Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, Евклидовы 4-симплексы и инварианты четырехмерных многообразий. III. Перестройки $1 \leftrightarrow 5$ и связанные с ними структуры, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 179–195

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:38:54

ЕВКЛИДОВЫ 4-СИМПЛЕКСЫ
И ИНВАРИАНТЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ
МНОГООБРАЗИЙ. III. ПЕРЕСТРОЙКИ $1 \leftrightarrow 5$
И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ СТРУКТУРЫ

Завершается построение алгебраического комплекса, состоящего из пространств дифференциалов евклидовых метрических величин, для четырехмерных кусочно-линейных многообразий. В предположении, что комплекс является ациклическим, исследуется, как меняется его кручение при перестройках триангуляции многообразия. Сначала выписываются формулы для перестроек $3 \rightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$, основанные на результатах двух предшествующих работ, а затем подробно изучаются перестройки $1 \leftrightarrow 5$. На основе этого получается формула для инварианта четырехмерного многообразия. В качестве примера приводится подробное вычисление инварианта для сферы S^4 ; в частности, комплекс действительно оказывается ациклическим.

Ключевые слова: кусочно-линейные многообразия, инварианты многообразий, движения Пахнера, дифференциальные тождества для евклидовых симплексов, ациклические комплексы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эта работа является третьей в серии статей, начатой работами [1] и [2]. Мы также используем для ссылок на эти работы римские цифры I и II, соответственно; в частности, уравнение (II.1) есть уравнение (1) из работы [2] (или II).

Наша цель — построение и исследование ациклических комплексов нового типа, из которых можно было бы извлекать инварианты четырехмерных кусочно-линейных многообразий. Впрочем, во время написания работы I еще не было ясно, что именно ациклические комплексы стоят за рассматривавшимися там алгебраическими формулами, а также за инвариантами *трехмерных* многообразий из статей [3] и [4]. Эти комплексы были выписаны в работе II — полностью для трехмерного случая и часть комплекса — для четырехмерного. Относительно четырехмерного случая выяснилось, что для построения величины, инвариантной *только* относительно движений Пахнера (т.е. перестроек триангуляции многообразия) типа $3 \rightarrow 3$ достаточно рассматривать лишь небольшую

---

* Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия. E-mail: kig@susu.ac.ru

центральную часть комплекса (два векторных пространства и одно линейное отображение между ними), а подключение перестроек $2 \leftrightarrow 4$ требует рассмотрения еще одного пространства (а именно, пространства девиаций ребер) и отображения.

Работа I была посвящена перестройкам $3 \rightarrow 3$, а работа II – перестройкам $2 \leftrightarrow 4$. Поэтому *весь* комплекс и не требовался в этих работах, и его полный вид был лишь анонсирован в работе II (формулы (II.6) и (II.7)).

Содержание настоящей работы по разделам таково. В разделе 2 мы снова возвращаемся в размерность 3 и выписываем ациклический комплекс из раздела 2 работы II в несколько измененном (более длинном) виде, проясняющем структуру одного из фигурировавших пространств как *факторпространства*. Это простое улучшение может существенно упростить наши построения при переходе к высшим размерностям.

В разделе 3 мы строим обещанное в работе II пространство девиаций вершин и его отображение в пространство девиаций ребер. Это позволяет нам выписать в разделе 4 наш комплекс для четырехмерного случая полностью, при этом мы “удлиняем” его по сравнению с работой II по аналогии с трехмерным случаем. Впрочем, то, что наша последовательность пространств и отображений действительно является комплексом, нужно еще доказать, и мы делаем это в разделе 5.

Нам хотелось бы, чтобы построенный комплекс был ациклическим (т.е. точной последовательностью), и чтобы из его кручения можно было получать инварианты многообразий. Полностью в общем случае мы этого не доказываем, ограничиваясь частными замечаниями в конце раздела 5 (см. также конкретный пример в разделе 9). Далее мы доказываем *в предположении точности*, что кручение комплекса не меняется при движениях Пахнера (а также что сама точность сохраняется при этих движениях). С этой целью мы изучаем в разделе 6, как меняется комплекс при движениях $3 \rightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$, а в разделе 7 – при движениях $1 \leftrightarrow 5$ (можно сказать, что именно рассмотрение движений $1 \leftrightarrow 5$ потребовало детального изучения *всего* алгебраического комплекса). В разделе 8 мы приводим окончательную формулу для инварианта четырехмерного кучочно-линейного многообразия (т.е. инварианта *всех* движений Пахнера) через кручение комплекса и другие евклидовы геометрические величины. В разделе 9 мы показываем, как наш аппарат работает в случае сферы S^4 (и явно проверяем, что как минимум для сферы комплекс является ациклическим).

В заключительном разделе 10 мы обсуждаем полученные результаты.

2. ЕЩЕ ОДНО ВОЗВРАЩЕНИЕ В РАЗМЕРНОСТЬ 3: УДЛИНЕНИЕ АЦИКЛИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

Напомним, как выглядел ациклический комплекс из раздела 2 работы II, сопоставленный триангуляции трехмерного многообразия M (формула (II.1)):

$$0 \leftarrow (\dots) \xleftarrow{B^T} (d\omega) \xleftarrow{A} (dl) \xleftarrow{B} (dx \text{ и } dg) \leftarrow 0.$$

Здесь $(d\omega)$ – пространство векторов-столбцов из бесконечно малых углов дефекта при всех ребрах комплекса, (dl) – пространство столбцов дифференциалов длин ребер,

(dx) – пространство столбцов дифференциалов евклидовых координат вершин комплекса (точнее, их поднятий в универсальную накрывающую), (dg) – пространство столбцов дифференциалов непрерывных параметров, от которых зависит представление $f: \pi_1(M) \rightarrow E_3$. В частности, для многообразий с конечной фундаментальной группой (dg) отсутствует.

