Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Палезе, Петлевые алгебры Беклунда для компактной и некомпактной нелинейных спиновых моделей в размерности $(2 + 1)$, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 153–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1841>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:57:13

© 2005 г.

М. Палезе*

**ПЕТЛЕВЫЕ АЛГЕБРЫ БЕКЛУНДА
ДЛЯ КОМПАКТНОЙ И НЕКОМПАКТНОЙ
НЕЛИНЕЙНЫХ СПИНОВЫХ
МОДЕЛЕЙ В РАЗМЕРНОСТИ $(2 + 1)$**

Задача Беклунда решена как для компактного, так и для некомпактного вариантов $(2 + 1)$ -мерной нелинейной спиновой модели Ишимори. В частности, для возникающей алгебры Беклунда дается реализация в виде бесконечномерной петлевой алгебры Ли типа алгебр Каца–Мури.

Ключевые слова: интегрируемые системы, нелинейные спиновые модели, продолжение алгебр, преобразования Беклунда, связности Беклунда–Картана.

1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении нелинейных полевых уравнений используется метод структур Беклунда, известный также как метод продолженных структур (применение данного метода к ряду актуальных моделей размерности $(1 + 1)$ и $(2 + 1)$ см., например, в работах [1]–[9]). Он представляет собой систематическую аналитическую процедуру, позволяющую, в принципе, связать с рассматриваемым уравнением линейную задачу. С помощью этого метода нелинейные алгебры Беклунда (алгебры продолжений) связываются с интегрируемыми нелинейными полевыми уравнениями, которые можно выразить в терминах замкнутых дифференциальных идеалов. Такие алгебры возникают при введении произвольного числа беклундовских форм, содержащих новые зависимые переменные (называемые псевдопотенциалами), и при требовании алгебраической эквивалентности между генераторами продолженного идеала и его внешним дифференциалом, т.е. при наложении условия интегрируемости для продолженного дифференциального идеала. В работах [10], [11] указывалось, что свойства интегрируемости нелинейных полевых уравнений можно связать с существованием симметрий Беклунда и допустимых преобразований Беклунда. На самом деле, алгебры Беклунда появляются в виде структур

Эта заметка является частью совместной исследовательской работы с Е. Винтерротом.

*University of Torino, Department of Mathematics, Via C. Alberto 10, 10123, Torino, Italy.
E-mail: marcella.palese@unito.it

неполных (в том смысле, что не все коммутаторы известны) алгебр Ли как необходимые условия интегрируемости связности, индуцированной отображением Беклунда [3], а реализация таких алгебр (в особенности в виде петлевых алгебр) дает решение так называемой задачи Беклунда.

Распространение процедуры продолжения на случай более чем двух независимых переменных, вообще говоря, нетривиально и в ряде аспектов недостаточно исследовано (см., например, [2], [4], [7], [8]). Недавно на основе подходящего геометрического описания преобразований Беклунда [10] был достигнут определенный прогресс в развитии теории, и это дало некоторые подсказки к пониманию задачи в целом [9]. Исследование систем высших размерностей является центральной темой в теории интегрируемых систем. В работе [8] рассматривался общий подход, состоящий в получении новых $(2 + 1)$ -мерных интегрируемых систем из данной абстрактной алгебраической структуры посредством расширения отображения Беклунда; там было показано, как можно индуцировать связность с помощью отображения Беклунда в терминах расслоений струй, а также было дано описание вполне интегрируемых систем в терминах структур Беклунда. В работе [9] мы доказали, что указанная связность является допустимой связностью Картана для подходящей $\bar{K}$ -структуры, т.е. для подрасслоения в расслоении реперов (высших порядков).

