Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Розенхаус, О существенных законах сохранения для уравнений с бесконечными симметриями, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 190–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1845>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:16:29

© 2005 г.

Ф. Розенхаус*

О СУЩЕСТВЕННЫХ ЗАКОНАХ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С БЕСКОНЕЧНЫМИ СИММЕТРИЯМИ

Рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных для вариационной задачи с бесконечной группой симметрии. Исследуются локальные законы сохранения, связанные с произвольными функциями одной переменной от генераторов группы. Показано, что только симметрии с произвольными функциями зависимых переменных приводят к бесконечному числу законов сохранения. Вычислены локальные законы сохранения для потенциального уравнения Заболоцкой–Хохлова для одной из его бесконечных подгрупп.

Ключевые слова: бесконечные симметрии, законы сохранения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопрос о взаимоотношении симметрий и законов сохранения имеет давнюю историю, восходящую к знаменитой работе Нётер [1]. Первая теорема Нётер устанавливает соответствие между r -параметрической группой Ли симметрий функционала действия и r локальными законами сохранения. Согласно второй теореме Нётер бесконечные вариационные симметрии (с произвольными функциями всех независимых переменных, см., например, [2]) приводят к соотношениям между уравнениями исходной дифференциальной системы, а не к законам сохранения. Общий случай бесконечных симметрий с произвольными функциями от $k < n$ независимых переменных в $\mathbb{R}^n$ был исследован в [2]. В настоящей работе мы рассмотрим лагранжевы дифференциальные уравнения, допускающие бесконечную алгебру симметрий с операторами, зависящими от произвольной функции независимых и зависимых переменных и их производных. Используя развитый в [2] подход, мы вычисляем некоторые локальные сохраняющиеся величины для трехмерного потенциального уравнения Заболоцкой–Хохлова и обсуждаем роль граничных условий. Будет показано, что только произвольные функции зависимых переменных от генераторов группы симметрии могут приводить к бесконечному числу законов сохранения.

*Department of Mathematics and Statistics, California State University, Chico, CA 95929, USA.
E-mail: vrosenhaus@csuchico.edu

2. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ НЁТЕР

Под законом сохранения для заданного дифференциального уравнения

$$\omega(x, u, u_i, \dots) = 0 \quad (1)$$

понимается уравнение непрерывности

$$D_\mu K_\mu \doteq 0, \quad \mu = 1, \dots, n, \quad (2)$$

выполненное для любых решений уравнения (1). Каждый закон сохранения определен с точностью до преобразования эквивалентности $K_\mu \rightarrow K_\mu + P_\mu$, $D_\mu P_\mu = 0$. Следующие случаи приводят к *тривиальным* законам сохранения [3]:

- 1) $D_\mu K_\mu = 0$: уравнение непрерывности выполнено во всем пространстве;
- 2) $K_\mu \doteq 0$ ($\mu = 1, \dots, n$): на решениях уравнения (1) компоненты вектора K_μ обращаются в нуль.

Под *существенным* законом сохранения мы будем понимать такой нетривиальный закон сохранения $D_\mu K_\mu \doteq 0$, который приводит к ненулевой сохраняющейся величине

$$D_t \iiint K_t dx dy dz \doteq 0, \quad K_t \neq 0. \quad (3)$$

Пусть

$$S = \int L(x^i, u, u_i, \dots) d^n x$$

— функционал действия, $x^i = (x, y, \dots, t)$ — независимые переменные и $u_i \equiv \partial u(x) / \partial x^i$, $i = 1, \dots, n$. Уравнения движения имеют вид

$$E(L) \equiv \omega(x, u, u_i, u_{ij}, \dots) = 0, \quad (4)$$

где E — оператор Эйлера–Лагранжа,

$$E = \frac{\partial}{\partial u} - D_i \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i \leq j} D_i D_j \frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \dots \quad (5)$$

Рассмотрим инфинитезимальное преобразование [4], связанное с оператором

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u} + \zeta^i \frac{\partial}{\partial u_i} + \dots \quad (6)$$

и с соответствующим каноническим оператором

$$X_\alpha = \alpha \frac{\partial}{\partial u} + \sum_i (D_i \alpha) \frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_{i \leq j} (D_i D_j \alpha) \frac{\partial}{\partial u_{ij}} + \dots, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

где $\alpha = \eta - \xi^i u_i$.