Таким образом, мы продолжаем применять обозначения в стиле работы II для линейных пространств, входящих в алгебраические комплексы, надеясь, что удобство таких обозначений искупает их некоторую вольность. Разумеется, с формальной точки зрения, например, пространство (dl) есть *касательное пространство* к многообразию, состоящему из всевозможных наборов положительных чисел (“длин”) сопоставленных ребрам нашей триангуляции; (dx) и (dg) (пространство столбцов из всех dx и всех dg) есть *прямая сумма* $(dx) \oplus (dg)$.

Напомним, что (dx) в последовательности (II.1) есть пространство дифференциалов координат, которые берутся с точностью до бесконечно малых движений евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, совместимых с данным представлением f , т.е. движений, коммутирующих с его образом $\text{Im } f = f(\pi_1(M))$. Такие движения образуют подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{e}_3$, которую мы обозначим $\mathfrak{a}$. В явном виде столбец (dx) для различных случаев описан в разделе 2 работы II. В трехмерном случае такое описание делается легко, но трудности могут возрасти при переходе к высшим размерностям. Поэтому имеет смысл переписать последовательность (II.1) в следующем более элегантном виде.

Позволим себе *изменить обозначения* и далее понимать под (dx) пространство столбцов дифференциалов евклидовых координат вершин комплекса без всяких дальнейших условий, т.е. столбцов из величин $(dx_1, dy_1, dz_1, \dots, dx_N, dy_N, dz_N)$. Тогда *прежнее* пространство (dx) запишется как фактор $(dx)/\mathfrak{a}$. Это подсказывает идею добавить к последовательности (II.1) еще один член справа от (dx) и (dg) (и симметричный ему член слева – см. ниже) и понимать (dx) теперь в новом смысле:

$$0 \leftarrow (\dots) \leftarrow (\dots) \xleftarrow{B^T} (d\omega) \xleftarrow{A} (dl) \xleftarrow{B} (dx \text{ и } dg) \leftarrow \mathfrak{a} \leftarrow 0. \quad (1)$$

Напомним, что вся последовательность (как (II.1), так и (1)) симметрична в следующем смысле. Каждый ее член рассматривается как векторное пространство с фиксированным базисом, отображения между ними отождествляются с матрицами, и две матрицы на равных расстояниях от левого и правого концов последовательности получаются друг из друга транспонированием. В частности, матрица A , задающая отображение $(dl) \rightarrow (d\omega)$, симметрична.

Что касается обозначения $(\dots)$, то его мы применяем для *различных* линейных пространств, конкретный геометрический смысл которых нас (пока) не интересует (но матрицы связывающих их отображений нам известны, например, в силу симметрии, о которой шла речь в предыдущем абзаце).

Кручение ациклического комплекса есть произведение некоторых миноров матриц его линейных отображений, взятых в чередующихся степенях ± 1 . Если принять соглашение, что первому нетривиальному (после нулевой инъекции, т.е., скажем, в последовательности (II.1) это вторая справа стрелка) отображению соответствует знак “+”, то

при переходе от (II.1) к (1) кручение заменится на обратную ему величину. Чтобы избежать этого явления, можно *договориться* по-прежнему сопоставлять отображению B в последовательности (1) знак “+”. Тогда *кручение комплекса* (1) *совпадает с кручением комплекса* (II.1) при естественном выборе базиса в алгебре Ли $\mathfrak{e}_3$ (три бесконечно малых сдвига вдоль взаимно перпендикулярных осей и три вращения вокруг этих же осей).

Полное доказательство этого утверждения должно содержать разбор всех частных случаев из раздела 2 работы II. Мы здесь ограничимся случаем линзового пространства $L(p, q)$ с нетривиальным гомоморфизмом $f: \pi_1(L(p, q)) \rightarrow E_3$, образ которого – вращения вокруг оси z . Чтобы составить нужный нам минор матрицы отображения $\mathfrak{a} \rightarrow (dx)$, выберем в пространстве (dx) два базисных элемента, а именно dx_1 и dz_1 , где индекс 1 соответствует вершине триангуляции, которую мы считаем первой. Теперь простой непосредственный расчет показывает, что действительно кручения комплексов (1) и (II.1) совпадают, если в последнем мы выберем базис “старых” (dx) по формуле (II.2) (здесь сто́ит напомнить, что мы рассматриваем кручение *с точностью до знака*).

3. ДЕВИАЦИИ ВЕРШИН И ИХ ОТОБРАЖЕНИЕ В ДЕВИАЦИИ РЕБЕР

Мы уже неоднократно использовали в наших конструкциях евклидовы координаты: координаты вершины комплекса при построении отображения $(dx) \rightarrow (dl)$ в трехмерном и четырехмерном случаях и координаты вектора девиации ребра при построении отображения $(d\vec{v}) \rightarrow (dS)$. Сделаем следующее замечание: при этих построениях нам не требовалось никакой связи между системами координат для *различных* вершин и/или ребер. Каждая система в отдельности могла быть выбрана произвольно, например, могли быть заданы углы между осями координат и близлежащими ребрами.

