Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. К. Пашаев, М. Л. Франсиско, Вырожденный четырехсолитонный виртуальный резонанс для уравнения КП-II, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 162–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1842>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:56:42

ВЫРОЖДЕННЫЙ ЧЕТЫРЕХСОЛИТОННЫЙ ВИРТУАЛЬНЫЙ РЕЗОНАНС ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КП-II

Предложен метод решения $(2 + 1)$ -мерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией (КП-II), основанный на использовании второго и третьего членов диссипативного варианта иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура (АКНС). Показано, что диссипативные солитоны (диссипатоны) соответствующих уравнений приводят к плоским солитонам уравнения КП-II. На основе билинейного представления Хироты для потоков $SL(2, \mathbb{R})$ -иерархии АКНС выписано новое билинейное представление для уравнения КП-II, с помощью которого построены одно- и двухсолитонные решения и исследован резонансный характер их взаимодействия. С помощью указанного билинейного представления удалось впервые построить резонансное решение с четырьмя виртуальными солитонами для уравнения КП-II и показать, что такое решение может быть получено как редукция четырехсолитонного решения в билинейном виде Хироты–Сацумы для уравнения КП-II.

Ключевые слова: диссипативный солитон, иерархия Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура, уравнение Кадомцева–Петвиашвили, метод Хироты, солитонный резонанс, система реакции-диффузии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Диссипативный вариант иерархии Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура (АКНС) [1] был рассмотрен недавно в связи с $(1 + 1)$ -мерными гравитационными моделями (гравитационными моделями на линии) [2]. Было обнаружено, что второй поток, описываемый диссипативным вариантом нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) (так называемая система реакции-диффузии (РД)), допускает новый тип солитонных решений, называемых *диссипатонами*. Диссипатоны имеют экспоненциально возрастающую/убывающую амплитуды, при этом их билинейное произведение имеет форму идеального солитона, а взаимодействие носит резонансный характер.

В настоящей работе мы исследуем резонансные диссипативные солитоны в иерархии АКНС и показываем, что они приводят к плоским солитонам $(2 + 1)$ -мерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили с отрицательной дисперсией (КП-II). В основе нашего подхода лежит следующий метод построения решений $(2 + 1)$ -мерного уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП): мы показываем, что если рассмотреть решения, удовлетворяю-

*Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Urla-Izmir, 35430 Turkey. E-mail: oktaypashaev@iyte.edu.tr

шие одновременно системам уравнений второго и третьего потоков иерархии АКНС, то их произведение e^+e^- удовлетворяет уравнению КП-II (см. предложение в разделе 4). Используя эти результаты, мы строим новое билинейное представление для уравнения КП-II, которое имеет одно- и двухсолитонные решения. Показано, что наше двухсолитонное решение соответствует вырожденному четырехсолитонному решению уравнения КП в стандартном виде Хироты и обнаруживает резонанс с четырьмя виртуальными солитонами.

2. $SL(2, \mathbb{R})$ -ИЕРАРХИЯ АКНС

Диссипативная $SL(2, \mathbb{R})$ -иерархия АКНС эволюционных уравнений

$$\frac{1}{2}\sigma_3 \begin{pmatrix} e^+ \\ e^- \end{pmatrix}_{t_N} = \Re^{N+1} \begin{pmatrix} e^+ \\ e^- \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$, $\Lambda < 0$, порождается оператором рекурсии

$$\Re = \begin{pmatrix} \partial_x - \frac{\Lambda}{4}e^+ \int^x e^- & -\frac{\Lambda}{4}e^+ \int^x e^+ \\ -\frac{\Lambda}{4}e^- \int^x e^- & \partial_x + \frac{\Lambda}{4}e^- \int^x e^+ \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Второй и третий члены иерархии АКНС выглядят соответственно как

$$\begin{cases} e_{t_1}^+ = e_{xx}^+ + \frac{\Lambda}{4}e^+e^-e^+, \\ -e_{t_1}^- = e_{xx}^- + \frac{\Lambda}{4}e^+e^-e^- \end{cases} \quad (3)$$

