Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Муссо, А. Б. Шабат, Элементарные преобразования Дарбу и факторизация,
ТМФ, 2005, том 144, номер 1, 143–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1840>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:07:14

© 2005 г.

Ф. Муссо*, А.Б. Шабат*,†

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ И ФАКТОРИЗАЦИЯ

Доказана общая теорема о факторизации полиномиальных матриц. Теорема используется для редукции полиномиальных матриц Дарбу к линейным. Обсуждаются некоторые новые примеры линейных матриц Дарбу.

Ключевые слова: преобразования Дарбу, уравнения Янга–Бакстера, спектральная задача Захарова–Шабата.

1. ВВЕДЕНИЕ

В непрерывном случае для спектральных задач с $(m \times m)$ -матричными полиномиальными по λ потенциалами U ,

$$\frac{d}{dx}\Psi = U(x, \lambda)\Psi, \quad (1)$$

конструкцию преобразования Дарбу

$$\Psi \rightarrow \hat{\Psi} = Q(x, \lambda)\Psi, \quad \frac{d}{dx}Q = \hat{U}Q - QU \Rightarrow \frac{d}{dx}\hat{\Psi} = \hat{U}(x, \lambda)\hat{\Psi} \quad (2)$$

можно вывести из *элементарных* преобразований Дарбу

$$\hat{\Psi} = Q\Psi, \quad Q(x, \lambda) = (\lambda - \alpha)P(x) + (\lambda - \beta)(E - P(x)), \quad P^2 = P. \quad (3)$$

Здесь проектор P однозначно определен нулевым пространством оператора Q :

$$\text{Ker } Q|_{\lambda=\alpha} = \text{Im } P = M, \quad \text{Ker } Q|_{\lambda=\beta} = \text{Ker } P = N,$$

причем должны выполняться уравнения

$$\frac{d}{dx}M(x) = U(x, \alpha)M(x), \quad \frac{d}{dx}N(x) = U(x, \beta)N(x). \quad (4)$$

*Dipartimento di Fisica E. Amaldi, Università degli Studi di Roma Tre, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Roma Tre, Via della Vasca Navale 84, 00146, Rome, Italy. E-mail: musso@fis.uniroma3.it; shabat@fis.uniroma3.it

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, г. Черноголовка, Московская обл., Россия. E-mail: shabat@itp.ac.ru

Нули детерминанта определяют собственные значения $\lambda = \alpha, \beta$, вводимые преобразованием Дарбу (3). В частности, для спектральных задач Захарова–Шабата (см., например, [1])

$$U = \lambda \sigma + q(x), \quad q(x) = [\sigma, \tilde{q}(x)], \quad (5)$$

где σ – постоянная матрица с простыми собственными значениями, функция $\hat{\Psi}$ удовлетворяет уравнению (1) с потенциалом

$$\hat{U} = U + [Q, \sigma].$$

Случай

$$\beta = \bar{\alpha}, \quad P^* = P, \quad (6)$$

где $*$ обозначает эрмитово сопряжение, соответствует самосопряженным потенциалам

$$U^*(x, \bar{\lambda}) = U(\lambda, x), \quad q^* = q.$$

Теорема из раздела 2 дает необходимые и достаточные условия на матричный полином $A(\lambda)$ степени N , для того чтобы он представлялся как произведение N полиномов первого порядка¹⁾ (3), (6). В применении к преобразованиям Дарбу такая факторизация $A = Q_N \dots Q_1$ приводит к последовательности спектральных задач типа (1),

$$\frac{d}{dx} \Psi_j = U_j(x, \lambda) \Psi_j, \quad \Psi_{j+1} = Q_j(x, \lambda) \Psi_j, \quad (7)$$

связанных друг с другом преобразованиями (3). Здесь следует заметить, что композиция преобразований Дарбу $\Psi_{j+1} = B_j \Psi_j$ также является преобразованием Дарбу, поскольку (ср. с (2))

$$B_{j,x} = U_{j+1} B_j - B_j U_j, \quad B \stackrel{\text{def}}{=} B_n \dots B_1 \Rightarrow B_x = U_{n+1} B - B U_1. \quad (8)$$