Обойтись совсем без таких систем координат невозможно, если мы хотим *фиксировать базисы* во всех векторных пространствах, входящих в комплекс; с другой стороны, кручение наших комплексов, как нетрудно проверить, не зависит от выбора этих систем.

В этом разделе мы сначала определим *девиацию вершины* как тензорную величину, для фиксации компонент которой нужна система координат, сопоставленная *вершине*. Далее нам будет удобно определить порождаемые ею девиации ребер, имеющих одним из концов данную вершину, используя для этих ребер ту же (т.е. сопоставленную вершине) систему координат. Мы будем подразумевать, что впоследствии компоненты девиации каждого ребра пересчитываются в сопоставленную ему систему координат с помощью нужного ортогонального преобразования.

Итак, назовем девиацией вершины бивектор (антисимметричный тензор) $d\sigma_{\alpha\beta}$, где $\alpha, \beta = 1, \dots, 4$. Пусть AB есть одно из ребер, выходящих из вершины A . Это ребро определяет четырехмерный вектор $\vec{AB}$, координаты которого обозначим l_α . По определению девиация вершины A , равная $d\sigma_{\alpha\beta}$, порождает девиацию ребра $d\vec{v}_{AB}$, компоненты которой суть

$$(d\vec{v}_{AB})_\beta = \frac{1}{L_{AB}} \sum_{\alpha} l_{\alpha} d\sigma_{\alpha\beta}, \quad (2)$$

где $L_{AB} = \sum_{\alpha} l_{\alpha}^2$ есть квадрат длины ребра AB .

В общем случае $d\vec{v}_{AB}$ складывается из выражения (2) и аналогичного выражения, включающего девиацию вершины B (в котором, разумеется, используется вектор $\vec{BA}$ вместо $\vec{AB}$). Разумность определения (2) станет ясна в разделе 5, где мы, в частности, докажем, что девиации ребер типа (2) порождают нулевые дифференциалы (dS) площадей двумерных граней. Это будет частью утверждения “композиция двух соседних стрелок (т.е. линейных отображений) последовательности равна нулю”, что оправдывает название “комплекс” для этой последовательности. Переходим к ее построению в полном виде.

4. ПОЛНЫЙ ВИД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПРОСТРАНСТВ И ОТОБРАЖЕНИЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Как и в разделе 3 работы II, мы будем выписывать две “сопряженные” последовательности. По сравнению с формулами (II.6) и (II.7) мы удлиним их с двух сторон по аналогии с трехмерным случаем (раздел 2 настоящей работы), так как крайнее левое ненулевое пространство в формуле (II.7) и крайнее правое в (II.6) естественно представляются в виде факторпространств.

Что касается первого из упомянутых пространств, обозначенного $(dx$ и $dg)$ в формуле (II.7), то здесь все делается в принципе так же, как в размерности 3. Поэтому мы сразу займемся вторым, обозначенным $(d\sigma)$ в формуле (II.6), т.е. пространством девиаций вершин, введенным в предыдущем разделе. Оказывается, имеется несложно определяемое пространство “тривиальных” девиаций, порождающих нулевые девиации ребер $d\vec{v}_a$, и оно находит свое естественное место в нашем комплексе.

Обратимся к формуле (2). Напомним, что в ней тензорная величина $d\sigma_{\alpha\beta}$ относится к точке A , а l_{α} суть компоненты вектора $\vec{AB}$. Если учесть также $d\sigma_{\alpha\beta}$ в точке B , то мы получим

$$(d\vec{v}_{AB})_{\beta} = \frac{1}{L_{AB}} \sum_{\alpha} l_{\alpha} ((d\sigma_A)_{\alpha\beta} - (d\sigma_B)_{\alpha\beta}). \quad (3)$$

Отсюда видно, что $d\vec{v}_{AB} = 0$, если разность $(d\sigma_A)_{\alpha\beta} - (d\sigma_B)_{\alpha\beta}$ представляется в виде $\sum_{\gamma, \delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} l_{\gamma} ds_{\delta}$, где $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — полностью антисимметричный тензор, $\epsilon_{1234} = 1$, а $d\vec{s}$ — любой инфинитезимальный вектор.

Переходя от рассмотрения одного ребра AB к рассмотрению всех ребер комплекса, возьмем сначала случай тривиального представления $f: \pi_1(M) \rightarrow E_4$ фундаментальной группы нашего многообразия M в группу движений четырехмерного евклидова пространства, т.е. случай $\text{Im } f = \{e\}$. Это значит, что все прообразы каждой данной вершины комплекса попадают в одну и ту же точку пространства $\mathbb{R}^4$ (см. раздел 3 работы I), т.е., попросту говоря, каждой вершине A однозначно сопоставлен ее радиус-вектор $\vec{r}_A$ с компонентами $(r_A)_{\alpha}$ в некоторой общей для всего комплекса системе декартовых координат.

Выберем инфинитезимальные антисимметричный тензор $d\tau_{\alpha\beta}$ и вектор ds_{α} и положим для каждой вершины A

$$(d\sigma_A)_{\alpha\beta} = d\tau_{\alpha\beta} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} (r_A)_{\gamma} ds_{\delta}. \quad (4)$$

Из вышесказанного следует, что такая совокупность девиаций вершин дает нулевые девиации всех ребер. Отметим, что столбцы $d\sigma$ вида (4) образуют десятимерное линейное пространство.

