Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Алексеева, Механизм стабилизации двумерных солитонов при нелинейном параметрическом резонансе, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 226–233

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1849>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 18:09:45

© 2005 г.

Н. В. Алексеева*

МЕХАНИЗМ СТАБИЛИЗАЦИИ ДВУМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ

Рассматривается простая модельная система, в которой существуют устойчивые двумерные солитоны. Такой системой является нелинейное уравнение Шредингера с затуханием и параметрической накачкой, где солитоны стабилизируются при достаточно большом коэффициенте диссипации. С помощью сведения исходного дифференциального уравнения в частных производных к конечномерной динамической системе исследуется механизм стабилизации. Из рассмотрения конечномерной системы делается вывод о том, что стабилизация наступает благодаря возникновению отрицательной обратной связи в результате подчинения фазы солитона, привязанной к фазе накачки, его амплитуде и ширине.

Ключевые слова: резонанс Фарадея, нелинейное уравнение Шредингера с затуханием и накачкой, осциллоны, стабильность.

1. Когда горизонтальный слой жидкости подвергается колебаниям в вертикальном направлении, на его поверхности образуется одно- или двумерная периодическая структура. Это явление известно со времен знаменитого эксперимента Фарадея [1], а недавно было обнаружено, что вертикальные колебания способны также поддерживать *локализованные* двумерные состояния. Такие локализованные в пространстве и осциллирующие во времени структуры – обычно называемые *осциллонами* – наблюдались на поверхности гранулированных сред [2], ньютоновых [3], [4] и неньютоновых [5] жидкостей. Впоследствии устойчивые осциллоны были воспроизведены при численном моделировании в рамках различных моделей, включая амплитудные уравнения [4], [6], непрерывные по пространству системы дискретных отображений [7], полунепрерывные [8] и гидродинамические [9] теории. Хотя образование осциллонов и наблюдалось в этих численных экспериментах, они (эксперименты) не могли раскрыть суть механизма, делающего осциллоны невосприимчивыми к нелинейному коллапсу и дисперсионному расплыванию. То обстоятельство, что стабильные осциллоны возникают в различных физических средах и в математических моделях самой разной природы, наводит на мысль,

*Department of Mathematics, University of Cape Town, South Africa.
E-mail: nora@figaro.mth.uct.ac.za

что этот механизм является достаточно простым и общим. Он должен вступать в действие всякий раз, когда имеется баланс дисперсии и нелинейности, с одной стороны, и затухания и параметрической накачки, – с другой.

Для того чтобы выделить основные компоненты этого механизма, недавно была предложена простая модель нелинейной распределенной системы, в которой возможен параметрический резонанс [10]. Эта модель представляет собой двумерную решетку диффузионно связанных маятников с затуханием и вертикально колеблющейся точкой подвеса. В настоящей работе мы рассматриваем возмущенное нелинейное уравнение Шредингера, которое описывает медленно меняющиеся амплитуды близких к синхронным колебаний маятников. Стационарные солитонные решения этого амплитудного уравнения соответствуют осциллонам на решетке. Наша цель состоит в том, чтобы понять, как комбинация затухания и параметрического возбуждения может подавлять коллапс, характерный для (невозмущенного) двумерного нелинейного уравнения Шредингера. Это, в свою очередь, прольет свет на механизм стабилизации осциллонов в колебательных средах, находящихся под действием резонансных возмущений.

2. Рассматриваемое нами уравнение представляет собой нелинейное уравнение Шредингера с дополнительными членами в правой части, описывающими затухание и параметрическую накачку:

$$i\psi_t + \nabla^2 \psi + 2|\psi|^2 \psi - \psi = h\psi^* - i\gamma\psi. \quad (1)$$

Здесь $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Помимо решетки маятников, уравнение (1) является амплитудным уравнением для широкого класса близких к консервативным двумерных колебательных систем с параметрическим усилением. В физике это уравнение использовалось в качестве феноменологической модели нелинейного фарадеевского резонанса в сплошных средах [4], [11]. Независимо оно возникло и при описании оптических параметрических осцилляторов (см. работу [12] и цитируемую в ней литературу).

