Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Визинеску, Операторы дираковского типа в искривленных пространствах
и роль тензоров Киллинга–Яно, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 1, 199–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1846>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:24:50

ОПЕРАТОРЫ ДИРАКОВСКОГО ТИПА В ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И РОЛЬ ТЕНЗОРОВ КИЛЛИНГА–ЯНО

Рассматривается уравнение Дирака в искривленном внешнем пространстве и исследуется роль тензоров Киллинга–Яно в построении операторов дираковского типа. Полученные общие результаты применены к случаю четырехмерного евклидова пространства Тауба–Ньюмана–Унти–Тамбурино. Исследованы гравитационные аномалии для обобщенных евклидовых метрик Тауба–Ньюмана–Унти–Тамбурино, которые допускают скрытые симметрии, аналогичные вектору Рунге–Ленца в проблеме кеплера типа.

Ключевые слова: операторы Дирака, тензоры Киллинга–Яно, пространство Тауба–Ньюмана–Унти–Тамбурино, скрытые симметрии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель данной работы состоит в исследовании квантовых объектов, а именно частиц половинного спина, в искривленных пространствах. Так как сколько-нибудь удовлетворительная квантовая теория гравитационного взаимодействия до сих пор не построена, такое исследование оправданно и нетривиально.

В псевдоклассическом подходе действие релятивистской частицы спина $1/2$ со спиновыми степенями свободы, описываемыми грассмановыми (нечетными) переменными, было впервые предложено Березиным и Мариновым [1]. Исследовались решения обобщенных уравнений Киллинга для конфигурационного пространства спиновой частицы (спинового пространства), решения которых были представлены в терминах тензоров Киллинга–Яно (КЯ). Напомним, что тензор $f_{\mu_1 \dots \mu_r}$ называется тензором КЯ валентности два, если он полностью антисимметричен и удовлетворяет уравнению

$$f_{\mu(\nu;\lambda)} = 0, \quad (1)$$

где после точки с запятой указан индекс координаты, по которой производится ковариантное дифференцирование. Заметим, что существование тензора КЯ представляет собой как необходимое, так и достаточное условие существования новой суперсимметрии в спиновом пространстве [2].

*National Institute for Physics and Nuclear Engineering, P.O. Box M.G.-6, Magurele, Bucharest, Romania. E-mail: mvisin@theor1.theory.nipne.ro

Переходя от псевдоклассического подхода к уравнению Дирака в искривленном пространстве, укажем роль тензоров КЯ при построении новых операторов дираковского типа. Операторы дираковского типа, построенные с использованием ковариантно-постоянных тензоров КЯ, эквивалентны стандартному оператору Дирака. Нековариантно-постоянные тензоры КЯ порождают нестандартные операторы Дирака, не эквивалентные стандартному оператору Дирака, и именно эти операторы связаны со скрытыми симметриями пространства.

Общие результаты затем применяются к случаю четырехмерного евклидова пространства Тауба–Ньюмана–Унти–Тамбурино (Тауба–НУТ).

В случае гравитационного взаимодействия согласованное пертурбативное квантование невозможно даже в отсутствие фермионов. Поэтому понимание проблемы аномалий, которые могут влиять на законы сохранения, исключительно важно при построении любой квантовой теории гравитации.

В настоящей работе в явном виде исследуются квантовые аномалии для квадратичных по полям интегралов движения на примере обобщенного евклидова пространства Тауба–НУТ.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА В ИСКРИВЛЕННОМ ФОНОВОМ ПОЛЕ

В дальнейшем рассматривается оператор Дирака в искривленном фоновом поле, имеющий вид

$$D_s = \gamma^\mu \hat{\nabla}_\mu. \quad (2)$$

Здесь матрицы Дирака γ_μ задаются антикоммутиационными соотношениями в локальных координатах:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I, \quad (3)$$

а $\hat{\nabla}_\mu$ обозначает каноническую ковариантную производную для спиноров. Существенные свойства этой ковариантной производной собраны в уравнениях

$$\begin{aligned} \hat{\nabla}_\mu \gamma^\mu &= 0, \\ \hat{\nabla}_{[\rho} \hat{\nabla}_{\mu]} &= \frac{1}{4} R_{\alpha\beta\rho\mu} \gamma^\alpha \gamma^\beta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $R_{\alpha\beta\rho\mu}$ — компоненты тензора кривизны Римана.