Используем тождество Нётер [2]

$$X_\alpha = \alpha E + \sum_{i=1} D_i R_{\alpha i}, \quad (8)$$

где

$$R_{\alpha i} = \alpha \frac{\partial}{\partial u_i} + \left\{ \sum_{k \geq i} (D_k \alpha) - \alpha \sum_{k \leq i} D_k \right\} \frac{\partial}{\partial u_{ik}} + \dots. \quad (9)$$

Вариация функционала S задается формулой

$$\delta S = \int [X_\alpha L + D_i (\xi^i L)] d^n x.$$

Пусть преобразование X_α есть вариационная (нётеровская) симметрия,

$$X_\alpha L = D_i M_i. \quad (10)$$

Применение тождества Нётер (8) к L дает

$$X_\alpha L = \alpha \omega + D_i (R_{\alpha i} L). \quad (11)$$

Сравнивая два последних равенства, приходим к соотношению

$$D_i (M_i - R_{\alpha i} L) = \alpha \omega, \quad (12)$$

т.е. к уравнению непрерывности на многообразии решений ($\omega = 0$, $D_i \omega = 0, \dots$)

$$D_i (M_i - R_{\alpha i} L) \doteq 0.$$

В соответствии с этим уравнением любая вариационная симметрия α в случае конечной группы Ли приводит к соответствующему закону сохранения (первая теорема Нётер [1]). Вторая теорема Нётер [1] имеет дело со случаем бесконечной группы вариационных симметрий, где вектор симметрии α имеет вид

$$\alpha = ap(x) + b_i D_i p(x) + c_{ij} D_i D_j p(x) + \dots, \quad (13)$$

и $p(x)$ является произвольной функцией всех базисных пространственных переменных. В отличие от первой теоремы Нётер, следствием бесконечной симметрии функционала ω в уравнении (1) является не закон сохранения, а некоторое соотношение между исходными дифференциальными уравнениями [1]:

$$a^b \omega^b - D_i (b_i^b \omega^b) + D_i D_j (c_{ij}^b \omega^b) + \dots = 0, \quad (14)$$

где $a^b, b_i^b, c_{ij}^b, \dots$ — компоненты вектора симметрии α (13). Общий случай, когда $p(x)$ есть произвольная функция не всех базисных переменных, был исследован в работе [2]. В настоящей работе нас интересует случай произвольных функций одной переменной.

3. НЁТЕРОВСКИЕ И СТРОГИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим функции $u = u(x)$, определенные на области $D \subset \mathbb{R}^{m+1}$. Пусть симметрия α дифференциального уравнения с функцией Лагранжа $L = L(x^i, u, u_i)$ имеет вид

$$\alpha = a\gamma(\theta) + b\gamma'(\theta) + c\gamma''(\theta) + \dots + h\gamma^{(l)}(\theta), \quad \theta = \theta(x, u, u_i). \quad (15)$$

Для нётеровского преобразования симметрии X_α имеем

$$\delta S = \int \dots \int \delta L d^{m+1}x = \int \dots \int X_\alpha L d^{m+1}x = \int \dots \int D_i M_i d^{m+1}x = 0.$$

Поэтому должны быть выполнены следующие условия на M_i (нётеровские граничные условия) [2], [5]:

$$M_i(x, u, \dots)|_{x^i \rightarrow \partial D} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m+1. \quad (16)$$

Эти условия обычно выполнены в случае “регулярного” асимптотического поведения, $u, u_i \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$, или для периодических решений. Мы рассмотрим граничные условия другого типа, связанные с существованием локально сохраняющихся величин. Интегрируя уравнение (12) по пространству переменных $x^1, x^2, \dots, x^m$ и ограничиваясь многообразием решений, получаем

$$\int \dots \int dx^1 \dots dx^m D_t(M_t - R_{\alpha t}L) \doteq \int \dots \int dx^1 \dots dx^m \sum_{i=1}^m D_i(R_{\alpha i}L - M_i). \quad (17)$$

Применяя нётеровское граничное условие (16) и требуя, чтобы левая часть последнего уравнения обращалась в нуль на многообразии решений, получаем “строгие” граничные условия [2], [5]

$$R_{\alpha 1}L|_{x^1 \rightarrow \partial D} = R_{\alpha 2}L|_{x^2 \rightarrow \partial D} = \dots = R_{\alpha m}L|_{x^m \rightarrow \partial D} = 0. \quad (18)$$

В случае $L = L(x, u, u_j)$ строгие граничные условия (18) принимают простой вид

$$\alpha \frac{\partial L}{\partial u_i} \Big|_{x^i \rightarrow \partial D} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (19)$$

Для того чтобы система обладала локальными сохраняющимися величинами, должны быть выполнены и нётеровские (16), и строгие (18) граничные условия. В этом случае можно найти соответствующий нётеровский закон сохранения

$$\int \dots \int dx^1 \dots dx^m D_t(M_t - R_{\alpha t}L) \doteq 0. \quad (20)$$