и

$$\begin{cases} e_{t_2}^+ = e_{xxx}^+ + \frac{3\Lambda}{4}e^+e^-e_x^+, \\ e_{t_2}^- = e_{xxx}^- + \frac{3\Lambda}{4}e^+e^-e_x^-. \end{cases} \quad (4)$$

Первая система (3), диссипативный вариант НУШ, называется системой РД [2]. Она связана с калибровочной формулировкой $(1+1)$ -мерной гравитации, с поверхностями постоянной кривизны в псевдоевклидовом пространстве [2] и с задачей о солитоне НУШ в квантовом потенциале [2], [3].

3. РЕЗОНАНСНЫЕ ДИССИПАТОНЫ В ИЕРАРХИИ АКНС

3.1. Диссипатоны системы уравнений РД. Второй член иерархии АКНС (3), уравнение РД, с помощью подстановки

$$e^\pm = \sqrt{\frac{8}{-\Lambda}} \frac{G^\pm(x, t)}{F(x, t)} \quad (5)$$

можно записать в билинейном представлении Хироты, $t \equiv t_1$:

$$(\pm D_t - D_x^2)(G^\pm \cdot F) = 0, \quad D_x^2(F \cdot F) = -2G^+G^-. \quad (6)$$

Таким образом, любое решение последней системы определяет решение системы РД (3). Простейшее решение билинейной системы (6) имеет вид [3]

$$G^{\pm} = \pm e^{\eta_1^{\pm}}, \quad F = 1 + \frac{e^{(\eta_1^+ + \eta_1^-)}}{(k_1^+ + k_1^-)^2}, \quad (7)$$

где $\eta_1^{\pm} = k_1^{\pm} x \pm (k_1^{\pm})^2 t + \eta_1^{\pm(0)}$. Это решение определяет солитоноподобные решения системы РД с экспоненциально возрастающей и убывающей амплитудами, называемые диссипатонами [2]. Однако произведение $e^+ e^-$ имеет идеальную односолитонную форму:

$$e^+ e^- = \frac{8k^2}{\Lambda \operatorname{ch}^2[k(x - vt - x_0)]}, \quad (8)$$

амплитуду $k = (k_1^+ + k_1^-)/2$ и распространяется со скоростью $v = -(k_1^+ - k_1^-)$ из начального положения $x_0 = -\ln(k_1^+ + k_1^-)^2 + \eta_1^{+(0)} + \eta_1^{-(0)}$.

Система РД допускает геометрическую интерпретацию на языке поверхностей постоянной кривизны [2]. Если функции $e^{\pm}$ удовлетворяют уравнениям РД (3), то соответствующая риманова метрика описывает двумерное псевдориманово пространство-время постоянной кривизны Λ : $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \Lambda$. Метрика, вычисленная для решения с одним диссипатоном (7), имеет сингулярность (изменение знака) при $\operatorname{th} k(x - vt) = \pm v/2k$. Эта сингулярность (называемая причинной) допускает физическое истолкование в рамках физики черных дыр и связана с резонансными свойствами солитонов. Действительно, построив решение с двумя диссипатонами, мы обнаруживаем, что оно описывает столкновение последних, в результате чего образуется резонансное (метастабильное) связанное состояние [3].

3.2. Диссипативные солитоны для уравнений третьего потока. Для третьего потока иерархии АКНС мы имеем систему с кубической дисперсией (4). Билинейное представление этой системы уравнений для функций $e^{\pm}(x, t)$ в терминах трех вещественных функций $G^{\pm}, F$ (5) имеет вид

$$(D_t + D_x^3)(G^{\pm} \cdot F) = 0, \quad D_x^2(F \cdot F) = -2G^+ G^-. \quad (9)$$

Из последнего уравнения получаем выражение для произведения

$$U = e^+ e^- = \frac{8}{-\Lambda} \frac{G^+ G^-}{F^2} = \frac{4}{\Lambda} \frac{D_x^2(F \cdot F)}{F^2} = \frac{8}{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F. \quad (10)$$