В этой заметке, используя анзац из работ [2]–[4], [8], который в действительности является подходящей версией структурных уравнений для допустимой связности Беклунда–Картана [9], мы связываем структуру бесконечномерной алгебры Беклунда с $(2 + 1)$ -мерной спиновой моделью Ишимори как в ее компактном [12], так и в некомпактном [13] варианте. Построены гомоморфизмы в факторы конечно- и бесконечномерных алгебр Ли. В частности, ввиду возможных применений (например, к выводу всего семейства $(2 + 1)$ -мерных нелинейных полевых уравнений, содержащих исходные спиновые модели Ишимори) дается реализация возникающей алгебры Беклунда в виде бесконечномерной петлевой алгебры Ли типа алгебр Каца–Мули.

2. ДОПУСТИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

В этом разделе мы вкратце напомним несколько основных положений и введем обозначения. Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями теории расслоений, струйных продолжений, главных расслоений и связностей (по поводу ссылок и подробностей см., например, [14]).

Пусть $\pi: U \rightarrow X$ и $\tau: Z \rightarrow X$ – два (векторных) расслоения с локальными приспособленными координатами (x^α, u^A) и (x^α, z^i) , соответственно, где $\alpha = 1, \dots, m = \dim X$, $A = 1, \dots, n = \dim U - \dim X$, $i = 1, \dots, N = \dim Z - \dim X$. Система нелинейных полевых уравнений порядка k на U геометрически описывается как внешняя дифференциальная система ν на $J^k U$. Решения полевых уравнений являются такими (локальными) сечениями σ расслоения $U \rightarrow X$, для которых $(j^k \sigma)^* \nu = 0$. Мы также используем обозначение $J^\infty \nu$ ($j^\infty \sigma$) для продолжения ν (σ) на струи бесконечного порядка.

Пусть теперь B – группа контактных преобразований бесконечного порядка на $J^\infty U$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группой (инфинитезимальных) преобразований Беклунда для

системы ν называется замкнутая подгруппа $\tilde{K}$ в B , которая оставляет инвариантными подмногообразия решений струйного продолжения $J^\infty \nu$. Группой (инфинитезимальных) обобщенных преобразований Беклунда для системы ν называется замкнутая подгруппа K в B , которая оставляет $J^\infty \nu$ инвариантным [10].

Пусть $\pi: U \rightarrow X$ и $\tau: Z \rightarrow X$ суть определенные выше векторные расслоения, а $\pi^1: J^1 U \rightarrow X$ и $\tau^1: J^1 Z \rightarrow X$ – продолжения расслоений на струи первого порядка с локально приспособленными координатами $(x^\alpha, u^A, u_\alpha^A)$ и $(x^\alpha, z^i, z_\alpha^i)$, соответственно. Далее, пусть $(dx^\beta, du^A, du_\beta^A)$ и $(dx^\beta, dz^i, dz_\beta^i)$ – локальные базисы 1-форм на $J^1 U$ и $J^1 Z$, соответственно.

Отображение Беклунда первого порядка есть расслоенный морфизм над Z : $\phi: J^1 U \times_X Z \rightarrow J^1 Z$: $(x^\alpha, u^A, u_\alpha^A; z^i) \mapsto (x^\alpha, z^i, z_\alpha^i)$, где $z_\alpha^i = \phi_\alpha^i(x^\beta, u^A, u_\beta^A; z^j)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что расслоенный морфизм ϕ является *допустимым* преобразованием Беклунда для дифференциальной системы ν , если $\phi_\alpha^i = \mathcal{D}_\alpha \phi^i$ ($\mathcal{D}_\alpha$ – формальная производная на $J^1 U \times_X Z$) и условия интегрируемости совпадают с внешней дифференциальной системой ν .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. С помощью обратного образа контактной структуры $J^1 Z$ морфизм Беклунда индуцирует горизонтальное распределение – *индуцированную связность Беклунда* – на расслоении $(J^1 U \times_X Z, J^1 U, \pi_0^{1*}(\eta))$ [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\overline{K}$ – нормальная подгруппа, $\overline{K} \subset (\tilde{K} \cap K) \subset B$, оставляющая инвариантными дифференциальную систему ν (ее продолжение бесконечного порядка) и ее решения. Назовем $\overline{K}$ группой (инфинитезимальных) обобщенных *допустимых* преобразований Беклунда для системы ν .