Записывая M_t в виде

$$M_t = A\gamma(\theta) + B\gamma'(\theta) + C\gamma''(\theta) + \dots + H\gamma^{(l)}(\theta), \quad \theta = \theta(x), \quad (21)$$

и используя уравнения (21) и (15), получаем

$$D_t \int \dots \int dx^1 \dots dx^m [\gamma(\theta)a_0 + \gamma'(\theta)a_1 + \dots + \gamma^{(l)}(\theta)a_l] \doteq 0, \quad (22)$$

где

$$a_0 = A - a \frac{\partial L}{\partial u_t}, \quad a_1 = B - b \frac{\partial L}{\partial u_t}, \quad \dots, \quad a_l = H - h \frac{\partial L}{\partial u_t}, \quad i = 0, \dots, l.$$

4. НЕСИНГУЛЯРНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ $\theta = \theta(x)$

Введем новые переменные интегрирования, совершив замену $(x^1, x^2, \dots, x^m) \xrightarrow{\psi} (x^1, \dots, x^{p-1}, \theta, x^{p+1}, \dots, x^m)$. В случае несингулярного преобразования ψ можно обратить соотношение $\theta = \theta(x^1, x^2, \dots, x^m, t)$ как

$$x^p = \varphi^p(x^1, \dots, x^{p-1}, \theta, x^{p+1}, \dots, x^m, t)$$

и на основании равенства (22) получить, что

$$D_t \int \dots \int d\theta dx^1 \dots dx^{p-1} dx^{p+1} \dots dx^m \sum_{i=0}^l \bar{a}_i \gamma^{(i)}(\theta) \doteq 0, \quad (23)$$

где

$$\gamma^{(i)}(\theta) = \frac{\partial^i \gamma(\theta)}{\partial \theta^i}, \quad \bar{a}_i = a_i \frac{\partial \varphi^p}{\partial \theta}, \quad i = 0, \dots, l, \quad p = 1, \dots, m, \quad (24)$$

и $J = \partial \varphi^p / \partial \theta$ — якобиан преобразования ψ . Возьмем интеграл (23) по частям и выберем произвольно функцию $\gamma(\theta)$, обращающуюся в нуль на границе вместе со своими производными всех порядков до $l-1$:

$$\gamma(\theta)|_{\theta \rightarrow \partial D} = \gamma'(\theta)|_{\theta \rightarrow \partial D} = \gamma''(\theta)|_{\theta \rightarrow \partial D} = \dots = \gamma^{(l-1)}(\theta)|_{\theta \rightarrow \partial D} = 0. \quad (25)$$

Тогда получим

$$D_t \int \dots \int d\theta dx^1 \dots dx^{p-1} dx^{p+1} \dots dx^m \gamma(\theta) \sum_{i=0}^l (-1)^i \partial_\theta^i \bar{a}_i \doteq 0. \quad (26)$$

Поскольку функция $\gamma(\theta)$ произвольна, можно на основе известной теоремы анализа [6] прийти к выводу, что

$$D_t \int \dots \int dx^1 \dots dx^{p-1} dx^{p+1} \dots dx^m [\bar{a}_0 - \partial_\theta \bar{a}_1 + \partial_\theta^2 \bar{a}_2 + \dots + (-1)^l \partial_\theta^l \bar{a}_l] \doteq 0. \quad (27)$$

Это уравнение дает выражение для сохраняющейся величины, соответствующей бесконечной симметрии α вида (15) при условии, что выполнены граничные условия (16), (19) и (25). Таким образом, бесконечная алгебра симметрий (15) с произвольной функцией независимых переменных в случае несингулярного преобразования приводит в точности к одному закону сохранения (27).

5. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ

Если $\partial\theta/\partial x^p = 0$ для любого $p \in (1, \dots, m)$, то $\theta = t$. Аналогично уравнению (22) получаем

$$D_t \int \dots \int dx^1 \dots dx^m [\gamma(t)a_0(t) + \gamma'(t)a_1(t) + \dots + \gamma^{(l)}(t)a_l(t)] \doteq 0. \quad (28)$$

Поскольку $\gamma(t)$ – произвольная функция, имеем

$$\begin{aligned} \int \dots \int dx^1 \dots dx^m a_0(t) &\doteq \int \dots \int dx^1 \dots dx^m a_1(t) \doteq \dots \\ &\dots \doteq \int \dots \int dx^1 \dots dx^m a_l(t) \doteq 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнения (29), вообще говоря, определяют систему не законов сохранения, а дополнительных связей. Существуют три возможности.