Простейшее решение этой системы

$$G^{\pm} = \pm e^{\eta_1^{\pm}}, \quad F = 1 + \frac{e^{(\eta_1^+ + \eta_1^-)}}{(k_1^+ + k_1^-)^2}, \quad (11)$$

где $\eta_1^{\pm} = k_1^{\pm} x - (k_1^{\pm})^3 t + \eta_1^{\pm(0)}$, определяет диссипативное односолитонное решение системы (4):

$$e^{\pm} = \pm \sqrt{\frac{8}{-\Lambda}} \frac{|k_{11}^{\pm}|}{2} \frac{e^{\pm(\eta_1^+ - \eta_1^-)/2}}{\operatorname{ch}[(k_1^+ + k_1^-)(x - vt - x_0)/2]}, \quad (12)$$

Рис. 1

где $v = k_1^{+2} - k_1^+ k_1^- + k_1^{-2}$, $x_0 = (\eta_1^{+(0)} + \eta_1^{-(0)})/k_1^+ k_1^-$, $\phi_{11} = -2 \ln k_{11}^{+-}$. Резонансное взаимодействие слияния трех диссипатонов в два диссипатона для системы (4) представлено на рис. 1.

Система (4) допускает следующую редукцию симметрии: $e^+ = e^- = u$, приводящую к модифицированному уравнению Кортевега–де Фриза (мКдФ):

$$u_{t_2} = u_{xxx} + \frac{3\Lambda}{4} u^2 u_x. \quad (13)$$

При такой редукции $k_1^+ = k_1^- \equiv k$, и диссипативный солитон (12) превращается в одно-солитонное решение мКдФ:

$$e^+ = e^- = u(x, t) = \sqrt{\frac{8}{-\Lambda}} \frac{|k|}{\operatorname{ch} k(x - k^2 t - x_0)}. \quad (14)$$

Таким способом можно убедиться, что диссипативный солитон является достаточно общим объектом, который допускает редукцию к настоящему солитону мКдФ. Аналогичным образом диссипативное двухсолитонное решение системы (4) с помощью редукции $k_1^+ = k_1^-$, $k_2^+ = k_2^-$ сводится к двухсолитонному решению мКдФ. Естественный вопрос заключается в том, чтобы найти эволюционное уравнение для произведения диссипатонов $e^+ e^-$. Как будет показано ниже, таким уравнением является уравнение КП-II в размерности $(2+1)$.

4. РЕЗОНАНСНЫЕ СОЛИТОНЫ УРАВНЕНИЯ КП-II

4.1. Уравнение КП-II и иерархия АКНС. Иерархия АКНС позволяет также развить новый метод для нахождения решений $(2+1)$ -мерного уравнения КП. В зависимости от знака дисперсии различают два типа уравнений КП. Знак минус в правой части уравнения КП отвечает случаю отрицательной дисперсии, а соответствующее уравнение называется КП-II. Чтобы связать уравнения КП-II с иерархией АКНС, рассмотрим пару функций $e^+(x, y, t)$, $e^-(x, y, t)$, которые удовлетворяют уравнениям, составляющим второй и третий члены диссипативной иерархии АКНС. Обозначим по-новому

временные переменные в этих уравнениях: $t_1 \equiv y$ и $t_2 \equiv t$. Дифференцируя уравнения систем (3) и (4) соответственно по t и по y , находим, что эти системы совместимы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть функции $e^+(x, y, t)$ и $e^-(x, y, t)$ являются одновременно решениями уравнений (3) и (4). Тогда функция $U(x, y, t) \equiv e^+ e^-$ удовлетворяет уравнению КП-II

$$\left(4U_t + \frac{3\Lambda}{4}(U^2)_x + U_{xxx}\right)_x = -3U_{yy}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем производную от функции U по переменной y и используем формулы (3), так что $U_y = (e_x^+ e^- - e_x^- e^+)_x$,

$$U_{yy} = (e_{xxx}^+ e^- + e_{xxx}^- e^+ - (e_x^+ e_x^-)_x) + \frac{\Lambda}{2} U_x U. \quad (16)$$