Для скалярного дифференциального оператора A элементарное преобразование Дарбу $\psi \rightarrow \hat{\psi}$ определяется дифференциальным оператором первого порядка:

$$A\psi = \lambda\psi, \quad \hat{\psi} = (D - f)\psi, \quad \hat{A}\hat{\psi} = \lambda\hat{\psi}.$$

Для оператора A порядка N аналог этой теоремы дает формулу

$$A\psi = \frac{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_N, \psi \rangle}{\langle \varphi_1, \dots, \varphi_N \rangle} = (D - f_N) \dots (D - f_2)(D - f_1)\psi, \quad (9)$$

где $\varphi_j \in \text{Ker } A$ и

$$\langle \varphi_1, \dots, \varphi_l \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \det(D^{k-1}(\varphi_j)), \quad j, k = 1, \dots, l, \quad D = \frac{d}{dx}.$$

¹⁾ Аналог этой теоремы недавно использовался в работе [2] для построения приближенного решения задачи Римана–Гильберта, см. также [3].

Доказательство соотношения (9) получается индукцией (ср. с теоремой раздела 2), основанной на тождестве, которое верно для любых гладких функций φ_j :

$$\langle \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle = \varphi_1 \langle \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_m \rangle, \quad \hat{\varphi}_j = (D - f_1)\varphi_j, \quad f_1 = D \ln \varphi_1.$$

В формуле (9) множители $D - f_j$ неприводимы, потому что они представляют собой дифференциальные операторы первого порядка. Такое свойство оказывается критически важным в теории одевающих цепочек [4]–[6], где функции f_j используются как основные динамические переменные. С другой стороны, преобразование Дарбу (3) можно факторизовать в композицию двух более элементарных с соответствующими нулевыми пространствами $\text{Ker } P$ и $\text{Im } P$. При переформулировке в терминах соответствующих матриц B_1 и B_2 эта факторизация приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \Psi(m+1, n) &= B_1(m, n)\Psi(m, n), & \Psi(m, n+1) &= B_2(m, n)\Psi(m, n), \\ \Psi(m+1, n+1) &= Q(m, n)\Psi(m, n), & Q &= B_1 \circ B_2, \end{aligned}$$

где по определению

$$Q = B_1 \circ B_2 \Leftrightarrow Q(m, n) = B_1(m, n+1)B_2(m, n) = B_2(m+1, n)B_1(m, n). \quad (10)$$

Уравнение (10) показывает, что, в отличие от непрерывного случая (8), преобразования Дарбу и исходная дискретная спектральная задача имеют одну и ту же природу и их можно заменить друг на друга.

Таким образом, задача факторизации (3), рассматриваемая в разделе 3, приводит к дискретным спектральным задачам с потенциалами, линейными по спектральному параметру λ . Мы ограничимся простейшим (2×2) -случаем, но без предположения об ортогональности проектора P . Непрерывная независимая переменная x будет играть роль параметра в наших рассуждениях.

В заключение раздела 3 рассматриваются линейные по спектральному параметру λ решения уравнения Янга–Бакстера.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Для доказательства того факта, что формула (3) дает общий вид линейного сомножителя, достаточно доказать, что произведение N матриц (3) дает полином общего вида N -го порядка по λ . Мы используем характеристическое свойство полиномов (3):

$$Q_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda - \alpha)P + (\lambda - \beta)(E - P) \Rightarrow Q_{\alpha\beta}Q_{\beta\alpha} = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)E, \quad (11)$$

где E – единичная матрица. В случае (6) имеем

$$Q(\bar{\lambda})^*Q(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \bar{\alpha})E,$$

и такое свойство, очевидно, выполнено для произведения матриц (3) с ортогональными проекторами $P^* = P$.

ТЕОРЕМА. Пусть $A(\lambda) - (m \times m)$ -матрица с полиномиальными по λ элементами, удовлетворяющими условиям

$$A(\bar{\lambda})^* A(\lambda) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \alpha_j)(\lambda - \bar{\alpha}_j)E, \quad (12)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^N} = E. \quad (13)$$

Тогда $A(\lambda)$ можно факторизовать как

$$A(\lambda) = \prod_{j=1}^N ((\lambda - \alpha_j)P_{\alpha_j} + (\lambda - \bar{\alpha}_j)(E - P_{\alpha_j})), \quad (14)$$

где P_{α_j} — эрмитовы проекторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по N . Если $N = 0$, то из (13) и теоремы Лиувилля следует, что $A(\lambda) = E$.