Если же представление f нетривиально, то каждая вершина имеет более одного прообраза в универсальной накрывающей, и эти прообразы помещаются в разные точки пространства $\mathbb{R}^4$. Требование, чтобы формула (4) давала один и тот же результат для всех таких прообразов (после пересчета в систему координат, сопоставленную данной вершине – см. раздел 3), приводит к линейным ограничениям на допустимые $d\tau_{\alpha\beta}$ и ds_β . В настоящей статье мы не будем явно выписывать эти ограничения: на первое время мы вообще собираемся ограничиться изучением односвязных многообразий, для которых $\pi_1(M) = \{e\}$. Тем не менее введем обозначение $(d\sigma)_0$ для подпространства столбцов корректно определенных девиаций вершин вида (4) в случае *любого* многообразия M .

Теперь мы готовы переписать последовательности (II.6) и (II.7) в обновленном (удлиненном) виде. Несмотря на то, что мы по-прежнему используем обозначение $(\dots)$ для векторных пространств, геометрическим смыслом которых мы пока не занимаемся, всем *матрицам* отображений, обозначенных стрелками, мы теперь *дали определение*. Итак, вот эти взаимно сопряженные последовательности:

$$0 \leftarrow (\dots) \leftarrow (\dots) \leftarrow (d\Omega_a) \xleftarrow{(\partial\Omega_a/\partial S_i)} (dS_i) \leftarrow (d\vec{v}_a) \leftarrow (d\sigma) \leftarrow (d\sigma)_0 \leftarrow 0, \quad (5)$$

$$0 \rightarrow \mathfrak{a} \rightarrow (dx \text{ и } dg) \rightarrow (dL_a) \xrightarrow{(\partial\omega_i/\partial L_a)} (d\omega_i) \rightarrow (\dots) \rightarrow (\dots) \rightarrow (\dots) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Здесь, конечно, $\mathfrak{a}$ является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{e}_4$ движений евклидова пространства $\mathbb{R}^4$. А именно, $\mathfrak{a}$ состоит из движений, коммутирующих с образом группы $\pi_1(M)$ в E_4 , в полной аналогии с трехмерным случаем из раздела 2.

5. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ЯВЛЯЕТСЯ КОМПЛЕКСОМ

Докажем, что композиция любых двух соседних стрелок в последовательности (5) или, эквивалентно, (6) равна нулю. Этим мы оправдаем название “комплекс” для каждой из этих последовательностей.

Начнем с двух стрелок последовательности (5), соседних с членом $(d\sigma)$. То, что их композиция равна нулю, прямо следует из сопоставления формул (3) и (4) предыдущего раздела.

Двигаясь влево, обратим внимание на две стрелки вокруг члена $(d\vec{v}_a)$. Рассмотрим треугольник ABC – одну из двумерных граней нашего симплициального комплекса – и убедимся, что девиации его ребер, если они задаются формулами типа (3), приводят к нулевому дифференциалу площади dS_{ABC} .

Достаточно рассмотреть случай, когда ненулевая девиация $d\sigma$ имеется лишь в вершине A . По формуле (2) получается, что длины векторов $d\vec{v}$ на рис. 1 обратно пропорциональны сторонам треугольника, от которых они отложены. Отсюда нетрудно вывести, что учетверенная площадь треугольника $A'B'C'$ совпадает с площадью треугольника ABC и, значит, $dS_{ABC} = 0$ согласно формуле (II.8).

Рис. 1

Двигаясь далее влево по последовательности (5), мы должны рассмотреть две стрелки, примыкающие к члену (dS_i) , но то, что их произведение равно нулю, уже доказано в разделе 5 работы II.

Для рассмотрения оставшихся двух пар стрелок мы перейдем к последовательности (6). В ее терминах это будут пары стрелок вокруг членов $(dx$ и $dg)$ и (dL_a) . Остается заметить, что нужные нам утверждения доказываются полностью аналогично тому, как это делалось для трехмерного случая в разделе 2 работы II и в разделе 2 настоящей работы. Более того, имеется даже *точность* в этих членах.

Что же касается точности в других членах, о ней пока в общем случае ничего не известно, кроме, разумеется, крайних членов a и $(d\sigma)_0$, возникших при нашем удлинении комплекса, где точность очевидна из их построения. Тем не менее в следующих разделах 6 и 7 мы увидим, что если последовательность точна, то это свойство сохраняется при перестройках Пахнера, т.е. не зависит от триангуляции. Кроме того, разобранный ниже в разделе 9 пример сферы S^4 показывает, что во всяком случае для сферы последовательность *является* точной (т.е. ациклическим комплексом).

6. ИЗМЕНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ПРИ ПЕРЕСТРОЙКАХ $3 \rightarrow 3$ И $2 \leftrightarrow 4$

Мы уже знаем из работ I и II, что происходит при перестройках $3 \rightarrow 3$ и $2 \leftrightarrow 4$. В данном разделе наша задача – переформулировать эти результаты, последовательно придерживаясь алгебраического языка ациклических комплексов.

6.1. Перестройки $3 \rightarrow 3$. В работе I, посвященной перестройкам $3 \rightarrow 3$, мы рассматривали матрицу $(\partial\Omega_a/\partial S_i)$ и сопряженную ей $(\partial\omega_i/\partial L_a)$. С нашей нынешней точки зрения они образуют центральную часть последовательности (5) и сопряженной ей (6). Часть результатов работы I (а именно, теорема 4) не относится собственно к перестройке $3 \rightarrow 3$, а лишь воспроизводит (несколько кустарными средствами) часть утверждения о том, что кручение комплекса не зависит от конкретного выбора миноров, через которые оно выражается. Собственно же к перестройке $3 \rightarrow 3$ относится теорема 3 работы I.