Аналогичным образом для U_t получаем

$$U_t = -\left(e_{xxx}^+ e^- + \frac{3\Lambda}{4} U e^- e_x^- + e_{xxx}^- e^+ + \frac{3\Lambda}{4} U e_x^- e^+\right), \quad (17)$$

$$U_{xt} = -\left(e_{xxx}^+ e^- + e_{xxx}^- e^+ + \frac{3\Lambda}{4} U U_x\right)_x. \quad (18)$$

Объединяя полученные формулы,

$$4U_{xt} + 3U_{yy} = \left[-e_{xxx}^+ e^- - e_{xxx}^- e^+ - \frac{3\Lambda}{2} U U_x - 3(e_x^+ e_x^-)_x\right]_x, \quad (19)$$

и используя формулу $U_{xxx} = e_{xxx}^+ e^- + e_{xxx}^- e^+ + 3e_x^+ e_x^- + 3e_x^- e_x^+$, получаем уравнение КП-II (15)¹⁾.

4.2. Билинейное представление для уравнения КП-II с помощью потоков АХНС. Используя билинейные представления для систем (3) и (4) и доказанное выше предложение, можно найти билинейное представление для уравнения КП-II. Для системы РД (3) билинейное представление дается формулами (6), а для системы (4) третьего потока – формулами (9).

Рассмотрим теперь $G^\pm$ и F как функции трех переменных $G^\pm = G^\pm(x, y, t)$, $F = F(x, y, t)$ и потребуем, чтобы они были одновременно решениями билинейных систем (6) и (9). Поскольку второе уравнение в обеих системах одинаковое, достаточно рассмотреть следующую билинейную систему:

$$\begin{cases} (\pm D_y - D_x^2)(G^\pm \cdot F) = 0, \\ (D_t + D_x^3)(G^\pm \cdot F) = 0, \\ D_x^2(F \cdot F) = -2G^+ G^-. \end{cases} \quad (20)$$

¹⁾Как недавно указал нам Б. Конопельченко, подобные результаты известны также в литературе как симметричные редукции КП (см., например, [4]).

Тогда в соответствии с предложением любое решение этой системы порождает решение уравнения КП-II. Из последнего уравнения можно прямо выразить функцию U только через функцию F :

$$U = e^+ e^- = \frac{8}{-\Lambda} \frac{G^+ G^-}{F^2} = \frac{4}{\Lambda} \frac{D_x^2 (F \cdot F)}{F^2} = \frac{8}{\Lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln F. \quad (21)$$

Простейшее решение этой системы

$$G^\pm = \pm e^{\eta_1^\pm}, \quad F = 1 + \frac{e^{(\eta_1^+ + \eta_1^-)}}{(k_1^+ + k_1^-)^2}, \quad (22)$$

где $\eta_1^\pm = k_1^\pm x \pm (k_1^\pm)^2 y - (k_1^\pm)^3 t + \eta_1^{\pm(0)}$, определяет односолитонное решение уравнения КП-II по формуле (21):

$$U = \frac{2(k_1^+ + k_1^-)^2}{\Lambda \operatorname{ch}^2 \left[((k_1^+ + k_1^-)x + (k_1^{+2} - k_1^{-2})y - (k_1^{+3} + k_1^{-3})t + \gamma)/2 \right]}, \quad (23)$$

где $\gamma = -\ln(k_1^+ + k_1^-)^2 + \eta_1^{+(0)} + \eta_1^{-(0)}$. Этот солитон представляет собой плоский волновой барьер,двигающийся в произвольном направлении, и называется плоским солитоном.