Картер и Макленахан показали [3], что в теории фермионов Дирака с любой изометрией вектора Киллинга R_μ можно ассоциировать оператор

$$X_k = -i \left(R^\mu \hat{\nabla}_\mu - \frac{1}{4} \gamma^\mu \gamma^\nu R_{\mu\nu} \right), \quad (5)$$

коммутирующий со *стандартным* оператором Дирака (2).

Далее, любой тензор КЯ $f_{\mu\nu}$ генерирует *нестандартный* оператор Дирака вида

$$D_f = -i \gamma^\mu \left(f_\mu{}^\nu \hat{\nabla}_\nu - \frac{1}{6} \gamma^\nu \gamma^\rho f_{\mu\nu;\rho} \right), \quad (6)$$

который антикоммутирует со стандартным оператором Дирака D_s .

2.1. Пример: евклидово пространство Тауба–НУТ. Рассмотрим пространство Тауба–НУТ и карту, отвечающую декартовым координатам x^μ , $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$, с линейным элементом

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f(r)(d\vec{x})^2 + \frac{g(r)}{16m^2}(dx^4 + A_i dx^i)^2, \quad (7)$$

где $\vec{x} = (r, \theta, \varphi)$ – трехвектор, $(d\vec{x})^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ и $\vec{A}$ – калибровочное поле монополя:

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} = 4m \frac{\vec{x}}{r^3}. \quad (8)$$

Вещественное число m – это параметр, входящий в теорию через функции

$$f(r) = g^{-1}(r) = V^{-1}(r) = \frac{4m + r}{r}, \quad (9)$$

а так называемая сингулярность НУТ отсутствует в случае, когда x^4 периодически с периодом $16\pi m$. Иногда удобно произвести координатное преобразование $4m(\chi + \varphi) = -x^4$ с $0 \leq \chi < 4\pi$.

В геометрии Тауба–НУТ имеются четыре вектора Киллинга [4]

$$D_A = R_A^\mu \partial_\mu, \quad A = 1, 2, 3, 4. \quad (10)$$

Один из них порождает группу трансляций $U(1)$, или χ , и он коммутирует с остальными векторами Киллинга. Оставшиеся три вектора, отвечающие инвариантности метрики (7) относительно пространственных вращений ($A = 1, 2, 3$), удовлетворяют соотношениям алгебры $SU(2)$:

$$[D_1, D_2] = -D_3 \quad (11)$$

и т. д.

В бозонном случае эти инвариантности отвечали бы сохранению углового момента и сохранению так называемого “относительного электрического заряда”:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} + q \frac{\vec{r}}{r}, \quad q = g(r)(\dot{\theta} + \cos \theta \dot{\varphi}), \quad (12)$$

где $\vec{p} = V^{-1} \dot{\vec{r}}$ – механический импульс.

С другой стороны, известно, что в геометрии Тауба–НУТ существуют четыре тензора КЯ валентности два. Первые три из них ковариантно-постоянны:

$$f_i = 8m(d\chi + \cos \theta d\varphi) \wedge dx_i - \epsilon_{ijk} \left(1 + \frac{4m}{r}\right) dx_j \wedge dx_k, \quad (13)$$

$$D_\mu f_{i\lambda}^\nu = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3,$$

а четвертый тензор КЯ, имеющий вид

$$f_Y = 8m(d\chi + \cos \theta d\varphi) \wedge dr + 4r(r + 2m) \left(1 + \frac{r}{4m}\right) \sin \theta d\theta \wedge d\varphi, \quad (14)$$

не обращается в нуль при действии ковариантной производной:

$$f_{Y r\theta;\varphi} = 2 \left(1 + \frac{r}{4m} \right) r \sin \theta. \quad (15)$$

В пространстве Тауба–НУТ существует сохраняющийся вектор, аналогичный вектору Рунге–Ленца проблемы кеплеровского типа [4]:

$$\vec{K} = \frac{1}{2} \vec{K}_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \vec{p} \times \vec{j} + \left(\frac{q^2}{4m} - 4mE \right) \frac{\vec{r}}{r}, \quad (16)$$