Покажем теперь, что если теорема выполнена для $N - 1$, то она выполнена и для N . Из (12) и (13) следует, что

$$\det(A(\lambda)) = \prod_{j=1}^N (\lambda - \alpha_j)^{k_j} (\lambda - \bar{\alpha}_j)^{m-k_j}. \quad (15)$$

Выделим нуль α_j детерминанта $\det(A(\lambda))$; из (15) следует, что

$$\begin{aligned} \dim(\text{Ker}(A(\alpha_j))) &= k_j, \\ \dim(\text{Ker}(A(\bar{\alpha}_j))) &= m - k_j. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть $|v_i\rangle_{i=1}^{k_j}$ и $|w_i\rangle_{i=1}^{m-k_j}$ — ортонормированные базисы для $\text{Ker}(A(\alpha_j))$ и $\text{Ker}(A(\bar{\alpha}_j))$, соответственно. Пусть P_{α_j} и $P_{\bar{\alpha}_j}$ обозначают эрмитовы проекторы,

$$P_{\alpha_j} \equiv \sum_{i=1}^{k_j} |v_i\rangle\langle v_i|, \quad (17)$$

$$P_{\bar{\alpha}_j} \equiv \sum_{i=1}^{m-k_j} |w_i\rangle\langle w_i|. \quad (18)$$

Докажем, что

$$P_{\bar{\alpha}_j} = (E - P_{\alpha_j}). \quad (19)$$

Доказательство уравнения (19) эквивалентно доказательству того факта, что $\mathbb{C}^m$ допускает ортогональное разложение

$$\mathbb{C}^m = \text{Ker}(A(\alpha_j)) \oplus \text{Ker}(A(\bar{\alpha}_j)). \quad (20)$$

Из (12) следует, что

$$A(\alpha_j)A(\bar{\alpha}_j)^* = 0, \quad (21)$$

т. е.

$$\text{Im}(A(\bar{\alpha}_j)^*) \subset \text{Ker}(A(\alpha_j)), \quad (22)$$

однако из (16) имеем

$$\begin{aligned} \dim(\text{Im}(A(\bar{\alpha}_j)^*)) &= m - \dim(\text{Ker}(A(\bar{\alpha}_j))) = k_j, \\ \dim(\text{Ker}(A(\alpha_j))) &= k_j, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\text{Im}(A(\bar{\alpha}_j)^*) = \text{Ker}(A(\alpha_j)). \quad (23)$$

Уравнение (23) эквивалентно уравнению

$$\text{Ker}(A(\bar{\alpha}_j)) = \text{Im}(A(\alpha_j)^*), \quad (24)$$

откуда следует, что

$$\mathbb{C}^m = \text{Ker}(A(\alpha_j)) \oplus \text{Im}(A(\alpha_j)^*) = \text{Ker}(A(\alpha_j)) \oplus \text{Ker}(A(\bar{\alpha}_j)).$$

Далее, матрица

$$A(\lambda)[(\lambda - \bar{\alpha}_j)P_{\alpha_j} + (\lambda - \alpha_j)(E - P_{\alpha_j})] \quad (25)$$

тождественно обращается в нуль при $\lambda = \alpha_j$ и $\lambda = \bar{\alpha}_j$. Следовательно, можно записать

$$A(\lambda)[(\lambda - \bar{\alpha}_j)P_{\alpha_j} + (\lambda - \alpha_j)(E - P_{\alpha_j})] = (\lambda - \alpha_j)(\lambda - \bar{\alpha}_j)\hat{A}(\lambda) \quad (26)$$

с некоторой матрицей $\hat{A}(\lambda)$. Тогда

$$A(\lambda) = \hat{A}(\lambda)[(\lambda - \alpha_j)P_{\alpha_j} + (\lambda - \bar{\alpha}_j)(E - P_{\alpha_j})]. \quad (27)$$

Поскольку P_{α_j} является эрмитовым, заключаем, что $\hat{A}(\lambda)$ удовлетворяет равенству

$$\hat{A}(\bar{\lambda})^* \hat{A}(\lambda) = \prod_{k \neq j}^N (\lambda - \alpha_k)(\lambda - \bar{\alpha}_k)E. \quad (28)$$