4.3. Двухсолитонное решение. Продолжая разложение Хироты, находим двухсолитонное решение в виде

$$G^\pm = \pm(e^{\eta_1^\pm} + e^{\eta_2^\pm} + \alpha_1^\pm e^{\eta_1^+ + \eta_1^- + \eta_2^\pm} + \alpha_2^\pm e^{\eta_2^+ + \eta_2^- + \eta_1^\pm}), \quad (24)$$

$$F = 1 + \frac{e^{\eta_1^+ + \eta_1^-}}{(k_{11}^+)^2} + \frac{e^{\eta_1^+ + \eta_2^-}}{(k_{12}^+)^2} + \frac{e^{\eta_2^+ + \eta_1^-}}{(k_{21}^+)^2} + \frac{e^{\eta_2^+ + \eta_2^-}}{(k_{22}^+)^2} + \beta e^{\eta_1^+ + \eta_1^- + \eta_2^+ + \eta_2^-}, \quad (25)$$

где $\eta_i^\pm = k_i^\pm x \pm (k_i^\pm)^2 y - (k_i^\pm)^3 t + \eta_i^{\pm(0)}$, $k_{ij}^{ab} = k_i^a + k_j^b$, $i, j = 1, 2$, $a, b = +, -$,

$$\alpha_1^\pm = \frac{(k_1^\pm - k_2^\pm)^2}{(k_{11}^+ k_{21}^\pm)^2}, \quad \alpha_2^\pm = \frac{(k_1^\pm - k_2^\pm)^2}{(k_{22}^+ k_{12}^\pm)^2}, \quad \beta = \frac{(k_1^+ - k_2^+)^2 (k_1^- - k_2^-)^2}{(k_{11}^+ k_{12}^+ k_{21}^+ k_{22}^+)^2}.$$

Это дает всюду регулярное двухсолитонное решение уравнения КП-II по формуле (21).

4.4. Вырожденное четырехсолитонное решение. Для уравнения КП-II известно другое билинейное представление исключительно в терминах функции F [5]:

$$(D_x D_t + D_x^4 + D_y^2)(F \cdot F) = 0, \quad (26)$$

поэтому естественно сравнить солитонные решения наших билинейных уравнений (20) с аналогичными решениями последнего уравнения. Чтобы решить уравнение (26), рассмотрим $F = 1 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \dots$. Решение $F_1 = e^{\eta_1}$, где $\eta_1 = k_1 x + \Omega_1 y + \omega_1 t + \eta_1^0$, дисперсионное соотношение имеет вид $k_1 \omega_1 + k_1^4 + \Omega_1^2 = 0$ и $F_n = 0$, $n = 2, 3, \dots$, при

отождествлениях $k_1 = k_1^+ + k_1^-$, $\Omega_1 = \sqrt{3}(k_1^{+2} - k_1^{-2})$, $\omega_1 = -4(k_1^{+3} + k_1^{-3})$ и изменении масштаба $4t \rightarrow t$, $\sqrt{3}y \rightarrow y$, определяет односолитонное решение КП-П (15). Понятно, что оно совпадает с нашим односолитонным решением (23). Однако двухсолитонное решение уравнения (26) [6] не соответствует нашему двухсолитонному решению (24), (25). Наличие четырех различных членов $e^{\eta_i^\pm + \eta_k^\pm}$ в выражении (25) наводит на мысль, что наше двухсолитонное решение должно соответствовать некоторому вырожденному случаю четырехсолитонного решения уравнения (26)²⁾. Чтобы построить четырехсолитонное решение, найдем сначала следующие решения билинейного уравнения (26):

$$F_1 = e^{\eta_1}, \quad F_2 = e^{\eta_2}, \quad F_4 = e^{\eta_3}, \quad (27)$$

где $\eta_i = k_i x + \Omega_i y + \omega_i t + \eta_i^0$, $i = 1, 2, 3$, а дисперсионные соотношения имеют вид

$$k_i \omega_i + k_i^4 + \Omega_i^2 = 0, \quad (28)$$

и

$$F_3 = \alpha_{12} e^{\eta_1 + \eta_2}, \quad F_5 = \alpha_{13} e^{\eta_1 + \eta_3}, \quad F_6 = \alpha_{23} e^{\eta_2 + \eta_3}, \quad (29)$$