ТЕОРЕМА 1. Следующие утверждения эквивалентны [8]:

- (1) морфизм ϕ является допустимым преобразованием Беклунда для дифференциальной системы ν ;
- (2) индуцированная связность Беклунда $\overline{K}$ -инвариантна.

3. АЛГЕБРЫ БЕКЛУНДА ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ИШИМОРИ

Рассмотрим нелинейную спиновую модель, введенную Ишимори [12] для обобщения непрерывной изотропной спиновой модели Гейзенберга в случае размерности $(1+1)$ на случай размерности $(2+1)$ (по поводу исследования свойств интегрируемости спиновой модели Гейзенберга см., например, [5], [15]). Пара Лакса была приведена в работе Ишимори, а мультивертексные решения были выведены с помощью метода Хироты, и тем самым было показано, что динамика вертексов интегрируема. В [13] была установлена калибровочная эквивалентность между некомпактным вариантом спиновой модели Ишимори и уравнением Дэви–Стюартсона.

Классическую непрерывную изотропную спиновую цепочку Гейзенберга можно обобщить до следующей системы связанных нелинейных $(2+1)$ -мерных дифференци-

альных уравнений в частных производных:

$$\Sigma \mathbf{S}_t = \mathbf{S} \times (\mathbf{S}_{xx} + \epsilon^2 \mathbf{S}_{yy}) + \phi_y \mathbf{S}_x + \phi_x \mathbf{S}_y, \quad (1)$$

$$\phi_{xx} - \epsilon^2 \phi_{yy} = -2\epsilon^2 \Sigma \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y), \quad (2)$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, y, t)$ – вектор классического спинного поля, $\Sigma = \text{diag}(1, 1, \kappa^2)$ – диагональная матрица, $\kappa^2 = \pm 1$, нижние индексы обозначают частные производные, а символ $\times$ обозначает обычное векторное произведение. Предполагается, что компоненты спинного поля S_j , $j = 1, 2, 3$, удовлетворяют связи

$$\Sigma \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = \kappa^2, \quad (3)$$

где $\kappa^2 = +1$ и $\kappa^2 = -1$ относятся к компактному [12] и некомпактному [13] случаям, соответственно. Другими словами, при $\kappa^2 = 1$ величины S_j принадлежат унитарной сфере $SU(2)/U(1)$, тогда как при $\kappa^2 = -1$ область значений S_j представляет собой щит над двулистным гиперboloидом $SU(1, 1)/U(1)$.

Введем на (векторном) расслоении $J^1 U$ с локальными координатами¹⁾ $(x, y, t; \mathbf{S}, \mathbf{P}, \mathbf{Q}; \phi, \alpha, \mu)$ замкнутый дифференциальный идеал, определенный (векторно-значными) 3-формами

$$\theta_1 = (d\mathbf{S} - \mathbf{P} dx) \wedge dy \wedge dt, \quad (4)$$

$$\theta_2 = (d\mathbf{S} - \mathbf{Q} dy) \wedge dx \wedge dt, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \theta_3 = & d\Sigma \mathbf{S} \wedge dy \wedge dx + \mathbf{S} \times (d\mathbf{P} \wedge dy \wedge dt - \epsilon^2 d\mathbf{Q} \wedge dx \wedge dt) + \\ & + (\mu \mathbf{P} + \alpha \mathbf{Q}) dx \wedge dy \wedge dt; \end{aligned} \quad (6)$$