Два стационарных радиально-симметричных солитонных решения уравнения (1) имеют вид

$$\psi_{\pm} = \mathcal{A}_{\pm} e^{-i\theta_{\pm}} \mathcal{R}(\mathcal{A}_{\pm} r), \quad (2)$$

где $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\mathcal{A}_{\pm}^2 = 1 \pm \sqrt{h^2 - \gamma^2}, \quad \theta_+ = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{h}\right), \quad \theta_- = \pi - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{\gamma}{h}\right),$$

а $\mathcal{R}(r)$ – колоколообразное (монотонно убывающее) решение уравнения

$$\mathcal{R}_{rr} + \frac{1}{r} \mathcal{R}_r - \mathcal{R} + 2\mathcal{R}^3 = 0 \quad (3)$$

с граничными условиями $\mathcal{R}_r(0) = \mathcal{R}(\infty) = 0$. Это решение хорошо известно в литературе [13].

Солитон ψ_+ существует для всех $h > \gamma$, в то время как солитон ψ_- существует только внутри клина $\gamma < h < \sqrt{1 + \gamma^2}$. Уместно добавить здесь, что при $h < \gamma$ решения с любыми начальными условиями затухают во времени и стремятся к нулю. Это следует из закона изменения числа частиц

$$\partial_t |\psi|^2 = 2\nabla(|\psi|^2 \nabla \chi) + 2|\psi|^2 (h \sin 2\chi - \gamma), \quad (4)$$

где χ – фаза поля ψ : $\psi = |\psi|e^{-i\chi}$. Если обозначить

$$N = \int |\psi|^2 d\mathbf{x},$$

то из уравнения (4) вытекает

$$\partial_t N \leq 2(h - \gamma)N,$$

откуда следует $N(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Нужно также заметить, что по другую сторону клина, т.е. при $h > \sqrt{1 + \gamma^2}$, все решения с граничными условиями $\psi \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ являются неустойчивыми относительно нелокализованных возмущений (возмущений непрерывным спектром) [14].

Известно [13], [15], что в отсутствие диссипации и накачки, т.е. при $h = \gamma = 0$, все локализованные начальные условия нелинейного уравнения Шредингера либо распыляются, либо коллапсируют (обращаются в бесконечность) за конечное время. Однако недавно было показано [10], что, в то время как солитон ψ_- остается неустойчивым для всех h и γ , солитон ψ_+ стабилизируется при достаточно сильных накачке и диссипации (наименьшее значение γ , при котором возможны устойчивые солитоны, равно 1.006). Наша цель – найти качественное объяснение механизма стабилизации.

3. Мы используем вариационный подход. Уравнение (1) может быть получено из принципа наименьшего действия с лагранжианом, явно зависящим от времени:

$$\mathcal{L} = e^{2\gamma t} \operatorname{Re} \int (i\psi_t \psi^* - |\nabla \psi|^2 - |\psi|^2 + |\psi|^4 - h\psi^2) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Для того чтобы проследить эволюцию локализованных конфигураций, выберем колоколообразную пробную функцию

$$\psi = \sqrt{A} e^{-i\theta - (B + i\sigma)r^2} \quad (6)$$

(этот анзац часто применяется при изучении явлений раздутий, возникающих в решениях; см., например, [16]), где A , B , θ и σ – вещественные функции переменной t . Вид подстановки достаточно произволен; пробную функцию можно уточнять и улучшать путем подгонки ее пространственного профиля и/или включения большего числа степеней свободы. Однако точность вариационного приближения не является здесь предметом первостепенной важности; наша цель заключается в том, чтобы выявить лишь основные принципы механизма стабилизации. Мы покажем, что для этого вполне достаточно гауссовой функции (6), зависящей от четырех параметров. Следовательно,

механизм стабилизации является сравнительно простым, грубым и нечувствительным к деталям аппроксимации.

После подстановки функции (6) в формулу (5) лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = e^{2\gamma t} \frac{A}{B} \left[\dot{\theta} - 1 + \frac{\dot{\sigma}}{2B} - \frac{2B}{\cos^2 \phi} + \frac{A}{2} - h \cos(\phi + 2\theta) \cos \phi \right], \quad (7)$$

где $\tan \phi = \sigma/B$. Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа суть

$$\dot{A} = 8\sigma A - 2\gamma A + 4hA \sin(\phi + 2\theta) \cos \phi - 2hA \sin[2(\phi + \theta)] \cos^2 \phi, \quad (8)$$

$$\dot{B} = 8\sigma B + 2hB \sin(\phi + 2\theta) \cos \phi - 2hB \sin[2(\phi + \theta)] \cos^2 \phi, \quad (9)$$

$$\dot{\theta} = 1 + 4B - \frac{3}{2}A + 2h \cos(\phi + 2\theta) \cos \phi - h \cos[2(\phi + \theta)] \cos^2 \phi, \quad (10)$$

$$\dot{\sigma} = 4\sigma^2 - 4B^2 + AB - 2hB \cos(\phi + 2\theta) \cos \phi + 2hB \cos[2(\phi + \theta)] \cos^2 \phi. \quad (11)$$