Имеет смысл привести здесь еще раз ее формулировку (почти дословно): “Выберем в матрице $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ наибольшую квадратную подматрицу $\mathcal{B}$ с ненулевым определителем. Пусть $\mathcal{B}$ содержит строку, соответствующую такой грани $i = ABC$, которая принадлежит ровно трем 4-симплексам. Тогда их можно заменить на три новых 4-симплекса перестройкой $3 \rightarrow 3$. После такой замены возьмем в *новой* матрице $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ новую подматрицу $\mathcal{B}$ из тех же строк и столбцов, заменив только строку, соответствовавшую грани ABC , на строку, соответствующую новой грани DEF .

При такой перестройке выражение

$$\frac{\det \mathcal{B} \cdot \prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{4-симплексам}}} V}{\prod_{\substack{\text{по всем} \\ \text{двумерным граням}}} S} \quad (7)$$

не меняется”.

Добавим к этому следующее. Кручение комплекса (6) есть альтернированное произведение миноров, один из которых и есть $\det \mathcal{B}$. При описанной реализации перестройки $3 \rightarrow 3$ все другие миноры очевидным образом остаются без изменений. Поэтому можно сказать, что формула (7) описывает поведение не только $\det \mathcal{B}$, но и всего кручения τ при перестройке $3 \rightarrow 3$. Очевидно также, что само свойство ацикличности, если оно было у комплекса, сохраняется.

6.2. Перестройки $2 \leftrightarrow 4$. Будем для удобства говорить о перестройках $2 \rightarrow 4$, имея в виду очевидную обратимость дальнейших рассуждений и формул на случай перестроек $4 \rightarrow 2$.

При перестройке $2 \rightarrow 4$ к симплицальному комплексу добавляется одно ребро и четыре двумерных грани. В алгебраическом же комплексе (5) размерность пространства векторов-столбцов (dS_i) возрастает на 4, размерность пространства $(d\vec{v}_a)$ – на 3 и размерность пространства $(d\Omega_a)$ – на 1. Поэтому мы можем увеличить на 3 размеры минора матрицы $(\partial S_i/\partial \vec{v}_a)$ и на 1 – минора матрицы $(\partial \Omega_a/\partial S_i)$ и при этом *не менять миноры*, из которых составляется кручение, *за пределами участка* $(d\Omega_a) \leftarrow (dS_i) \leftarrow (d\vec{v}_a)$.

Как и в разделе 6 работы II, мы обозначим добавляемое ребро AB , а четыре добавляемые грани будут ABC , ABD , ABE и ABF . Производные от площадей первых трех граней мы отнесем к минору матрицы $(\partial S_i/\partial \vec{v}_a)$, а производные по S_{ABF} – к минору матрицы $(\partial \Omega_a/\partial S_i)$. Сами эти миноры мы будем обозначать просто $\text{minor}(\partial S_i/\partial \vec{v}_a)$ и т.п.: мы рассматриваем только по одному минору для каждой матрицы, и нет опасности их с чем-либо спутать.

Что касается 4-симплексов, то и для них мы продолжаем использовать обозначения работы II. А именно, при перестройке $2 \rightarrow 4$ два смежных 4-симплекса $ACDEF = \hat{B}$ и $BCDFE = -\hat{A}$ заменяются на четыре: $ABCDE = \hat{F}$, $ABCDF = -\hat{E}$, $ABCEF = \hat{D}$ и $ABDFE = -\hat{C}$.

Формула (II.10) показывает, что при перестройке $2 \rightarrow 4$ интересующий нас минор матрицы $(\partial S_i/\partial \vec{v}_a)$ умножается на

$$\frac{3V_{\hat{F}}I_{AB}^5}{S_{ABC}S_{ABD}S_{ABE}}. \quad (8)$$

Что касается минора матрицы $(\partial\Omega_a/\partial S_i)$, то он, согласно формуле (II.15), умножается на

$$\frac{S_{ABF}}{24} \frac{V_A V_{\hat{B}}}{V_{\hat{C}} V_{\hat{D}} V_{\hat{E}}}. \quad (9)$$

Отсюда нетрудно вывести, что величина

$$\frac{\text{minor} \left(\frac{\partial\Omega_a}{\partial S_i} \right) \prod_{\text{по всем 4-симплексам}} V \prod_{\text{по всем ребрам}} 72l^5}{\text{minor} \left(\frac{\partial S_i}{\partial v_a} \right) \prod_{\text{по всем двумерным граням}} S} \quad (10)$$

сохраняется при перестройках $2 \rightarrow 4$.

Сравнивая это с формулой (7), мы видим, что величина (10) сохраняется и при перестройках $3 \rightarrow 3$ (разумеется, $\text{minor}(\partial\Omega_a/\partial S_i)$ есть то же самое, что $\det \mathcal{B}$ в формуле (7)). Кроме того, снова очевидным является сохранение самого свойства ацикличности.

7. ИЗМЕНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ПРИ ПЕРЕСТРОЙКАХ $1 \leftrightarrow 5$

Как и в предыдущем разделе, мы будем для конкретности рассматривать перестройку только в одну сторону, а именно $1 \rightarrow 5$. При такой перестройке к симплициальному комплексу добавляется новая *вершина* (обозначим ее F), которая разбивает один 4-симплекс (обозначим его $ABCDE$) на пять 4-симплексов, которые мы будем обозначать в стиле предыдущего раздела $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ и $\hat{E}$.