скалярными 3-формами

$$\gamma_1 = (d\phi - \alpha dx) \wedge dy \wedge dt, \quad (7)$$

$$\gamma_2 = (d\phi - \mu dy) \wedge dx \wedge dt, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & d\alpha \wedge dy \wedge dt + \epsilon^2 d\mu \wedge dx \wedge dt + \\ & + 2\epsilon^2 \Sigma \mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) dx \wedge dy \wedge dt; \end{aligned} \quad (9)$$

а также формами

$$\beta_1 = (d\Sigma \mathbf{S} \cdot \mathbf{P} + \Sigma \mathbf{S} \cdot d\mathbf{P}) \wedge dy \wedge dt, \quad (10)$$

$$\beta_2 = (d\Sigma \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q} + \Sigma \mathbf{S} \cdot d\mathbf{Q}) \wedge dx \wedge dt, \quad (11)$$

где $\wedge$ обозначает внешнее произведение форм.

Легко проверить следующее предложение.

¹⁾ Для удобства мы ввели следующие изменения в обозначениях: $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = t$, $u^1 = \mathbf{S}$, $u^1_1 = \mathbf{P}$, $u^1_2 = \mathbf{Q}$, $u^2 = \phi$, $u^2_1 = \alpha$, $u^2_2 = \mu$; кроме того, в дальнейшем $z = \xi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. На каждом интегральном подмногообразии, определенном (локальными) сечениями $\mathbf{S} = \mathbf{S}(x, y, t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{S}_x$, $\mathbf{Q} = \mathbf{S}_y$, $\phi = \phi(x, y, t)$, $\alpha = \phi_x$, $\mu = \phi_y$ (для которых $dx \wedge dy \wedge dt \neq 0$ в силу трансверсальности слоев), идеал (4)–(11) эквивалентен уравнениям (1), (2) со связью (3).

Рассмотрим теперь (векторное) расслоение Z (расслоенное над той же базой, что и выше) с локальными координатами $(x, y, t; \xi^m)$, а также определенные на расслоенном произведении $J^1U \times_X Z$ 2-формы

$$\Omega^k = H^k dx \wedge dy + F^k dy \wedge dt + G^k dx \wedge dt + (A_m^k dx + B_m^k dy + \delta_m^k dt) \wedge d\xi^m, \quad (12)$$

где $\xi = \{\xi^m\}$ и H^k, F^k, G^k — соответственно псевдопотенциал и функции на $J^1U \times_X Z$, подлежащие определению, $k, m = 1, 2, \dots, N$ (N произвольно на данной стадии). Далее величины A_m^k и B_m^k обозначают элементы двух постоянных регулярных $(N \times N)$ -матриц, δ_m^k — символ Кронекера, и принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Формы Ω^k называются *формами Беклунда*, связанными с уравнениями (1)–(3). Пусть $\mathcal{I}$ — продолженный идеал, порожденный формами $\theta_i, \gamma_i, \beta_l$, $i = 1, 2, 3$, $l = 1, 2$, и Ω^k , $k = 1, \dots, N$. Будем говорить, что $\mathcal{I}$ замкнут, если $d\Omega^k \in \mathcal{I}(\theta_i, \gamma_i, \beta_l, \Omega^k)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Причина, по которой продолженные таким образом формы называются “формами Беклунда” состоит в том, что уравнение (12) является в действительности конкретной формой обобщенного анзаца, введенного в [8], относительно которого предполагается, что он индуцирован допустимым преобразованием Беклунда. Индуцированная связность Беклунда–Картана на $(J^1U \times_X Z, J^1U, \pi_0^{1*}(\eta))$ дается при этом формулой

$$\omega^m = \Gamma_1^m dx + \Gamma_2^m dy + \Gamma_3^m dt + d\xi^m, \quad (13)$$

а замкнутая (матрично-значная) форма θ из [8] — формулой $\theta_m^k = A_m^k dx + B_m^k dy + \delta_m^k dt$. В этих обозначениях имеем $H^k = \Gamma_1^m B_m^k - \Gamma_2^m A_m^k$, $F^k = \Gamma_2^m \delta_m^k - \Gamma_3^m B_m^k$, $G^k = \Gamma_1^m \delta_m^k - \Gamma_3^m A_m^k$. Условие замыкания для идеала $\mathcal{I}$ эквивалентно условию теоремы 1, где $\bar{K}$ следует определить из решения так называемой задачи Беклунда. Отображение Беклунда, и, тем самым, индуцированная связность Картана, полностью определяются функциями H^k, F^k и G^k и матрицами $\{A_m^k\}$ и $\{B_m^k\}$.