Определенная уравнениями (8)–(11) четырехмерная динамическая система имеет две стационарные точки, представляющие два стационарных солитона:

$$A_{\pm} = 2(1 \pm \sqrt{h^2 - \gamma^2}), \quad B_{\pm} = \frac{A_{\pm}}{4},$$

$$\theta_+ = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\gamma}{h}, \quad \theta_- = \pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\gamma}{h}, \quad \sigma_{\pm} = 0.$$

В соответствии со свойствами устойчивости решений полного уравнения в частных производных (1) стационарная точка (A_-, B_-) неустойчива при всех h и γ , тогда как точка (A_+, B_+) неустойчива при малых γ , но стабилизируется при больших значениях коэффициента диссипации. (Область устойчивости дается неравенством $h > \sqrt{1 + \gamma^4/4}$ при $\gamma \geq \sqrt{2}$). Следовательно, четырехмодовое приближение правильно воспроизводит качественные черты бесконечномерной динамики в классе локализованных решений. Установим теперь два условия связи, понижающие число независимых степеней свободы до двух; эти связи, в конечном счете, дадут ключ к пониманию механизма стабилизации.

4. Двумерная редукция возникает в пределе сильного затухания, т.е. при больших значениях γ . В этом пределе динамика должна происходить на больших временных масштабах; имея это в виду, введем “медленное” время $T = t/\gamma$. Разложим также решение по степеням малого параметра γ^{-1} :

$$A = A_0 + \frac{1}{\gamma} A_1 + \dots, \quad B = B_0 + \frac{1}{\gamma} B_1 + \dots,$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\gamma} \theta_1 + \dots, \quad \sigma = \frac{1}{\gamma} \sigma_1 + \dots.$$

Полагая $h = \gamma + c/(2\gamma)$, где $0 \leq c \leq 1$, мы гарантируем, что значение h лежит в интересующей нас области: $\gamma < h < \sqrt{1 + \gamma^2}$. Подставляя эти разложения в уравнения (8)–(11) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях γ^{-1} , получаем двумерную систему

$$\frac{dA_0}{dT} = A_0 \left[c + 8\sigma_1 - 4\theta_1^2 + 2 \left(\frac{\sigma_1}{B_0} \right)^2 \right], \quad (12)$$

$$\frac{dB_0}{dT} = 8\sigma_1 B_0 + 4\sigma_1 \theta_1 + 4 \left(\frac{\sigma_1^2}{B_0} \right), \quad (13)$$

где

$$\theta_1 = \frac{1}{2} + 2B_0 - \frac{3}{4}A_0, \quad (14)$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}A_0 B_0 - 2B_0^2. \quad (15)$$

Как и исходная, система (12), (13) имеет две стационарные точки в первом квадранте плоскости (A_0, B_0) :

$$B_0^\pm = \frac{1 \pm \sqrt{c}}{2}, \quad A_0^\pm = 4B_0^\pm,$$

при этом $\theta_1^\pm = \mp \sqrt{c}/2$ и $\sigma_1^\pm = 0$. (Поскольку оси A_0 и B_0 суть инвариантные многообразия, можно ограничиться рассмотрением только первого квадранта. В частности, стационарные точки с $A_0 < 0$ или $B_0 < 0$ не могут оказывать влияния на динамику в первом квадранте.) Как и в системе (8)–(11) с большим значением γ , стационарная точка (A_0^+, B_0^+) устойчива (устойчивый фокус), а стационарная точка (A_0^-, B_0^-) неустойчива (седло). Устойчивый узел в начале координат является еще одним аттрактором, конкурирующим с “солитон” (A_0^+, B_0^+) . Соответствующие области притяжения разделены устойчивым многообразием седловой точки (см. рисунок). При $t \rightarrow -\infty$ верхняя часть сепаратрисы (наряду со многими другими траекториями) имеет поведение $A_0, B_0 \rightarrow \infty$ с $A_0 \propto B_0^{7/2}$.