Более того, выполнено соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^N} = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\hat{A}(\lambda)}{\lambda^{N-1}} = E. \quad (29)$$

В случае, когда нули $\alpha_j \neq \alpha_k$ различны, ортогональные проекторы P_{α_j} в формуле (14) однозначно определяются подпространствами

$$M_j \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } A(\lambda)|_{\lambda=\alpha_j} \quad (30)$$

и упорядочением нулей $\alpha_1, \dots, \alpha_N$. Действительно, при $N = 2$, например, имеем

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda)Q_2(\lambda), \quad Q_j(\lambda) = (\lambda - \alpha_j)P_{\alpha_j} + (\lambda - \bar{\alpha}_j)(E - P_{\alpha_j}), \quad j = 1, 2,$$

а кроме того, $P_{\alpha_j}^* = P_{\alpha_j}$ и

$$\text{Im } P_{\alpha_2} = \text{Ker}(E - P_{\alpha_2}) = \text{Ker } Q_2(\alpha_2) = \text{Ker } Q_1(\alpha_2)Q_2(\alpha_2) = M_2,$$

поскольку $\det Q_1(\alpha_2) \neq 0$. Аналогичным образом

$$\text{Im } P_{\alpha_1} = Q_2(\alpha_1)M_1, \quad (31)$$

поскольку $M_1 = \text{Ker}(E - P_{\alpha_1})Q_2(\alpha_1)$.

Для построения одевающей цепочки следует далее факторизовать (см. раздел 3) базисное преобразование Дарбу (11) как

$$Q_{\alpha\beta}(\lambda) = (\lambda - \alpha)P_{\alpha\beta} + (\lambda - \beta)(E - P_{\alpha\beta}) = B_2(\lambda)B_1(\lambda), \quad (32)$$

где два множителя $B_j(\lambda) = \sigma_j\lambda + b_j$ линейны по λ и

$$\det Q_{\alpha\beta}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k(\lambda - \beta)^{m-k} \Rightarrow \det B_1 = (\lambda - \alpha)^k, \quad \det B_2 = (\lambda - \beta)^{m-k}.$$

Ясно, что

$$\text{Ker } B_1(\beta) = \text{Im } B_2(\alpha) = \text{Ker } P_{\alpha\beta}, \quad (33)$$

поскольку в силу (32) и того факта, что $\det B_1(\alpha) \neq 0$, имеем

$$Q_{\alpha\beta}(\alpha) = (\alpha - \beta)(E - P_{\alpha\beta}) = B_2(\alpha)B_1(\alpha) \Rightarrow \text{Im } B_2(\alpha) = \text{Im}(E - P_{\alpha\beta}) = \text{Ker } P_{\alpha\beta}.$$

3. СЛУЧАЙ 2×2

В этом разделе мы рассмотрим некоторые интересные с нашей точки зрения классы линейных по λ (2×2) -матриц, связанных с (3). Прежде всего рассмотрим цепочку матриц B_j , $j \in \mathbb{Z}$:

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda + h_j & \frac{1}{2}u_j \\ \frac{1}{2}v_{j+1} & 1 \end{pmatrix}, \quad h_j = \frac{1}{4}u_j v_{j+1} - \beta_j \quad \text{для нечетных } j, \quad (34)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2}u_{j+1} \\ -\frac{1}{2}v_j & \lambda + h_j \end{pmatrix}, \quad h_j = \frac{1}{4}v_j u_{j+1} - \beta_j \quad \text{для четных } j. \quad (35)$$

Таким образом,

$$\det B_j = \lambda - \beta_j \quad \text{для всех } j,$$

и (ср. с (33)) легко видеть, что

$$\text{Ker } B_1|_{\lambda=\beta_1} = \text{Im } B_2|_{\lambda=\beta_2}, \quad \text{Ker } B_2|_{\lambda=\beta_2} = \text{Im } B_3|_{\lambda=\beta_3}, \quad \dots$$

Более того, эти матрицы удовлетворяют условиям совместности (10) (см. лемму ниже) и равенствам

$$B_2 B_1 = \lambda - \beta_1 + \beta_{12} P_{12}, \quad B_3 B_2 = \lambda - \beta_2 + \beta_{23} P_{23}, \dots, \quad \beta_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \beta_i - \beta_j,$$