Зависимость функций H^k, F^k, G^k от переменных $(\mathbf{S}, \mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y; \phi, \phi_x, \phi_y; \xi^m)$ следует установить, наложив требование, чтобы преобразование Беклунда, определяемое уравнением (13), было допустимым для системы Ишимори, т.е. чтобы имело место замыкание продолженного идеала.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения $[G, H]^k = G^j H_{\xi^j}^k - H^j G_{\xi^j}^k$ (скобка Ли), $H_{\xi^j}^k = \partial H^k / \partial \xi^j$, $H_u^k = \partial H^k / \partial u$ и т.д. Кроме того, для простоты мы будем опускать индексы k, m . Скобки Ли тогда следует понимать как коммутаторы.

ЛЕММА 1. *Условие замыкания для $\mathcal{I}$ приводит к уравнениям*

$$H(\mathbf{S}; \xi) = \mathbf{X}(\xi) \cdot \mathbf{S} + Y(\xi), \quad (14)$$

$$F = -(\mathbf{X} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}_x + \widehat{F}(\mathbf{S}; \xi), \quad (15)$$

$$G = \epsilon^2 (\mathbf{X} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}_y + \widehat{G}(\mathbf{S}; \xi), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}_x - \widehat{G}_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}_y + [\mathbf{X}(\xi) \cdot \mathbf{S} + Y(\xi), \epsilon^2 (\mathbf{X} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}_y] + \\ + [\mathbf{X}(\xi) \cdot \mathbf{S} + Y(\xi), \overline{G}(\mathbf{S}; \phi, \phi_y; \xi)] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие замыкания эквивалентно следующим связям:

$$H_{\phi} = H_{\phi_x} = H_{\phi_y} = G_{\phi_x} = F_{\phi_y} = 0, \quad (18)$$

$$H_{\mathbf{S}_x} = G_{\mathbf{S}_x} = 0, \quad F_{\mathbf{S}_x} = -(\Sigma H_{\mathbf{S}}) \times \mathbf{S}, \quad (19)$$

$$H_{\mathbf{S}_y} = F_{\mathbf{S}_y} = 0, \quad G_{\mathbf{S}_y} = \epsilon^2 (\Sigma H_{\mathbf{S}}) \times \mathbf{S}, \quad (20)$$

$$G_{\phi_y} - \epsilon^2 F_{\phi_x} = 0, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [H, G] + H_{\mathbf{S}} \cdot (\phi_y \mathbf{S}_x + \phi_x \mathbf{S}_y) + F_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}_x - G_{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}_y + \\ + F_{\phi} \cdot \phi_x - G_{\phi} \cdot \phi_y - 2\epsilon^2 F_{\phi_x} \Sigma \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \times \mathbf{S}_y) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$F_{\xi} - G_{\xi} A - H_{\xi} B = 0, \quad (23)$$

$$F_{\xi}(B^{-1})G - G_{\xi}(B^{-1})F = 0, \quad (24)$$

$$[A, B] = 0. \quad (25)$$

Из уравнений (18)–(20) получаем

$$H = H(\mathbf{S}; \xi), \quad F = F(\mathbf{S}, \mathbf{S}_x; \phi, \phi_x; \xi), \quad G = G(\mathbf{S}, \mathbf{S}_y; \phi, \phi_y; \xi), \quad (26)$$

$$F_{\mathbf{S}_x} = -\Sigma H_{\mathbf{S}} \times \mathbf{S}, \quad G_{\mathbf{S}_y} = \epsilon^2 \Sigma H_{\mathbf{S}} \times \mathbf{S}, \quad G_{\phi_y} = \epsilon^2 F_{\phi_x}. \quad (27)$$