1. Строгие и нётеровские граничные условия (18), (16) могут быть выполнены для произвольной функции $\gamma(t)$. Никакие законы сохранения не связаны с такой симметрией.

2. Строгие и нётеровские граничные условия могут быть выполнены для некоторых конкретных функций $\gamma(t)$. Каждый выбор функции $\gamma(t)$ приводит к соответствующей сохраняющейся величине (20).

3. Строгие граничные условия не могут быть выполнены ни для каких функций $\gamma(t)$. В таком случае следствием бесконечной симметрии является тот факт, что решений исходного дифференциального уравнения с граничными условиями (18), (16) не существует.

Применим изложенный выше подход к поиску существенных законов сохранения для потенциального уравнения Заболоцкой–Хохлова [7]

$$u_{xt} - u_x u_{xx} - u_{yy} - u_{zz} = 0. \quad (30)$$

Функция Лагранжа этого уравнения имеет вид

$$L = -\frac{u_x u_t}{2} + \frac{u_x^3}{6} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2}. \quad (31)$$

Рассмотрим бесконечную подгруппу точечной группы Ли симметрий уравнения (30), связанную с оператором

$$X_\gamma = -\gamma(t) \frac{\partial}{\partial x} + \left[\gamma'(t)x + \gamma''(t) \frac{y^2 + z^2}{4} \right] \frac{\partial}{\partial u}, \quad (32)$$

где $\gamma(t)$ – произвольная функция (свойства симметрии уравнения Заболоцкой–Хохлова изучались в работах [8]). Имеем

$$\begin{aligned} \alpha &= \gamma'x + \gamma'' \frac{y^2 + z^2}{4} + \gamma u_x, & X_\alpha L &= D_i M_i, & M_t &= -\frac{u\gamma'}{2}, \\ M_x &= \gamma L - \frac{xu\gamma''}{2} - u\gamma''' \frac{y^2 + z^2}{8}, & M_y &= \frac{yu\gamma''}{2}, & M_z &= \frac{zu\gamma''}{2}, \\ a &= u_x, & b &= x, & c &= \frac{y^2 + z^2}{4}, & A &= C = 0, & B &= -\frac{u}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Нётеровские и строгие граничные условия зависят от функции $\gamma(t)$.

Случай А. Пусть функция $\gamma(t)$ произвольна. Нётеровские условия (16) для X_α имеют вид

$$u_i \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad xu \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad yu \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0, \quad zu \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0, \quad u \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (34)$$

Строгие условия (19) принимают вид

$$xu_t, xu_x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad y^2 u_y \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0, \quad z^2 u_z \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (35)$$

Никакие локальные законы сохранения не связаны с нётеровским преобразованием X_α (32) для произвольной $\gamma(t)$. Дополнительные связи (29) приводят только к тривиальному решению. Существование бесконечной симметрии (32) приводит к отсутствию нетривиальных решений, удовлетворяющих граничным условиям (34), (35).

Рассмотрим теперь некоторые конкретные функции $\gamma(t)$, для которых можно ослабить наши граничные условия (34), (35), чтобы избежать ограничений (29).

Случай Б. Пусть $\gamma'(t) = 0$, $\gamma(t) = c = \text{const}$. Нётеровские условия имеют вид

$$u_i \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (36)$$

Для “строгих” граничных условий в дополнение нётеровским условиям имеем

$$u_x u_y \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0, \quad u_x u_z \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (37)$$

Согласно (20) получаем закон сохранения

$$D_t \iiint u_x^2 dx dy dz \doteq 0. \quad (38)$$

Соответствующее условию (35) уравнение непрерывности записывается как

$$D_x \left(-\frac{u_x^3}{3} + \frac{u_y^2}{2} + \frac{u_z^2}{2} \right) + D_y (-u_x u_y) + D_z (-u_x u_y) + D_t \left(\frac{u_x^2}{2} \right) \doteq 0.$$

Случай В. Пусть $\gamma''(t) = 0$, $\gamma(t) = at$, $a = \text{const} \neq 0$. Нётеровские условия имеют вид

$$u_i \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad u \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (39)$$

В дополнение к ним для строгих граничных условий имеем

$$xu_t, xu_x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad u_y, u_x u_y \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0, \quad u_z, u_x u_z \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (40)$$

Существенный закон сохранения (20), связанный с граничными условиями (39), (40), принимает вид

$$D_t \iiint [xu_x - u + tu_x^2] dx dy dz \doteq 0. \quad (41)$$

Случай Г. Пусть $\gamma''(t) \neq 0$. В этом случае получаем те же граничные условия (34), (35), что и в случае А, и те же дополнительные связи, не оставляющие никаких нетривиальных решений. Анализ других бесконечных подалгебр уравнения (30) будет приведен в отдельной публикации.

6. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОТ u, u_i

Рассмотрим симметрию

$$\alpha = af(\theta) + bf'(\theta) + cf''(\theta) + \dots + hf^{(l)}(\theta), \quad \theta = \theta(u, u_i), \quad (42)$$

где $f = f(\theta)$ – произвольная функция. Мы предполагаем, что имеют место регулярное асимптотическое поведение $u, u_i \xrightarrow{x^i \rightarrow \pm\infty} 0$ и условие $\theta(0, \dots, 0) = a$. Тогда как нетеровские (16), так и строгие (19) граничные условия выполнены, если

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(l)}(a) = 0. \quad (43)$$

Согласно формуле (20) получаем набор сохраняющихся величин с произвольной функцией $f(\theta)$, удовлетворяющей равенствам (43) и нётеровскому граничному условию (16). Таким образом, случай нётеровской симметрии с произвольной функцией от u, u_i может приводить к бесконечному набору законов сохранения. В качестве примера такой ситуации рассмотрим следующее уравнение:

$$v_{xt} - v_x v_{xx} = 0. \quad (44)$$

Функция Лагранжа этого уравнения есть

$$L = \frac{v_x v_t}{2} + \frac{v_x^3}{6}. \quad (45)$$

Уравнение (44) инвариантно относительно бесконечной подгруппы с оператором

$$X_\varphi = \varphi(v_x) \frac{\partial}{\partial v}, \quad (46)$$

где $\varphi = \varphi(v_x)$ – произвольная функция. Вычисляя $X_\varphi L$, получаем

$$X_\varphi L = D_x M_x + D_t M_t, \quad M_x = \frac{\varphi(v_x) v_t - R(v_x)}{2}, \quad M_t = \frac{P(v_x)}{2}, \quad (47)$$

где

$$P'(z) = z\varphi'(z) - \varphi(z), \quad R'(z) = z^2\varphi'(z). \quad (48)$$

Нётеровские граничные условия (16) для X_φ можно записать как

$$M_x(x, t, u, u_i)|_{x \rightarrow \pm\infty} = M_t(x, t, u, u_i)|_{t \rightarrow \pm\infty} = 0.$$

Предположим, что имеет место регулярное асимптотическое поведение функции v и ее производных

$$v_x, v_t \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad v_x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0. \quad (49)$$

Тогда нётеровские граничные условия выполнены, если

$$\varphi(0) = P(0) = R(0). \quad (50)$$

Строгие граничные условия (19) принимают вид

$$\varphi(v_x)(v_t - v_x^2) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0, \quad (51)$$

и это условие с очевидностью выполнено вследствие (49) и (50). Бесконечный набор локальных законов сохранения (20), связанных с симметрией (46), описывается следующей формулой:

$$D_t \int [P(v_x) - v_x \varphi(v_x)] dx \doteq 0, \quad (52)$$

где $\varphi = \varphi(v_x)$ – произвольная функция, $P = P(v_x)$ удовлетворяет первому из уравнений (48).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Бесконечные симметрии с произвольными функциями не всех независимых переменных приводят к конечному числу законов сохранения. Каждый существенный закон сохранения связан с конкретной формой граничного условия. Бесконечные симметрии с произвольными функциями зависимых переменных и их производных могут приводить к бесконечному числу законов сохранения.

Благодарности. Я благодарен М. Павлову за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *E. Noether.* Invariant variationsprobleme, Nachr. König. Gessell. Wissen. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1918. P. 235.
- [2] *V. Rosenhaus.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 6129.
- [3] *П. Олвер.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [4] *Н. Х. Ибрагимов.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [5] *V. Rosenhaus.* One-dimensional infinite symmetries, boundary conditions and local conservation laws. In: Symmetry and Perturbation Theory – SPT2001. Proc. of the Int. Conf. SPT2001 (Gala Gonone, Sardinia, Italy, 6–13 May 2001). Eds. D. Bambusi, G. Gaeta, M. Cadoni. Singapore: World Scientific, 2001. P. 183.
- [6] *И. М. Гельфанд, С. В. Фомин.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
- [7] *Е. А. Заболотская, Р. В. Хохлов.* Акуст. журн. 1969. Т. 15. № 1. С. 40.
- [8] *А. М. Виноградов, И. С. Красильщик, В. В. Лычагин.* Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986; *F. Schwarz.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 1613.