где сохраняющаяся энергия имеет вид

$$E = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \quad (17)$$

Компоненты $K_{i\mu\nu}$ вектора Рунге–Ленца (16) суть тензоры Штакеля–Киллинга (ШК) валентности два, удовлетворяющие уравнениям

$$K_{i(\mu\nu;\lambda)} = 0, \quad K_{i\mu\nu} = K_{i\nu\mu}. \quad (18)$$

Эти компоненты можно выразить в виде симметризованных произведений тензоров КЯ f_i, f_Y и векторов Киллинга R_A [5], [6]:

$$K_{i\mu\nu} - \frac{1}{8m} (R_{4\mu} R_{i\nu} + R_{4\nu} R_{i\mu}) = m (f_{Y\mu\lambda} f_i^\lambda{}_\nu + f_{Y\nu\lambda} f_i^\lambda{}_\mu). \quad (19)$$

2.2. Уравнение Дирака в пространстве Тауба–НУТ. При использовании декартовых карт в геометрии Тауба–НУТ полезно рассмотреть локальные координаты, задаваемые полями тетрад $\hat{e}(x)$ таких, что $g_{\mu\nu} = \delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{e}_\mu^{\hat{\alpha}} \hat{e}_\nu^{\hat{\beta}}$. Четыре матрицы Дирака $\hat{\gamma}^{\hat{\alpha}}$, удовлетворяющие соотношениям $\{\hat{\gamma}^{\hat{\alpha}}, \hat{\gamma}^{\hat{\beta}}\} = 2\delta^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$, могут быть выбраны в виде

$$\hat{\gamma}^i = -i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\gamma}^4 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 \\ \mathbf{1}_2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\gamma}^5 = \hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^2 \hat{\gamma}^3 \hat{\gamma}^4 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В пространстве Тауба–НУТ стандартный оператор Дирака имеет вид

$$D_s = \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} \hat{\nabla}_{\hat{\alpha}} = i\sqrt{V} \vec{\gamma} \cdot \vec{P} + \frac{i}{\sqrt{V}} \hat{\gamma}^4 P_4 + \frac{i}{2} V \sqrt{V} \hat{\gamma}^4 \vec{\Sigma}^* \cdot \vec{B}, \quad (21)$$

где $\hat{\nabla}_{\hat{\alpha}}$ — компоненты спинных ковариантных производных с локальными индексами

$$\hat{\nabla}_i = i\sqrt{V} P_i + \frac{i}{2} V \sqrt{V} \varepsilon_{ijk} \Sigma_j^* B_k, \quad \hat{\nabla}_4 = \frac{i}{\sqrt{V}} P_4 - \frac{i}{2} V \sqrt{V} \vec{\Sigma}^* \cdot \vec{B}. \quad (22)$$

Эти величины зависят от операторов импульса $P_i = -i(\partial_i - A_i \partial_4)$, $P_4 = -i\partial_4$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[P_i, P_j] = i\varepsilon_{ijk} B_k P_4, \quad [P_i, P_4] = 0.$$

Спиновые матрицы, порождающие спиновые связности, имеют вид

$$\Sigma_i^* = S_i + \frac{i}{2} \hat{\gamma}^4 \hat{\gamma}^i, \quad S_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} S^{jk}, \quad (23)$$

где $S^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = -i[\hat{\gamma}^{\hat{\alpha}}, \hat{\gamma}^{\hat{\beta}}]/4$.

В вышеприведенном представлении матриц Дирака гамильтонов оператор *безмассового* поля Дирака имеет вид [7]–[9]

$$H = \hat{\gamma}^5 D_s = \begin{pmatrix} 0 & V \pi^* \frac{1}{\sqrt{V}} \\ \sqrt{V} \pi & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Его можно выразить с помощью операторов

$$\pi = \sigma_P - \frac{iP_4}{V}, \quad \pi^* = \sigma_P + \frac{iP_4}{V}, \quad \sigma_P = \vec{\sigma} \cdot \vec{P}, \quad (25)$$

в то время как оператор Клейна–Гордона есть

$$\Delta = -\nabla_\mu g^{\mu\nu} \nabla_\nu = V \pi^* \pi = V \vec{P}^2 + \frac{1}{V} P_4^2. \quad (26)$$