где

$$\alpha_{ij} = -\frac{(k_i - k_j)(\omega_i - \omega_j) + (k_i - k_j)^4 + (\Omega_i - \Omega_j)^2}{(k_i + k_j)(\omega_i + \omega_j) + (k_i + k_j)^4 + (\Omega_i + \Omega_j)^2}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Используем теперь для нашего решения параметризацию вида

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1^+ + k_1^-, & \omega_1 &= -4(k_1^{+3} + k_1^{-3}), & \Omega_1 &= \sqrt{3}(k_1^{+2} - k_1^{-2}), \\ k_2 &= k_2^+ + k_2^-, & \omega_2 &= -4(k_2^{+3} + k_2^{-3}), & \Omega_2 &= \sqrt{3}(k_2^{+2} - k_2^{-2}), \\ k_3 &= k_1^+ + k_2^-, & \omega_3 &= -4(k_1^{+3} + k_2^{-3}), & \Omega_3 &= \sqrt{3}(k_1^{+2} - k_2^{-2}), \\ k_4 &= k_2^+ + k_1^-, & \omega_4 &= -4(k_2^{+3} + k_1^{-3}), & \Omega_4 &= \sqrt{3}(k_2^{+2} + k_1^{-2}), \end{aligned} \quad (31)$$

удовлетворяющую дисперсионным соотношениям (28). Подставляя эти формулы параметризации в приведенные выше решения, находим

$$\alpha_{13} = 0 \Rightarrow F_5 = 0, \quad \alpha_{23} = 0 \Rightarrow F_6 = 0. \quad (32)$$

Продолжая разложение Хироты с решением $F_7 = e^{\eta_4}$, где $\eta_4 = k_4 x + \Omega_4 y + \omega_4 t + \eta_4^0$, находим, что $F_8 = \alpha_{14} e^{\eta_1 + \eta_4}$, где

$$\alpha_{14} = -\frac{(k_1 - k_4)(\omega_1 - \omega_4) + (k_1 - k_4)^4 + (\Omega_1 - \Omega_4)^2}{(k_1 + k_4)(\omega_1 + \omega_4) + (k_1 + k_4)^4 + (\Omega_1 + \Omega_4)^2}. \quad (33)$$

С учетом выбранной параметризации (31) последнее решение также обращается в нуль:

$$\alpha_{14} = 0 \Rightarrow F_8 = 0. \quad (34)$$

²⁾ Авторы благодарны Дж. Хиетаринта, высказавшему это предположение.

Следующее решение $F_9 = \alpha_{24}e^{\eta_2+\eta_4}$, где

$$\alpha_{24} = -\frac{(k_2 - k_4)(\omega_2 - \omega_4) + (k_2 - k_4)^4 + (\Omega_2 - \Omega_4)^2}{(k_2 + k_4)(\omega_2 + \omega_4) + (k_2 + k_4)^4 + (\Omega_2 + \Omega_4)^2}, \quad (35)$$

также равно нулю:

$$\alpha_{24} = 0 \Rightarrow F_9 = 0. \quad (36)$$

Далее имеем $F_{10} = 0$ и $F_{11} = \alpha_{34}e^{\eta_3+\eta_4}$, где

$$\alpha_{34} = -\frac{(k_3 - k_4)(\omega_3 - \omega_4) + (k_3 - k_4)^4 + (\Omega_3 - \Omega_4)^2}{(k_3 + k_4)(\omega_3 + \omega_4) + (k_3 + k_4)^4 + (\Omega_3 + \Omega_4)^2}. \quad (37)$$

Дальнейшая проверка для членов более высокого порядка дает $F_{12} = F_{13} = \dots = 0$. Таким образом, мы имеем вырожденное четырехсолитонное решение уравнения (26) вида

$$F = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_4} + \alpha_{12}e^{\eta_1+\eta_2} + \alpha_{34}e^{\eta_3+\eta_4}. \quad (38)$$

Сравнивая это решение с решением (25) и учитывая, что в соответствии с используемой параметризацией (31) $\eta_1 + \eta_2 = \eta_3 + \eta_4$, видим, что решения совпадают. Проведенное рассмотрение показывает, что наше двухсолитонное решение уравнения КП-II может быть получено редукцией четырехсолитонного решения уравнения в каноническом виде Хироты (26). Более того, оно позволяет найти новый резонанс с четырьмя виртуальными солитонами для уравнения КП-II.