Наиболее важный вывод конечномерного анализа содержится в уравнениях (14), (15): две из четырех мод “подчинены” двум другим. Следует отметить, что разделение мод на “ведущие” и “ведомые” отчасти произвольно. Хотя в уравнениях (14), (15) амплитуда и ширина возникли как “ведущие” моды, а две компоненты фазы – как “ведомые”, редукция легко может быть переформулирована таким образом, что θ и σ , например, будут “ведущими”, а A и B – “ведомыми”. Все, что необходимо сделать, – это выразить A_0 и B_0 через θ_1 и σ_1 из (14) и (15) и подставить в (12) и (13).

5. Для того чтобы понять механизм стабилизации, обратимся к уравнению (4), управляющему плотностью элементарных составляющих $|\psi|^2$ солитона. (В том случае, когда уравнение (1) используется для моделирования фарадеевского резонанса в гранулированных средах, величина $\int |\psi|^2 dx$ имеет смысл полного числа частиц, захваченных в осциллоиде.) Первый член в правой части уравнения (4) не оказывает влияния на полное число составляющих осциллоид частиц, его действие сводится к перераспределению

Фазовый портрет векторного поля (12), (13) (здесь $c = 1/3$). Устойчивое многообразие седловой точки (A_0^-, B_0^-) разделяет плоскость на области притяжения узла в начале координат и фокуса в точке (A_0^+, B_0^+) .

конституентов внутри осциллона. Второй член, напротив, отвечает за рождение и уничтожение частиц. Поскольку этот член пропорционален $|\psi|^2$, рождение и уничтожение происходят преимущественно вблизи центра осциллона, где величина $|\psi|^2$ не слишком мала. Поскольку в этой области $r \sim 0$, то процесс рождения и уничтожения регулируется величиной θ , однородной частью фазы

$$\chi = \theta + \sigma r^2. \quad (16)$$

Неоднородная часть фазы σr^2 мала вблизи центра осциллона и играет в этом процессе второстепенную роль. Истинная же роль величины σ заключается в том, что она управляет потоком конституентов между центром и периферией солитона. Это перераспределение элементарных составляющих описывается градиентным слагаемым в правой части уравнения (4), который включает σr^2 , но не содержит θ .

При возмущении стационарной точки ψ_+ в четырехмерном фазовом пространстве системы (8)–(11) переменные θ и σ быстро, за очень короткое время порядка $\Delta t \sim 1/\gamma$, “падают” на двумерное подпространство, выделяемое условиями связи (14), (15). После этого короткого переходного процесса эволюция переменных θ и σ привязана к эволюции амплитуды $\sqrt{A}$ и ширины $1/\sqrt{B}$ солитона. Поскольку фаза χ привязана к накатке, это обеспечивает отрицательную обратную связь: возмущения величин A и B

приводят только к таким изменениям в двух компонентах фазы, что новые значения $\chi(r)$ способствуют восстановлению стационарных значений A и B . (Однородная часть фазы θ отвечает за восстановление общего числа частиц, в то время как квадратичная по r часть σr^2 перераспределяет конститuenty внутри солитона.)

Сказанное может быть проиллюстрировано на примере осциллона на поверхности гранулированного слоя, например, слоя из мелких латунных бусинок, как в эксперименте, описанном в работе [2]. Представим себе, что начальная амплитуда $\sqrt{A}$ осциллона выбрана большей ее стационарного значения (например, в результате набрасывания нескольких бусинок на его вершину): $\delta A_0(0) > 0$. Предположим для простоты, что это не сопровождается изменением начальной ширины осциллона: $\delta B_0(0) = 0$. Тогда из условий (14), (15) следует, что в начальный момент времени $\delta\theta_1(0) < 0$. Поскольку угол $2\chi = 2(\pi/4 + \gamma^{-1}\theta_1^+)$ для стационарной точки (A_0^+, B_0^+) является *острым* (вспомним, что $\theta_1^+ < 0$ и $\sigma_1^+ = 0$), уменьшение начального значения θ приводит к уменьшению исходного $\sin 2\chi$ (здесь χ дается формулой (16)). В результате второй член в правой части уравнения (4) становится отрицательным в начальный момент времени, что запускает процесс уничтожения элементарных составляющих (в ситуации, рассматриваемой в эксперименте, это означает просто, что бусинки начинают “покидать” осциллон, возвращаясь в окружающий слой). Процесс уничтожения продолжается до тех пор, пока стационарное значение χ не будет восстановлено.