Можно задаться целью искать сохраняющиеся величины среди операторов, которые коммутируют или антикоммутируют с D_s и $\hat{\gamma}^5$ [8], [10]. Это так в случае полного углового момента

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S},$$

где орбитальный угловой момент имеет вид

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{P} - 4m \frac{\vec{x}}{r} P_4. \quad (27)$$

Операторы дираковского типа можно строить из тензоров КЯ f_i , $i = 1, 2, 3$, и f_Y с применением (6). В квантовой теории Дирака эти операторы можно подставить вместо суперзарядов [2], [6] псевдоклассической теории. Первые три из них,

$$Q_i = -i f_{i\hat{\alpha}\hat{\beta}} \hat{\gamma}^{\hat{\alpha}} \hat{\nabla}^{\hat{\beta}}, \quad (28)$$

антикоммутируют с D_s и с $\hat{\gamma}^5$, коммутируют с H и удовлетворяют соотношениям супералгебры $N = 4$, которые также включают в рассмотрение оператор $Q_0 = iD_s = i\hat{\gamma}^5 H$:

$$\{Q_A, Q_B\} = 2\delta_{AB} H^2, \quad A, B, \dots = 0, 1, 2, 3. \quad (29)$$

Эта алгебра связана с гиперкэллеровой геометрией пространства Тауба–НУТ.

Скрытые симметрии геометрии Тауба–НУТ связаны с нетривиальными тензорами ШК $K_{i\mu\nu}$, $i = 1, 2, 3$. Чтобы построить оператор Рунге–Ленца теории Дирака, можно использовать произведения операторов дираковского типа Q_Y и Q_i .

Определим оператор [7], [8]

$$N_i = m\{Q_Y, Q_i\} - J_i P_4. \quad (30)$$

Его компоненты коммутируют с гамильтонианом H и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [N_i, P_4] &= 0, & [N_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}N_k, \\ [N_i, Q_0] &= 0, & [N_i, Q_j] &= i\varepsilon_{ijk}Q_kP_4, \\ [N_i, N_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_kF^2 + \frac{i}{2}\varepsilon_{ijk}Q_iH, \end{aligned} \quad (31)$$

где $F^2 = P_4^2 - H^2$. Чтобы записать последний коммутатор в виде, близком к коммутаторному выражению в скалярном случае [4], следует переопределить компоненты оператора Рунге–Ленца $\vec{\mathcal{K}}$:

$$\mathcal{K}_i = N_i + \frac{1}{2}H^{-1}(F - P_4)Q_i. \quad (32)$$

Теперь эти новые компоненты подчиняются искомому коммутационному соотношению [8]

$$[\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = i\varepsilon_{ijk}J_kF^2. \quad (33)$$

3. ГРАВИТАЦИОННЫЕ АНОМАЛИИ

Скрытые симметрии содержатся в тензорах ШК. Рассмотрим теперь симметричные тензоры $k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu}$, удовлетворяющие уравнению ШК (18). Для произвольной геодезической с касательным вектором u_μ тензор ШК порождает квадратичный интеграл движения вдоль геодезического потока:

$$K = k^{\mu\nu}u_\mu u_\nu. \quad (34)$$

В самом деле, если интересоваться только геодезическим потоком классических скалярных частиц, то условие (18) оказывается необходимым и достаточным для существования квадратичного интеграла движения (34), который можно получить, если вычислить скобку Пуассона интеграла K и гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu, \quad (35)$$

где p_μ – компоненты импульса и $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор.

При переходе от классического движения к скрытым симметриям квантовой системы квантовый оператор, являющийся аналогом квадратичного интеграла (34), имеет вид [11]

$$\mathcal{K} = D_\mu k^{\mu\nu} D_\nu, \quad (36)$$

где D_μ – оператор ковариантного дифференцирования на многообразии с метрикой $g_{\mu\nu}$. Вычисляя коммутатор интеграла (36) со скалярным лапласианом

$$\mathcal{H} = D_\mu D^\mu, \quad (37)$$

получим

$$\begin{aligned} [D_\mu D^\mu, \mathcal{K}] &= 2k^{\mu\nu;\lambda}D_{(\mu}D_\nu D_{\lambda)} + 3k^{(\mu\nu;\lambda)}_{;\lambda}D_{(\mu}D_{\nu)} + \\ &+ \left\{ \frac{1}{2}g_{\lambda\sigma}(k^{(\lambda\sigma;\mu);\nu} - k^{(\lambda\sigma;\nu);\mu}) - \frac{4}{3}k_\lambda^{[\mu}R^{\nu]\lambda} \right\}_{;\nu} D_\mu. \end{aligned} \quad (38)$$