где $P_{ij}^2 = P_{ij}$ – проекторы. В частности,

$$\begin{aligned} \beta_{12} P_{12} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} v_2 u_{13} & \frac{1}{2} u_{13} \\ \frac{1}{2} v_2 (\beta_{12} - \frac{1}{4} v_2 u_{13}) & \beta_{12} - \frac{1}{4} v_2 u_{13} \end{pmatrix}, \quad u_{13} \stackrel{\text{def}}{=} u_1 - u_3, \\ \beta_{23} P_{23} &= \begin{pmatrix} \beta_{23} + \frac{1}{4} u_2 v_{42} & \frac{1}{2} u_3 (\beta_{32} + \frac{1}{4} u_2 v_{24}) \\ \frac{1}{2} v_{42} & \frac{1}{4} u_3 v_{24} \end{pmatrix}, \quad v_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} v_i - v_j. \end{aligned}$$

Таким образом, эти матрицы обеспечивают факторизацию элементарных преобразований Дарбу (3). Можно заметить, что для нечетного i произведение $B_j B_i$, $j = i + 1$, зависит от v_j , $u_{ij} = u_i - u_j$, а для четного i – от разности $v_{i+2} - v_{i+1}$ и u_{i+1} .

В отличие от факторизации, определенной в теореме, элементы матриц (34) и (35) выражаются *непосредственно* через потенциалы

$$U_j = \begin{pmatrix} \lambda & u_j \\ v_j & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda \sigma + q_j$$

(2×2)-спектральной задачи Захарова–Шабата

$$\psi_x^1 - \lambda \psi^1 = u \psi^2, \quad \psi_x^2 + \lambda \psi^2 = v \psi^1, \quad \text{или} \quad \Psi_x = U \Psi. \quad (36)$$

Таким образом, подстановка матриц (34) и (35) в уравнения (8) приводит к одевающей цепочке для спектральной задачи (36):

$$(D + 2\beta_j) v_{j+1} + 2v_j = \frac{1}{2} u_j v_{j+1}^2, \quad (D - 2\beta_j) u_j - 2u_{j+1} = -\frac{1}{2} u_j^2 v_{j+1}, \quad (37)$$

$$(D - 2\beta_j) u_{j+1} - 2u_j = -\frac{1}{2} u_{j+1}^2 v_j, \quad (D + 2\beta_j) v_j + 2v_{j+1} = \frac{1}{2} u_{j+1} v_j^2. \quad (38)$$

Первый случай соответствует матрицам (34), а второй – матрицам (35).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае общей спектральной задачи Захарова–Шабата (5) можно рассмотреть преобразования Дарбу (8) вида

$$B_j = \lambda \sigma_j + b_j, \quad U_j = \lambda \sigma + q_j.$$

Собирая в (8) квадратичные и линейные по λ члены, находим

$$[\sigma, \sigma_j] = 0, \quad \sigma_{j,x} = [\sigma, A_j] + q_{j+1} \sigma_j - \sigma_j q_j.$$

Отсюда следует, что $\sigma_{j,x} = 0$, поскольку потенциалы q_j являются недиагональными в базисе, где матрица σ диагональна. Таким образом, матрица σ_j должна не зависеть от x и может быть любой диагональной матрицей в этом базисе.

Возвращаясь к спектральной задаче (36), покажем, как, начиная с (u_1, v_1) , можно построить цепочку матриц Дарбу B_j , преобразующих уравнение (36) с потенциалом U_j в уравнение с потенциалом U_{j+1} , используя решение соответствующей спектральной задачи для уравнения Риккати:

$$\rho_x = 2\lambda \rho - v_j \rho^2 + u_j, \quad \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\psi^1}{\psi^2}. \quad (39)$$