Почему этот механизм не срабатывает в случае неустойчивой неподвижной точки (A_0^-, B_0^-) ? Отличие состоит в том, что в этом случае $\theta_1^- > 0$ и, таким образом, угол $2\chi = 2(\pi/4 + \gamma^{-1}\theta_1^-)$ является *тупым*. Поэтому увеличение числа частиц в начальный момент времени и соответствующее изначальное уменьшение фазы χ означают *увеличение* величины $\sin 2\chi$. Второй член в правой части уравнения (4) становится положительным, и это запускает процесс дальнейшего рождения элементарных составляющих (т.е. дополнительные бусинки будут захватываться в осциллон из окружающего слоя). Следовательно, на этот раз обратная связь является положительной, и это делает стабилизацию невозможной.

Почему для устойчивости необходимо большое затухание? При малом значении γ взаимодействие параметров θ и σ с параметрами A и B осуществляется посредством дифференциальных, а не алгебраических связей. В этом случае динамика θ и σ становится инерционной, и в результате изменение компонент фазы может не успевать за эволюцией амплитуды и ширины. Петля обратной связи разрывается, и солитон дестабилизируется. Резюмируя результаты работы, отметим, что механизм стабилизации включает две основные компоненты: подчинение двух степеней свободы солитона (например, однородной по пространству и квадратичной составляющих фазы) двумя другими (амплитудой и эффективной шириной) и привязку фазы солитона (а тем самым и его амплитуды и ширины) к параметрической накачке.

Благодарности. Данная работа была поддержана грантами University Research Council of UCT и National Research Foundation.

Список литературы

- [1] *H. W. Müller, R. Friedrich, D. Papathanassiou.* Theoretical and experimental investigation of the Faraday instability. In: Evolution of Spontaneous Structures in Dissipative Continuous Systems, Lecture Notes in Physics. V. 55. Eds. F. Busse and S.C. Müller. N.Y.: Springer, 1998. P. 231.
- [2] *P. B. Umbanhowar, F. Melo, H. L. Swinney.* Nature. 1996. V. 382. P. 793.
- [3] *O. Lioubashevski, H. Arbell, J. Fineberg.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 3959; *H. Arbell, J. Fineberg.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 756.
- [4] *D. Astruc, S. Fauve.* Parametrically Amplified 2-Dimensional Solitary Waves. In: IUTAM Symposium on Free Surface Flows. Proc. UIIAM Symp. on Free Surface Flows (Birmingham, UK, July 10–14, 2000). Fluid Mechanics and Its Applications. V. 62. Eds. A.C. King and Y.D. Shikhmurzaev. Boston: Kluwer, 2001. P. 39.
- [5] *O. Lioubashevski, Y. Hamiel, A. Agnon, Z. Reches, J. Fineberg.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3190.
- [6] *L. S. Tsimring, I. S. Aranson.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 213; *H. Sakaguchi, H. R. Brand.* Europhys. Lett. 1997. V. 38. P. 341; *Physica D.* 1998. V. 117. P. 95; *C. Crawford, H. Riecke.* Physica D. 1999. V. 129. P. 83.
- [7] *E. Cerda, F. Melo, S. Rica.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 4570; *S. C. Venkataramani, E. Ott.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 3495; *S.-O. Jeong, T.-W. Ko, H.-T. Moon.* Physica D. 2002. V. 164. P. 71.
- [8] *D. Rothman.* Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 1239.
- [9] *J. Eggers, H. Riecke.* Phys. Rev. E. 1999. V. 59. P. 4476.
- [10] *I. V. Barashenkov, N. V. Alexeeva, E. V. Zemlyanaya.* Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 104101.
- [11] *S. V. Kiyashko, L. N. Korzinov, M. I. Rabinovich, L. S. Tsimring.* Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 5037; *W. Zhang, J. Viñals.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 74. P. 690.
- [12] *V. J. Sánchez-Morcillo, I. Pérez-Arjona, F. Silva, G. J. de Valcárcel, E. Roldán.* Opt. Lett. 2000. V. 25. P. 957; *I. Pérez-Arjona, E. Roldán, G. J. de Valcárcel.* Squeezed quantum cavity solitons. quant-ph/0405148.
- [13] *K. Rypdal, J. J. Rasmussen, K. Thomsen.* Physica D. 1985. V. 16. P. 339.
- [14] *I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan, V. I. Korobov.* Europhys. Lett. 1991. V. 15. P. 113.
- [15] *E. A. Kuznetsov, S. K. Turitsyn.* Phys. Lett. A. 1985. V. 112. P. 273; *V. M. Malkin, E. G. Shapiro.* Physica D. 1991. V. 53. P. 25.
- [16] *В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов.* ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 1310.