Будем описывать, как увеличатся миноры, из которых составляется кручение комплекса (5) или (6), начиная слева, с отображения $(dx \text{ и } dg) \rightarrow (dL_a)$ (минор “предыдущего” отображения $\mathfrak{a} \rightarrow (dx \text{ и } dg)$ не меняется, см. замечание после формулы (12)). Столбцы дифференциалов координат dx удлинняются на 4: к ним добавляются dx_F , dy_F , dz_F и dt_F — дифференциалы четырех координат новой вершины F . Значит, нужно выбрать и четыре величины dL , отвечающие четырем новым строкам минора. Пусть это будут dL_{AF} , dL_{BF} , dL_{CF} и dL_{DF} . Имеет место формула, которая (как и ее аналог в размерности 3, см. [3] формулы (31) и (32)) доказывается прямым вычислением с помощью несложной тригонометрии:

$$dx_F \wedge dy_F \wedge dz_F \wedge dt_F = \frac{dL_{AF} \wedge dL_{BF} \wedge dL_{CF} \wedge dL_{DF}}{384V_{\hat{E}}}. \quad (11)$$

Здесь, строго говоря, следовало бы добавить знак $\pm$, но мы интересуемся такого рода равенствами с точностью до знака (как и в предыдущем разделе).

Из формулы (11) следует, что интересующий нас *минор матрицы отображения* $(dx \text{ и } dg) \rightarrow (dL_a)$ *умножается на*

$$384V_{\hat{E}}. \quad (12)$$

Заметим еще, что параметры dg , отвечающие за непрерывные деформации представления f , “замкнуты” на алгебру $\mathfrak{a}$ (если они вообще имеются) в том смысле, что отвечающие им строки включены в другой минор — минор отображения $\mathfrak{a} \rightarrow (dx \text{ и } dg)$, который при нашей перестройке не меняется.

Теперь рассмотрим отображение $(dL_a) \rightarrow (d\omega_i)$. Здесь к минору добавляется лишь один столбец, отвечающий “неизрасходованному” пока dL , а именно dL_{EF} . Со стороны пространства $(d\omega_i)$ добавим строку, отвечающую $d\omega_{DEF}$. В результате *минор матрицы отображения* $(dL_a) \rightarrow (d\omega_i)$ *умножается на*

$$\frac{S_{DEF}}{24} \frac{V_{\hat{E}} V_{\hat{F}}}{V_{\hat{A}} V_{\hat{B}} V_{\hat{C}}} \quad (13)$$

(ср. с формулой (9)).

Теперь мы переходим от последовательности (6) к последовательности (5). К минору отображения $(d\vec{v}_a) \rightarrow (dS_i)$ следует добавить девять строк и столбцов. Столбцы соответствуют девяти “неизрасходованным” dS_i , т. е. dS_i для всех добавляемых граней i за исключением $i = DEF$. Сейчас мы их шаг за шагом перечислим, заодно выбирая для них девять компонент векторов $d\vec{v}_a$ (а всего их 15: пять ребер, на каждом по три компоненты девиации).

Матрица $(\partial S_i / \partial \vec{v}_a)$ содержит много нулей (как, впрочем, и другие матрицы, которыми мы здесь занимаемся): ненулевые компоненты возникают только там, где ребро a входит в границу грани i . Это приводит к тому, что многие ее подматрицы имеют блочно-треугольный вид, а их определители (т.е. миноры $(\partial S_i / \partial \vec{v}_a)$) факторизуются. В частности, нам удобно включить производные по *всем* компонентам девиаций ребер DF и EF в минор, которым мы сейчас занимаемся: мы обнаружим, что им соответствуют отдельные множители – их вклады в величину, на которую наш минор будет умножаться. Эти множители суть

$$\frac{dS_{ADF} \wedge dS_{BDF} \wedge dS_{CDF}}{(dv_{DF})_x \wedge (dv_{DF})_y \wedge (dv_{DF})_z} = \frac{3V_{\hat{E}} l_{DF}^5}{S_{ADF} S_{BDF} S_{CDF}} \quad (14)$$

(ср. с (8)) для ребра DF и

$$\frac{dS_{AEF} \wedge dS_{BEF} \wedge dS_{CEF}}{(dv_{EF})_x \wedge (dv_{EF})_y \wedge (dv_{EF})_z} = \frac{3V_{\hat{D}} l_{EF}^5}{S_{AEF} S_{BEF} S_{CEF}} \quad (15)$$

для ребра EF .

Остаются три дифференциала площадей $(dS_{ABF}, dS_{ACF} \text{ и } dS_{BCF})$, для которых нужно выбрать три из девяти компонент векторов $d\vec{v}_{AF}$, $d\vec{v}_{BF}$ и $d\vec{v}_{CF}$. С этой целью мы сначала выберем по три оси для *каждого* из этих векторов, чтобы взять в качестве их компонент их проекции на эти оси. Разумеется, наши тройки осей будут образовывать ортонормированные системы координат в трехмерных пространствах, ортогональных соответствующим ребрам. Несложное рассуждение показывает, что кручение комплекса не зависит от конкретного выбора таких систем координат.

Оси x (разные!) для $d\vec{v}_{AF}$ и $d\vec{v}_{BF}$ выберем лежащими в плоскости ABF (этим их направления определяются, так как они должны быть еще перпендикулярны самим ребрам). Ось y (совпадающую) для $d\vec{v}_{AF}$ и $d\vec{v}_{BF}$ выберем лежащей в трехмерной гиперплоскости $ABCF$ (и, естественно, перпендикулярной плоскости ABF). Ось z – общую для всех трех $d\vec{v}_{AF}$, $d\vec{v}_{BF}$ и $d\vec{v}_{CF}$ – возьмем перпендикулярной гиперплоскости $ABCF$.