Это обстоятельство подчеркивает подобие рассматриваемого случая с одевающей цепочкой из работы [4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Имеется взаимно однозначное соответствие между матрицами (34), (35) и решениями уравнения Риккати (39) при $\lambda = \beta_j$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На первом шаге нам надо найти потенциалы u_2 и v_2 . Функция v_2 определяется посредством (37) как решение ОДУ

$$(D + 2\beta_1)v_2 + 2v_1 = \frac{1}{2}u_1v_2^2,$$

которое масштабным преобразованием $v_2 = -2/\rho$ редуцируется к уравнению (39) при $\lambda = \beta_1$. Для функции u_2 теперь получаем точную формулу

$$2u_2 = u_{1,x} - 2\beta_1u_1 + \frac{1}{2}u_1^2v_2.$$

На следующем шаге найдем $u_3 = 2/\rho$, решая уравнение (39) при $\lambda = \beta_2$. Эта функция удовлетворяет первому из уравнений (38):

$$(D - 2\beta_2)u_3 - 2u_2 = \frac{1}{2}u_3^2v_2,$$

тогда как v_3 определяется вторым из уравнений (38). Таким образом, в обоих случаях система уравнений (37) и (38) редуцируется к уравнению Риккати (39).

Задача совместности. Будем игнорировать зависимость от непрерывной независимой переменной x и рассмотрим более общие (по сравнению с (34), (35)) линейные по λ матрицы, удовлетворяющие условиям, аналогичным (10). Имея в виду применения, обозначим одну из матриц в (10) как $A(n, \lambda)$, а вторую рассмотрим как преобразование Дарбу для дискретной спектральной задачи, определенной с помощью матрицы A :

$$\Psi_{n+1} = A(n, \lambda)\Psi_n, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda + c & a \\ b & \alpha \end{pmatrix}, \quad \widehat{\Psi} = B\Psi, \quad \widehat{\Psi}_{n+1} = \widehat{A}(n, \lambda)\widehat{\Psi}. \quad (40)$$

Если спектральная задача (40) является “хорошей”²⁾, то должно существовать нетривиальное преобразование Дарбу с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & f \\ g & h - \lambda \end{pmatrix}, \quad (41)$$

а уравнения совместности $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$, где $T_1\Psi = A\Psi$, $T_2\Psi = B\Psi$ (ср. с (10)) приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} (\lambda + \hat{c})\varepsilon + g\hat{a} &= \varepsilon'(\lambda + c) + f'b, & (\lambda + \hat{c})f + \hat{a}(h - \lambda) &= \varepsilon'a + f'\alpha, \\ \varepsilon\hat{b} + \hat{\alpha}g &= (\lambda + c)g' + b(h' - \lambda), & \hat{\alpha}(h - \lambda)\varepsilon + f\hat{b} &= \alpha(h' - \lambda) + g'a, \end{aligned}$$

где $B' \stackrel{\text{def}}{=} T_1(B)$ и $\hat{A} \stackrel{\text{def}}{=} T_2(A)$. Видим, что

$$g' = T_1(g) = b, \quad \hat{a} = T_2(a) = f, \quad \varepsilon' = \varepsilon, \quad \hat{\alpha} = \alpha,$$

и, таким образом, уравнения совместности сводятся к системе

$$\begin{cases} b(h' + c) = \varepsilon\hat{b} + \alpha g, & \varepsilon(\hat{c} - c) = f'g' - fg, \\ \hat{a}(h + \hat{c}) = \varepsilon a + \alpha f', & \alpha(h' - h) = \hat{a}\hat{b} - ab. \end{cases} \quad (42)$$

Теперь легко проверить, что имеет место следующая лемма.

²⁾ Частный случай A при $\alpha = 0$ связан с цепочкой Тоды.

ЛЕММА. Матрицы B_j и B_{j+1} , определенные с помощью матриц (34), (35), удовлетворяют уравнениям совместности (42) для любого j .

В общем случае находим (ср. с (10))

$$A \circ B = \begin{pmatrix} \varepsilon(\lambda - \delta + h^\dagger) & \hat{a}h^\dagger \\ bh^\dagger & \alpha(h^\dagger - \lambda + \beta) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} h^\dagger &= \hat{c} + h = c + h', & ab &= \alpha(c + \beta), & fg &= \varepsilon(h - \delta), \\ \det A &= \alpha(\lambda - \beta_1), & \det B &= \varepsilon(\beta_2 - \lambda), \end{aligned}$$

и, таким образом, лемма соответствует случаю $\varepsilon + \alpha = 0$.

Матрица Дарбу B в (40) двойственна матрице A , и (в отличие от непрерывного случая) ее можно заменить на $A \circ B$. Это свойство позволяет использовать матрицу A как отправную точку в спектральной задаче (40) при $\alpha = 0$ (см. [5]).