4.5. Резонансное взаимодействие плоских солитонов. Выбирая различные значения параметров для нашего двухсолитонного решения, мы обнаруживаем, что взаимодействие солитонов имеет резонансный характер. При значениях параметров $k_1^+ = 2$, $k_1^- = 1$, $k_2^+ = 1$, $k_2^- = 0.3$ в случае равенства нулю констант, определяющих пространственные сдвиги, мы получаем движущееся в плоскости двухсолитонное решение, образующее четыре так называемых виртуальных солитона (солитоны без асимптотических состояний на бесконечности) (рис. 2).

Рис. 2

Резонансный характер взаимодействия наших плоских солитонов связан с резонансной природой рассмотренных в разделе 3 диссипатонов. Это было также отмечено в ряде систем, однако, насколько известно авторам, резонанс с образованием четырех виртуальных солитонов для уравнения КП-II [7] получен в настоящей работе впервые. На семинаре “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. III” авторы узнали, что совсем недавно Биондини и Кодама, используя теорию Сато, также построили резонансные солитоны для уравнения КП-II [8]. Сравнение показало, что наше билинейное ограничение играет ту же роль, что и цепочка Тоды в работе этих авторов.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идея использования пары уравнений иерархии АКСС для построения решений уравнения КП может быть применена также к многомерным системам со структурой нулевой кривизны, таким как калибровочная теория Черна–Саймонса. Наше трехмерное представление нулевой кривизны уравнения КП-II дает плоскую неабелеву связность для $SL(2, \mathbb{R})$ и соответствует сектору трехмерной гравитационной теории. Недавно мы показали, что идея, аналогичная представленной в настоящей работе, может быть применена также к иерархии Каупа–Ньюэлла. В этом случае, объединяя второй и третий потоки диссипативного варианта НУШ с производной, мы обнаружили резонансную солитонную динамику для модифицированного уравнения КП-II [9].

Благодарности. Авторы благодарны Б. Конопельченко, А. Погребкову и Д. Биондини за полезные замечания и Ю. Кодаме за многочисленные ценные обсуждения, проясняющие полученные нами результаты. Эта работа была частично поддержана Izmir Institute of Technology, Izmir, Turkey.

Список литературы

- [1] *M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, H. Segur.* Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249.
- [2] *L. Martina, O. K. Pashaev, G. Soliani.* Class. Q. Grav. 1997. V. 14. P. 3179; Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 084025.
- [3] *O. K. Pashaev, J.-H. Lee.* Mod. Phys. Lett. A. 2002. V. 17. № 24. P. 1601; ANZIAM J. 2002. V. 44. P. 73.
- [4] *B. Konopelchenko, W. Strampp.* J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 3676; *Y. Cheng, Y.-S. Li.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 419; *C. Cao, Y. Wu, X. Geng.* J. Math. Phys. 1999. V. 40. № 8. P. 3948.
- [5] *Р. Хирота.* Прямые методы в теории солитонов. В сб.: Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.
- [6] *K. Ohkuma, M. Wadati.* J. Phys. Soc. Japan. 1983. V. 52. № 3. P. 749.
- [7] *E. Infeld, G. Rowlands.* Nonlinear Waves, Solitons and Chaos. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2000.
- [8] *G. Biondini, Y. Kodama.* J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 10519; *Y. Kodama.* Young diagrams and N-soliton solutions of the KP equation. nlin.SI/0406033.
- [9] *Дж.-Х. Лу, О.К. Пашаев.* ТМФ. 2005. Т. 144. № 1. С. 133.