Остается выбрать направления осей x и y для $d\vec{v}_{CF}$. Достаточно указать направление оси x : мы выбираем ее перпендикулярной плоскости BCF .

Теперь выберем три компоненты векторов $d\vec{v}$, производные по которым войдут в минор матрицы $(\partial S_i / \partial \vec{v}_a)$. Это будут $(dv_{BF})_x$, $(dv_{CF})_x$ и $(dv_{CF})_y$.

Определитель

$$\frac{dS_{ABF} \wedge dS_{ACF} \wedge dS_{BCF}}{(dv_{BF})_x \wedge (dv_{CF})_x \wedge (dv_{CF})_y} \quad (16)$$

снова факторизуется: он равен произведению величины $\partial S_{ABF} / (\partial v_{BF})_x = l_{BF}$ на определитель $dS_{ACF} \wedge dS_{BCF} / ((dv_{CF})_x \wedge (dv_{CF})_y)$. Но и этот определитель факторизуется в силу того, что dS_{BCF} не зависит от $(dv_{CF})_x$ (вспомним, как мы выбрали здесь направление оси x). Окончательно находим, что выражение (16) равно

$$l_{BF} l_{CF}^2 \sin \alpha, \quad (17)$$

где α – угол между плоскостями ACF и BCF .

Выпишем выражение, на которое умножается минор матрицы $(\partial S_i / \partial \vec{v}_a)$ в результате перестройки $1 \rightarrow 5$, т.е. произведение выражений (14), (15) и (17):

$$\frac{9V_{\hat{E}} V_{\hat{D}} l_{DF}^5 l_{EF}^5}{S_{ADF} S_{BDF} S_{CDF} S_{AEF} S_{BEF} S_{CEF}} l_{BF} l_{CF}^2 \sin \alpha. \quad (18)$$

Нам остается рассмотреть еще один минор, который меняется в результате перестройки $1 \rightarrow 5$, – минор матрицы $(\partial \vec{v}_a / \partial \sigma)$. К нему относятся компоненты $(dv_{AF})_x$, $(dv_{AF})_y$, $(dv_{AF})_z$, $(dv_{BF})_y$, $(dv_{BF})_z$ и $(dv_{CF})_z$ девиаций ребер и, с другой стороны, все шесть компонент бивектора $d\sigma$, сопоставленного вершине F .

Бивектор $d\sigma$ можно считать элементом алгебры Ли $\mathfrak{so}(4)$, а его компоненты – бесконечно малыми углами поворота в шести координатных плоскостях. Осталось выбрать для него систему координат. На сей раз будем обозначать ее оси цифрами 1, 2, 3, 4 (а не буквами x, y, z, t).

Оси 1 и 2 выберем лежащими в плоскости ABF : ось 1 перпендикулярна вектору $\overrightarrow{BF}$, а ось 2 параллельна ему. Ось 3 выберем лежащей в гиперплоскости $ABCF$ (разумеется, ось 3 должна быть перпендикулярна ABF), а ось 4 – перпендикулярной $ABCF$.

Теперь (как уже стало привычным) величина, на которую умножается минор, снова факторизуется. Во-первых (ср. с формулой (2)), компоненты $(dv_{AF})_z$, $(dv_{BF})_z$ и $(dv_{CF})_z$ определяются лишь тремя углами поворота в направлении оси 4, т.е. $d\sigma_{14}$, $d\sigma_{24}$ и $d\sigma_{34}$. А именно, их связывает (3×3) -подматрица матрицы $(\partial \vec{v}_a / \partial \sigma)$, равная (снова см. (2))

$$\begin{pmatrix} \frac{(AF)_1}{L_{AF}} & \frac{(AF)_2}{L_{AF}} & \frac{(AF)_3}{L_{AF}} \\ \frac{(BF)_1}{L_{BF}} & \frac{(BF)_2}{L_{BF}} & \frac{(BF)_3}{L_{BF}} \\ \frac{(CF)_1}{L_{CF}} & \frac{(CF)_2}{L_{CF}} & \frac{(CF)_3}{L_{CF}} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где, например, $(AF)_1$ есть компонента вектора $\overrightarrow{AF}$ вдоль оси 1. Определитель матрицы (19) есть

$$\frac{6V_{ABCF}}{L_{AF} L_{BF} L_{CF}} = \frac{4S_{ACF} S_{BCF} \sin \alpha}{L_{AF} L_{BF} l_{CF}^3}, \quad (20)$$

где V_{ABCF} – *трехмерный* объем, а α – тот же угол, что в формуле (17).