R -матричная интерлюдия. При исследовании примеров приведенной выше теоремы о факторизации мы заметили, что некоторые из них являются также решениями квантового уравнения Янга–Бакстера

$$R_{12}(\lambda - \mu)R_{13}(\lambda)R_{23}(\mu) = R_{23}(\mu)R_{13}(\lambda)R_{12}(\lambda - \mu). \quad (43)$$

Здесь $R_{12} = R \otimes Id$, $R_{23} = Id \otimes R$ и $R_{13} = (Id \otimes P)R_{12}(Id \otimes P)$ действует тривиально на втором из трех пространств, а P — обычный оператор перестановки

$$P(u \otimes v) \stackrel{\text{def}}{=} v \otimes u.$$

Таким образом, в простейшем (2×2) -случае (43) является уравнением на (4×4) -матрицу R с хорошо известным решением вида

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + i\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & i\eta & 0 \\ 0 & i\eta & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda + i\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}[(\lambda + i\eta)P + (\lambda - i\eta)(1 - P)], \quad (44)$$

которое соответствует спиновой XXX -цепочке. Поскольку P — проектор, его можно записать в виде

$$P = \frac{|a\rangle\langle b|}{\langle a|b\rangle}, \quad 2\langle a| = \langle b| = (0, 1, -1, 0). \quad (45)$$

Мы обнаружили, что существуют два других возможных выбора векторов $\langle a|$ и $\langle b|$ в (45), так чтобы R -матрица вида

$$R(\lambda) = (\lambda + i\eta)P + (\lambda - i\eta)(1 - P) \quad (46)$$

удовлетворяла уравнению Янга–Бакстера, а именно,

$$\begin{aligned}\langle a| &= (\alpha^{-1}, 1, 1, \alpha), & \langle b| &= (\beta^{-1}, 1, 1, \beta), \\ \langle a| &= (-1, \alpha, \beta, -\beta\alpha), & \langle b| &= (\beta\alpha, \alpha, \beta, 1),\end{aligned}$$

где α, β – два вещественных параметра.

Имея два новых решения уравнения Янга–Бакстера, можно построить связанные с ними матрицы Лакса и из них, наконец, две матрицы монодромии. Далее, взяв следы матриц монодромии, получим два набора коммутирующих квантовых наблюдаемых. К сожалению, среди элементов каждого набора имеются функциональные зависимости. Поэтому эти два новых решения не приводят к новым квантовым интегрируемым системам.

Дальнейшие исследования квантового уравнения Янга–Бакстера показали, что если мы обобщаем R -матрицу вида (46) путем отказа от условия нормировки (13), то можно найти другие решения, линейные по спектральному параметру λ . Мы заметили, что R можно тогда записать в виде $R = \lambda A + B$, где A и B должны быть решениями двумерного постоянного квантового уравнения Янга–Бакстера; все такие решения были найдены в работе [7].

Пример решения, который, на наш взгляд, может представлять некоторый интерес, таков:

$$R(\lambda) = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda + \eta & 0 \\ 0 & \lambda + \eta & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}, \quad R^{-1} = \frac{1}{\lambda^2 - \eta^2} \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - \eta & 0 \\ 0 & \lambda - \eta & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & -\eta \end{pmatrix}.$$

Работа в этом направлении продолжается.

Благодарности. Мы хотели бы поблагодарить Дечию Леви и Антонио Дегаспериса за полезные обсуждения и интерес к данной работе.

Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 04-01-00403) и Президентской программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ 1716.2003.1).

Список литературы

- [1] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 3. С. 13–22.
- [2] А. В. Домрин. Докл. РАН. 2003. Т. 390. С. 301–303.
- [3] И. Т. Хабибуллин, А. Г. Шагалов. ТМФ. 1990. Т. 83. № 3. С. 323–333.
- [4] А. П. Веселов, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.
- [5] А. Б. Шабат. ТМФ. 1999. Т. 121. № 1. С. 165–176.
- [6] В. Е. Адлер, В. Г. Маризин, А. Б. Шабат. ТМФ. 2001. Т. 129. № 2. С. 163–183.
- [7] J. Hietarinta. J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 5. P. 1725–1756.