В классическом случае то обстоятельство, что $k_{\mu\nu}$ представляет собой тензор ШК, удовлетворяющий условию (18), обеспечивает сохранение интеграла (34). Если обратиться к скрытым симметриям квантованной системы, то получим, что вышеприведенный коммутатор не обращается в нуль ввиду справедливости уравнения (18). А именно, с учетом уравнения (18) получим

$$[\mathcal{H}, \mathcal{K}] = -\frac{4}{3} \{k_{\lambda}^{[\mu} R^{\nu]\lambda}\}_{;\nu} D_{\mu}, \quad (39)$$

откуда следует, что квантовый оператор $\mathcal{K}$ не обязательно задает подлинную квантово-механическую симметрию [12]. В общем искривленном пространстве-времени получим тем самым *квантовую гравитационную аномалию*, пропорциональную свертке тензора СК $k_{\mu\nu}$ с тензором Риччи $R_{\mu\nu}$.

Очевидно, что такая квантовая аномалия отсутствует в случае Риччи-плоского многообразия. Более интересная ситуация возникает в случае многообразий, для которых тензор ШК $k_{\mu\nu}$ может быть представлен в виде произведения тензоров КЯ [3].

Условие интегрируемости для любого решения системы (1) имеет вид

$$R_{\mu\nu[\sigma}{}^{\tau} f_{\rho]\tau} + R_{\sigma\rho[\mu}{}^{\tau} f_{\nu]\tau} = 0. \quad (40)$$

Свертывая индексы этого условия интегрируемости для произвольного решения системы (1), получим

$$f^{\rho}{}_{(\mu} R_{\nu)\rho} = 0. \quad (41)$$

Предположим теперь, что существует *квадрат* тензора ШК $k_{\mu\nu}$, имеющий вид тензора КЯ $f_{\mu\nu}$ [3]:

$$k_{\mu\nu} = f_{\mu\rho} f_{\nu}{}^{\rho}. \quad (42)$$

В этом случае уравнение ШК (18) удовлетворяется автоматически, и условие интегрируемости (41) принимает вид

$$k^{\rho}{}_{[\mu} R_{\nu]\rho} = 0. \quad (43)$$

Следует отметить, что в этом последнем уравнении имеет место антисимметризация, а не симметризация, как в уравнении (41). Из этого соотношения тем самым следует, что коммутатор (39) обращается в нуль для тех тензоров ШК, которые допускают разложение в терминах тензоров КЯ.

Можно заключить, что источниками гравитационных аномалий скалярных полей являются операторы, построенные из симметричных тензоров ШК. Однако если тензор ШК имеет вид (42), то аномалия обращается в нуль ввиду существования тензоров КЯ.

Так как тензоры КЯ запрещают возникновение гравитационных аномалий скалярного поля и связаны с суперсимметриями и операторами дираковского типа, представляется естественным исследовать их роль в аксиальных аномалиях.

Роль аномальных тождеств Уорда в физике частиц общепризнана. Аномальная дивергенция аксиального векторного тока в фоновом гравитационном поле широко обсуждалась в литературе в связи с теоремой об индексе. В четномерных пространствах можно определить индекс оператора Дирака как разность между числом линейно независимых нулевых мод с соответствующими собственными значениями $+1$ и -1 относительно

действия оператора γ_5 . Метод индекса представляет собой как весьма полезный способ исследования топологических свойств пространства, так и метод вычисления аномалий в квантовой теории поля.

Гравитационные аномалии скалярных полей, очевидно, отсутствуют в стандартной метрике Тауба–НУТ. С другой стороны, используя теорему об индексе Атьи–Патоуди–Зингера (АПЗ) для многообразий с границей, было получено, что метрика Тауба–НУТ не дает вклада в аксиальную аномалию [13].