Далее, из последних трех уравнений имеем

$$F = -(\Sigma H_{\mathbf{S}} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}_x + \overline{F}(\mathbf{S}; \phi, \phi_x; \xi), \quad (28)$$

$$G = \epsilon^2 (\Sigma H_{\mathbf{S}} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}_y + \overline{G}(\mathbf{S}; \phi, \phi_y; \xi), \quad (29)$$

$$\overline{G}_{\phi_y} = \epsilon^2 \overline{F}_{\phi_x}. \quad (30)$$

Кроме того, справедливо равенство

$$H_{S_{i\mathbf{S}}} = 0, \quad (31)$$

и, таким образом, мы получаем

$$H(\mathbf{S}; \xi) = \mathbf{X}(\xi) \cdot \mathbf{S} + Y(\xi), \quad (32)$$

где $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$.

Более того, $\bar{F}_{\phi_x} = 0$, так что $\bar{F} = \bar{F}(\mathbf{S}; \phi; \xi)$. Таким образом, уравнения (22) принимают вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{X} \cdot \mathbf{S}_x \phi_y + \mathbf{X} \cdot \mathbf{S}_y \phi_x + \bar{F}_S \cdot \mathbf{S}_x - \bar{G}_S \cdot \mathbf{S}_y + \bar{F}_\phi \phi_x - \bar{G}_\phi \phi_y + \\ & + [\mathbf{X} \cdot \mathbf{S} + Y, \epsilon^2 (\mathbf{X} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}_y + \bar{G}(\mathbf{S}; \phi, \phi_y; \xi)] = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Из приведенных выше уравнений мы теперь заключаем, что $\bar{F}_\phi = 0$, а из уравнений (28) – что $\bar{G}_{\phi_y} = 0$, откуда, в свою очередь, следует, что $\bar{G}_\phi = 0$.

Утверждение леммы доказано.

Далее мы приведем алгебру Беклунда $\bar{\mathfrak{k}}$, связанную с компактной и некомпактной спинновыми моделями Ишимори.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Следующая структура неполной алгебры Ли $\bar{\mathfrak{k}}$ ассоциирована с уравнениями (1), (2) и связью (3):

$$[Y, X_1] = [Y, X_2] = [Y, X_3] = 0, \quad (34)$$

$$[X_1, [X_1, X_3]] - [X_2, [X_2, X_3]] = 0, \quad (35)$$

$$k^2 [X_1, [X_1, X_2]] + [X_3, [X_2, X_3]] = 0, \quad (36)$$

$$k^2 [X_2, [X_1, X_2]] - [X_3, [X_1, X_3]] = 0, \quad (37)$$

$$[X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_1, X_3]] = 0, \quad (38)$$

$$[X_2, [X_1, X_3]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0, \quad (39)$$

$$k^2 [X_2, [X_1, X_3]] + [Z, Y] = 0. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из приведенной выше леммы получаем

$$[H(\mathbf{S}; \xi), \hat{G}(\mathbf{S}; \xi)] = 0, \quad (41)$$

$$\hat{F}_S = 0, \quad (42)$$

откуда $\hat{F} = K(\xi)$. Таким образом, остается провести анализ уравнения

$$\hat{G}_S \cdot \mathbf{S}_y = \epsilon^2 [\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} + Y, (\mathbf{X} \times \mathbf{S}) \cdot \mathbf{S}_y]. \quad (43)$$

Используя связь (3), легко получим

$$[Y, X_1] = [Y, X_2] = [Y, X_3] = 0, \quad (44)$$

$$\hat{G} = -S_1[X_2, X_3] + S_2[X_1, X_3] - k^2 S_3[X_1, X_2] + Z(\xi). \quad (45)$$

Наконец, алгебра Беклунда $\bar{\mathfrak{k}}$ получается подстановкой последнего результата в уравнение (41) с использованием уравнений (28) и (32).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Соотношения совместности (23)–(25) должны быть выполнены для $K(\xi)$. При этом легко добиться выполнения коммутационных соотношений для $K(\xi)$.

