11}^\pm} e^{\eta_1^+ + \eta_1^-}, \quad e^{\phi_{11}^\pm} = \pm \frac{k_1^\mp}{2(k_1^+ + k_1^-)^2}, \quad (5.1)$$

где $\eta_1^\pm = k_1^\pm x \pm (k_1^\pm)^2 y + (k_1^\pm)^3 t + \eta_0^\pm$. Условие регулярности требует $k_1^+ \leq 0$, $k_1^- \geq 0$. В таком случае

$$U(x, y, t) = \frac{2k^2}{\sqrt{p^2 - k^2} \operatorname{ch} k(x - py + (k^2 + 3p^2)t/4 - a_0) + p}, \quad (5.2)$$

где $k = k_1^+ + k_1^-$, $p = k_1^- - k_1^+ > 0$ и ограниченный снизу параметр $p^2 > k^2$ положителен. Геометрический смысл этого параметра заключается в том, что $p^{-1} = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол

наклона солитонной прямой к оси x . В силу условия $p > 0$ направление этой прямой заключено в пределах $0 < \alpha < \pi/2$ (это пространственный аналог кирального свойства диссипатона в $(1+1)$ -мерном пространстве для НУШП [5], который распространяется только в одном направлении). Скорость солитона представляет собой двумерный вектор $\mathbf{v} = (\omega, -\omega/p)$, $\omega = (k^2 + 3p^2)/4$, направленный под углом γ к солитонной прямой, $\cos \gamma = 1 - 1/p^2$. При $p = 1$ скорость солитона перпендикулярна этой прямой.

Для двухсолитонного решения имеем

$$g^{\pm} = e^{\eta_1^{\pm}} + e^{\eta_2^{\pm}} + \alpha_1^{\pm} e^{\eta_2^{+} + \eta_2^{-} + \eta_1^{\pm}} + \alpha_2^{\pm} e^{\eta_1^{+} + \eta_1^{-} + \eta_2^{\pm}},$$

$$f^{\pm} = 1 + \sum_{i,j=1}^2 e^{\phi_{ij}^{\pm}} e^{\eta_i^{+} + \eta_j^{-}} + \beta^{\pm} e^{\eta_1^{+} + \eta_1^{-} + \eta_2^{+} + \eta_2^{-}},$$

где $\eta_i^{\pm} = k_i^{\pm} x \pm (k_i^{\pm})^2 y + (k_i^{\pm})^3 t + \eta_{i0}^{\pm}$, $k_{ij}^{nm} \equiv (k_i^n + k_j^m)$ и

$$\alpha_1^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \frac{k_2^{\mp} (k_1^{\pm} - k_2^{\pm})^2}{(k_{22}^{+-})^2 (k_{12}^{\pm\mp})^2}, \quad \alpha_2^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \frac{k_1^{\mp} (k_1^{\pm} - k_2^{\pm})^2}{(k_{11}^{+-})^2 (k_{21}^{\pm\mp})^2},$$

$$\beta^{\pm} = \frac{(k_1^{+} - k_2^{+})^2 (k_1^{-} - k_2^{-})^2}{4(k_{11}^{+-} k_{12}^{+-} k_{21}^{+-} k_{22}^{+-})^2} k_1^{\mp} k_2^{\mp},$$

$$e^{\phi_{ii}^{\pm}} = \pm \frac{k_i^{\mp}}{2(k_{ii}^{+-})^2}, \quad e^{\phi_{ij}^{+}} = \frac{k_j^{-}}{2(k_{ij}^{+-})^2}, \quad e^{\phi_{ij}^{-}} = -\frac{k_i^{+}}{2(k_{ij}^{+-})^2}.$$

Условия регулярности в данном случае такие же, как для односолитонного случая: $k_i^{+} \leq 0$, $k_i^{-} \geq 0$. Это решение описывает столкновение двух солитонов, распространяющихся в плоскости и образующих, при некоторых значениях параметров, резонансные состояния. Эволюция этого резонанса во времени представлена на рисунке.

а

б

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы построили виртуальные солитонные резонансные решения уравнения мКП-II на основе диссипативных солитонов $(1+1)$ -мерных уравнений, в качестве которых выступали система уравнений РДП и следующая за ней в $SL(2, \mathbb{R})$ -иерархии КН система уравнений. Отличие от резонанса КП-II заключается в дополнительных ограничениях на ориентацию солитонов, возникающих вследствие условий регулярности.

На конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. II”, когда данная работа была уже завершена, Конопельченко обратил наше внимание на работы [9], [10], в которых с помощью редукции симметрии $(2+1)$ -мерных моделей устанавливались связи между модифицированным уравнением Кадомцева–Петвиашвили (мКП) и $(1+1)$ -мерными моделями. Однако в работе [9] установлена лишь связь уравнения мКП с иерархией Бюргерса, а работа [10] связывает уравнение мКП с НУШП в виде Накамуры–Чена, но не в виде КН. Кроме того, эти работы не содержат результатов по резонансным солитонам.

Благодарности. Авторы благодарны Б. Конопельченко за полезные замечания и Ю. Кодаме за плодотворные обсуждения. Работа была частично поддержана Institute of Mathematics, Academia Sinica, Taipei, Taiwan и Izmir Institute of Technology, Izmir, Turkey.

Список литературы

- [1] *R. Jackiw*. Liouville field theory: a two-dimensional model for gravity. In: Quantum Theory of Gravity (Essays in Honour of B. De Witt). Ed. S. Christensen. Bristol: Hilger, 1984. P. 403; *C. Teitelboim*. The Hamiltonian structure of two-dimensional spacetime and its relation with the conformal anomaly. In: Quantum Theory of Gravity (Essays in Honour of B. De Witt). Ed. S. Christensen. Bristol: Hilger, 1984. P. 327.
- [2] *L. Martina, O. K. Pashaev, G. Soliani*. Class. Q. Grav. 1997. V. 14. P. 3179; Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 084025.
- [3] *O. K. Pashaev, J.-H. Lee*. Mod. Phys. Lett. A. 2002. V. 17. P. 1601.
- [4] *O. K. Пашаев, М. Л. Француско*. Degenerate Four Virtual Soliton Resonance for КП-II ТМФ. 2005. Т. 144. № 1. С. 162.
- [5] *J.-H. Lee, C.-K. Lin, O. K. Pashaev*. Equivalence relation and Bilinear representation for derivative NLS type equations. In: Proc. of the Workshop on Nonlinearity, Integrability and All That: Twenty Years after NEEDS'79. (Lecce, Italy, July 1–10, 1999). Eds. M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli, B. Prinari, G. Soliani 20 years after NEEDS'79, Proc. of Conference. Singapore: World Scientific, 2000. P. 175.
- [6] *O. K. Pashaev, J.-H. Lee*. ANZIAM. 2002. V. 44. P. 73.
- [7] *Z. Yan*. Chaos, Solitons and Fractals. 2002. V. 14. P. 45.
- [8] *J.-H. Lee*. Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 314(1). P. 107.
- [9] *B. Konopelchenko, W. Strampp*. J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 3676.
- [10] *Y. Cheng, Y.-S. Li*. J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 419.