Ниже исследуется непрерывный переход от случая, когда скрытая симметрия описывается тензором ШК вида (42), к ситуации, в которой тензоры КЯ отсутствуют.

4. ПРИМЕР: РАСШИРЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТАУБА–НУТ

Иваи и Катаяма обобщили метрику Тауба–НУТ с сохранением симметрии кеплеровского типа (см. [14], [15]). Было доказано, что расширения метрики Тауба–НУТ не допускают возникновения тензоров КЯ, даже если они допускают появление тензоров ШК [16]. Единственным исключением оказывается собственно метрика Тауба–НУТ, в которой имеются четыре тензора КЯ валентности два.

Расширенная метрика Тауба–НУТ, обозначаемая ds_K^2 , задается на пространстве $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ выражением

$$ds_K^2 = f(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + g(r)(d\chi + \cos \theta d\varphi)^2, \quad (44)$$

где $r > 0$ – радиальная координата, угловые переменные (θ, φ, χ) параметризуют единичную сферу S^3 с $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \chi < 4\pi$, а $f(r)$ и $g(r)$ суть функции

$$f(r) = \frac{a + br}{r}, \quad g(r) = \frac{ar + br^2}{1 + cr + dr^2} \quad (45)$$

(a, b, c, d – постоянные величины). Если взять константы $c = 2b/a$, $d = (b/a)^2$ с $4m = a/b$, то от расширенной метрики Тауба–НУТ приходим к исходной евклидовой метрике Тауба–НУТ, определенной с точностью до постоянного множителя. В исходном подходе Калуцы–Клейна параметр Тауба–НУТ m положителен.

Пространства с указанной выше метрикой имеют группу изометрий $SU(2) \times U(1)$ с четырьмя векторами Киллинга R_A^μ , $A = 1, 2, 3, 4$.

Замечательный результат, полученный Иваи и Катаямой, заключается в том, что в расширенном пространстве Тауба–НУТ (44) все еще существует сохраняющаяся векторная величина, квадратичная по 4-скоростям, которая аналогична вектору Рунге–Ленца. Этот вектор имеет вид

$$\vec{K} = \vec{p} \times \vec{J} + \kappa \frac{\vec{r}}{r}, \quad (46)$$

где константа κ равна

$$\kappa = -aE + \frac{1}{2}cq^2, \quad (47)$$

а сохраняющаяся энергия E есть

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2f(r)} + \frac{q^2}{2g(r)}. \quad (48)$$

Скобки Пуассона между компонентами векторов $\vec{J}$ и $\vec{K}$ сродни скобкам, вычисленным в случае исходной метрики Тауба–НУТ [14]. В частности,

$$\{J_i, K_j\} = \epsilon_{ijk} K_k, \quad (49)$$

где компоненты K_i , $i = 1, 2, 3$, вектора $\vec{K}$ суть тензоры ШК (18).

С помощью компонент тензора ШК вектора Рунге–Ленца можно вычислить квантовую гравитационную аномалию для расширенной метрики Тауба–НУТ. С помощью прямого вычисления можно убедиться, что коммутатор (39) не обращается в нуль [17].

Мы также вычислили [17] индекс оператора Дирака для обобщенной метрики Тауба–НУТ с граничными условиями типа АПЗ и обнаружили, что расширенная метрика Тауба–НУТ не вносит вклада в аксиальную аномалию при не слишком больших деформациях стандартной метрики Тауба–НУТ. Точнее, при $c > -\sqrt{3d}$ расширенная метрика Тауба–НУТ не дает вклада в аксиальную аномалию (т.е. индекс оператора Дирака с граничными условиями типа АПЗ равен нулю). Этот результат противоречит обсуждавшимся выше квантовым аномалиям скалярных полей. С другой стороны, он представляется естественным, поскольку индекс оператора сохраняется при непрерывных деформациях этого оператора. В нашем случае это соответствует непрерывным изменениям метрики. При больших деформациях метрики могут проявляться граничные сингулярности, а значения индекса — претерпевать скачки.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе был описан псевдоклассический предел теории Дирака фермионов спина $1/2$, представляющий собой суперсимметричное расширение обычной теории релятивистской точечной частицы. Обобщенные уравнения Киллинга были решены в терминах тензоров КЯ. В случае уравнения Дирака существование тензоров КЯ в геометрии Тауба–НУТ позволяет построить некоторые операторы дираковского типа, отвечающие скрытой симметрии задачи. С другой стороны, уравнение Дирака допускает аналитическое решение, а его энергетические уровни сходны с энергетическими уровнями в случае скалярной моды [8], [9].