Можно привести подходящие реализации (т.е. гомоморфизмы), связывающие алгебру $\bar{\mathfrak{k}}$ с конечно- или бесконечномерными фактор-алгебрами Ли.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Алгебра Беклунда $\bar{\mathfrak{f}}$ гомоморфна алгебре $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$

$$[X_1, X_2] = 2i\zeta\kappa^2 X_3, \quad [X_1, X_3] = -2i\zeta X_2, \quad [X_2, X_3] = 2i\zeta X_1, \quad (46)$$

где ζ – свободный параметр.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[X_1, X_2] = X_4$, $[X_1, X_3] = X_5$, $[X_2, X_3] = X_6$. Предположим, что X_1 , X_2 и X_3 независимы, а X_4 , X_5 , X_6 , Y , Z и K являются линейными комбинациями указанных операторов. Таким образом, $X_4 = 2i\zeta\kappa^2 X_3$, $X_5 = -2i\zeta X_2$, $X_6 = 2i\zeta X_1$ и $Y = Z = K = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $Y = Z = K = 0$. Тогда алгебра Беклунда $\bar{\mathfrak{f}}$ гомоморфна бесконечномерной алгебре Ли типа алгебр Каца–Мууди:

$$[T_i^{(m)}, T_j^{(n)}] = i\epsilon_{ij}^k T_k^{(m+n)}, \quad (47)$$

где ϵ_{ij}^k – тензор Риччи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим, что коммутаторы $[X_2, X_6]$, $[X_3, X_5]$, $[X_3, X_6]$, $[X_4, X_5]$, $[X_4, X_6]$ и $[X_5, X_6]$ неизвестны. Тогда легко видеть, что реализация неполной алгебры Ли $\bar{\mathfrak{f}}$ дается формулами

$$X_1 = \kappa T_1^{(1)}, \quad X_2 = \kappa T_2^{(1)}, \quad X_3 = T_3^{(1)}, \quad (48)$$

$$X_4 = i\kappa^2 T_3^{(2)}, \quad X_5 = -i\kappa T_2^{(2)}, \quad X_6 = i\kappa T_1^{(2)}, \quad (49)$$

где векторные поля $T_i^{(m)}$, $i = 1, 2, 3$, $m \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют коммутационным соотношениям (47).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Легко видеть, что в соответствии с теоремой 1 формы связности (13) $\bar{\mathfrak{f}}$ -инвариантны; фактически мы имеем $\Gamma_i^m = \omega_i^l X_l^m$ при $i = 1, 2, 3$ и $l = 1, \dots, M$; при этом M равно размерности $\bar{\mathfrak{f}}$ или размерности рассматриваемой фактор-алгебры Ли, ω_i^l суть формы допустимой связности Картана [9].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы связали структуру бесконечномерной беклундовой петлевой алгебры Ли типа Каца–Мууди с $(2 + 1)$ -мерной спиновой моделью Ишимори как в компактном [12], так и в некомпактном [13] вариантах. С принципиальной точки зрения было бы интересно построить гомоморфизмы, связывающие $\bar{\mathfrak{f}}$ с фактор-алгебрами Ли также и в случае $Y \neq 0$, $Z \neq 0$, $K \neq 0$. Этот вопрос исследуется в настоящее время.

Заметим, что обобщая “обратную” процедуру (см., например, [5], [6], [8]) на $(2 + 1)$ -мерный случай с помощью подходящих *нелинейных* представлений фактор-алгебры Каца–Мууди (47) в терминах псевдопотенциалов, можно получить целое семейство $(2 + 1)$ -мерных нелинейных уравнений спинного поля, содержащих исходные спинные модели Ишимори (см., например, работу [5], содержащую аналогичные результаты, касающиеся $(1 + 1)$ -мерной спиновой модели Гейзенберга). Этот факт представляет интерес в рамках исследования “скрытых” симметрий нелинейных σ -моделей. Подробности

будут предметом отдельной статьи. Здесь же мы только подчеркнем, что такое семейство априори не следует путать с хорошо известной иерархией, связанной с парой Лакса; как хорошо известно, последняя возникает из *линейного* представления фактор-алгебр Ли.

Благодарности. Автор благодарна профессорам Р. А. Лео и Дж. Солиани за то что они, будучи руководителями ее диссертации в университете Лечче, познакомили ее с захватывающим предметом и за постоянные просвещающие обсуждения.

Список литературы

- [1] *H. D. Wahlquist, F. B. Estabrook.* Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1386–1390; *J. Math. Phys.* 1975. V. 16. P. 1–7; *R. Dodd, A. Fordy.* Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1983. V. 385. P. 389–429; *A. P. Fordy.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations. In: Soliton theory: a survey of results. Nonlinear Sci. Theory Appl. Ed. A. Fordy. Manchester: Manchester Univ. Press, 1990. P. 403–426; *M. Palese.* Prolongation structures of nonlinear field equations (Italian). Doctoral Thesis. University of Lecce, 1993.
- [2] *H. C. Morris.* J. Math. Phys. 1976. V. 17. P. 1870–1872.
- [3] *F. A. E. Pirani, D. C. Robinson, W. F. Shadwick.* Local Jet Bundle Formulation of Bäcklund Transformations with Applications to Nonlinear Evolution Equations. Math. Phys. Stud. V. 1. Dordrecht: Reidel, 1979.
- [4] *G. S. Tondo.* Lett. Nuovo Cimento. 1985. V. 44. P. 297–302.
- [5] *E. Alfinito, M. Leo, R. A. Leo, M. Palese, G. Soliani.* Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. P. 241–248.
- [6] *E. Alfinito, M. Leo, R. A. Leo, M. Palese, G. Soliani.* Phys. Lett. B. 1995. V. 352. P. 314–320.
- [7] *M. Palese, R. A. Leo, G. Soliani.* The prolongation problem for the heavenly equation. In: Recent Developments in General Relativity (Beri, 1998). Eds. B. Casciaro et al. Milano: Springer, 2000. P. 337–344; math.AP/0311218.
- [8] *M. Palese, E. Winterroth.* Phys. Lett. B. 2002. V. 532. P. 129–134.
- [9] *M. Palese, E. Winterroth.* On the geometry of Bäcklund transformations. In: Proc. of the conference: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II (Gallipoli, Italy, 2002). Eds. M. J. Ablowitz et al. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. P. 254–257.
- [10] *R. L. Anderson, N. H. Ibragimov.* Lie–Bäcklund Transformations in Applications. Philadelphia: SIAM, 1979.
- [11] *М. Абловуц, Х. Сугур.* Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [12] *Y. Ishimori.* Progr. Theor. Phys. 1984. V. 72. № 1. P. 33–37.
- [13] *R. A. Leo, L. Martina, G. Soliani.* J. Math. Phys. 1992. V. 33. № 4. P. 1515–1522.
- [14] *S. Kobayashi.* Transformation Groups in Differential Geometry. Berlin: Springer, 1972; *D. J. Saunders.* The Geometry of Jet Bundles. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [15] *M. Lakshmanan.* Phys. Lett. A. 1977. V. 61. P. 53–54; *L. A. Takhtajan.* Phys. Lett. A. 1977. V. 64. № 2. P. 235–237.