Представляется вероятным, что отсутствие квантовых гравитационных аномалий связано с существованием тензоров КЯ.

В случае скалярных полей разложение (42) тензоров ШК в терминах тензоров КЯ обеспечивает отсутствие гравитационных аномалий. В противном случае операторы, построенные из симметричных тензоров, могли бы в принципе служить источником для аномалий, пропорциональных тензорам Риччи.

Роль тензоров КЯ тем не менее не столь очевидна в случае аксиальной аномалии, когда топологические аспекты оказываются более важными и отсутствие тензоров КЯ не обязательно приводит к появлению аномалий.

Благодарности. Автор благодарен организаторам конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. III” за приглашение и финансовую поддержку. Работа частично поддержана грантом CNCSIS-MEC.

Список литературы

- [1] *F. A. Berezin, M. S. Marinov.* Ann. Phys. 1977. V. 104. P. 336.
- [2] *G. W. Gibbons, R. H. Rietdijk, J. W. van Holten.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 404. P. 42.
- [3] *B. Carter, R. G. McLenaghan.* Phys. Rev. D. 1979. V. 19. P. 1093.
- [4] *G. W. Gibbons, P. J. Ruback.* Commun. Math. Phys. 1988. V. 115. P. 267; *G. W. Gibbons, N. S. Manton.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 274. P. 183.
- [5] *D. Vaman, M. Visinescu.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 1398.
- [6] *D. Vaman, M. Visinescu.* Fortschr. Phys. 1999. V. 47. P. 493.
- [7] *I. I. Cotăescu, M. Visinescu.* Phys. Lett. B. 2001. V. 502. P. 229.
- [8] *I. I. Cotăescu, M. Visinescu.* J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 2978.
- [9] *I. I. Cotăescu, M. Visinescu.* Class. Q. Grav. 2001. V. 18. P. 3383.
- [10] *I. I. Cotăescu, M. Visinescu.* Class. Q. Grav. 2004. V. 21. P. 11.
- [11] *B. Carter.* Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 3395; *R. G. McLenaghan, Ph. Spindel.* Phys. Rev. D. 1979. V. 20. P. 409.
- [12] *M. Cariglia.* Class. Q. Grav. 2004. V. 21. P. 1051.
- [13] *H. Römer, B. Schroer.* Phys. Lett. B. 1977. V. 71. P. 182; *C. N. Pope.* Nucl. Phys. B. 1978. V. 141. P. 432; *T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson.* Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 423; *K. Peeters, A. Waldron.* JHEP. 1999. V. 992. P. 024.
- [14] *T. Iwai, N. Katayama.* J. Geom. Phys. 1993. V. 12. P. 55.
- [15] *T. Iwai, N. Katayama.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 2914; *J. Phys. A.* 1994. V. 27. P. 3179; *Y. Miyake.* Osaka J. Math. 1995. V. 32. P. 659.
- [16] *M. Visinescu.* J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 4383; *I. I. Cotăescu, M. Visinescu.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 6459.
- [17] *I. I. Cotăescu, S. Moroianu, M. Visinescu.* Gravitational and axial anomalies for generalized Euclidean Taub–NUT metrics. math-ph/0411047.

Зав. редакцией С. В. Сушко

Сдано в набор 04.03.2005	Подписано к печати 29.06.2005	Формат бумаги $70 \times 100 \frac{1}{16}$
Печать офсетная	Усл.печ.л. 16.9 Усл.кр.отт. 4.5 тыс.	Уч.изд.л. 15.5 Бум.л. 6.5
Тираж 260 экз.	Зак. 369	

Учредитель: Российская академия наук
 Журнал осуществляет свою деятельность
 под руководством Отделения математических наук РАН

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
 АДРЕС РЕДАКЦИИ: 119991, Москва, ул. Губкина, 8, тел. 135-20-19,
 e-mail: tmph@mi.ras.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6