Остаются три поворота внутри гиперплоскости $ABCF$ и три компоненты $(dv_{AF})_x$, $(dv_{AF})_y$ и $(dv_{BF})_y$. И здесь продолжается факторизуемость: поворот в плоскости ABF воздействует только на $(dv_{AF})_x$, и множитель равен

$$\frac{(\partial v_{AF})_x}{\partial \sigma_{12}} = \frac{1}{l_{AF}}. \quad (21)$$

Поворот в плоскости, перпендикулярной BF , воздействует только на $(dv_{AF})_y$, что дает множитель

$$\frac{(\partial v_{AF})_y}{\partial \sigma_{13}} = \frac{\sin \beta}{l_{AF}}, \quad (22)$$

где β – угол между ребрами AF и BF . Остается последний поворот, которому соответствует множитель

$$\frac{(\partial v_{BF})_y}{\partial \sigma_{23}} = \frac{1}{l_{BF}}. \quad (23)$$

Перемножая правые части формул (20)–(23), находим множитель, на который умножается минор матрицы $(\partial \vec{v}_a / \partial \sigma)$ при нашей перестройке $1 \rightarrow 5$:

$$\frac{8S_{ACF}S_{BCF}S_{ABF}}{l_{AF}^5 l_{BF}^4 l_{CF}^3} \sin \alpha, \quad (24)$$

где мы учли, что $\sin \beta = 2S_{ABF} / (l_{AF} l_{BF})$.

Как и в разделе 6, из проведенных рассуждений и вычислений видно, что свойство ацикличности комплекса сохраняется при рассмотренных перестройках.

8. ФОРМУЛА ДЛЯ ИНВАРИАНТА МНОГООБРАЗИЯ

В двух предыдущих разделах мы выяснили, как ведут себя миноры, альтернированное произведение которых является кручением комплекса (5) или (6) (если этот комплекс ациклический), при движениях Пахнера $3 \rightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4$ и $1 \leftrightarrow 5$. Нам остается объединить эти результаты, чтобы получить величину, не зависящую от триангуляции, т.е. *инвариант четырехмерного кусочно-линейного многообразия*.

Конкретный выбор знаков в альтернированном произведении проведем так, чтобы наша формула для инварианта была по возможности похожа на “трехмерную” формулу (II.5). Возьмем минор матрицы отображения $\mathbf{a} \rightarrow (dx \text{ и } dg)$ в степени -1 , затем минор матрицы отображения $(dx \text{ и } dg) \rightarrow (dL_a)$ в степени $+1$ и т.д. Мы получим множитель, на который умножается так определенное кручение τ при перестройке $1 \rightarrow 5$, если перемножим выражения (12) и (18) и разделим на произведение (13) и (24). Результат можно записать в виде

$$2^7 \cdot 3^4 \cdot \frac{V_A V_B V_C V_D V_E}{V_F} \cdot \frac{\prod_{\text{по новым ребрам}} l^5}{\prod_{\text{по новым двумерным граням}} S}.$$

Сопоставляя это выражение с результатами раздела 6 (формулы (7) и (10)), находим следующее окончательное выражение для инварианта четырехмерного многообразия через кручение комплекса (5) или (6) и другие евклидовы геометрические величины:

$$I = 2^{-16} \cdot 3^{-12} \cdot \frac{\tau \cdot \prod_{\text{по всем двумерным граням}} S}{\prod_{\text{по всем 4-симплексам}} V \prod_{\text{по всем ребрам}} 72l^5} \cdot (2^8 \cdot 3^6)^{(\text{число вершин})}. \quad (25)$$

Множитель $2^{-16} \cdot 3^{-12}$ добавлен для того, чтобы инвариант оказался равным единице для сферы S^4 (см. следующий раздел).

9. ПРИМЕР: СФЕРА S^4

Фундаментальная группа сферы S^4 тривиальна, поэтому алгебра $\mathfrak{a}$ в последовательности (6) будет всей алгеброй Ли $\mathfrak{e}_4$ движений четырехмерного евклидова пространства. Непрерывные параметры dg , описывающие деформации представления $\pi_1(S^4) \rightarrow E_4$, очевидным образом отсутствуют. Пространство “тривиальных” девиаций вершин десятимерно и состоит из девиаций типа (4) с произвольными $d\tau_{\alpha\beta}$ и ds_β .

Возьмем каноническую триангуляцию S^4 , состоящую из двух 4-симплексов, оба с вершинами A, B, C, D и E . Для такой триангуляции все углы дефекта $d\omega_i$ и $d\Omega_a$ тождественно равны нулю, ибо всякое ω_i получается суммированием двух слагаемых, отличающихся только знаком (одному из 4-симплексов сопоставлен знак “+”, а другому “−”; см. I, раздел 3). Поэтому матрицы $(\partial\Omega_a/\partial S_i)$ и сопряженная ей $(\partial\omega_i/\partial L_a)$ нулевые. Значит, кручение комплекса (5) или (6) факторизуется в произведение по следующим двум последовательностям:

$$0 \rightarrow \mathfrak{e}_4 \rightarrow (dx) \rightarrow (dL_a) \rightarrow 0, \quad (26)$$

$$0 \leftarrow (dS_i) \leftarrow (d\vec{v}_a) \leftarrow (d\sigma) \leftarrow (d\sigma)_0 \leftarrow 0. \quad (27)$$

Возьмем в пространстве $\mathbb{R}^4$ евклидову систему координат с осями x, y, z, t . Поместим вершину A нашей триангуляции в начало координат, а остальные вершины — в точки $B(1, 0, 0, 0)$, $C(0, 1, 0, 0)$, $D(0, 0, 1, 0)$ и $E(0, 0, 0, 1)$.

9.1. Вычисления для последовательности (26). Десятимерная алгебра $\mathfrak{e}_4$ состоит из бесконечно малых поворотов и сдвигов (мы измеряем повороты в шести координатных плоскостях, естественно, в радианах, а сдвиги — в единицах координатных осей),

а двадцатимерное пространство (dx) — из векторов-столбцов $\begin{pmatrix} dx_A \\ \vdots \\ dt_E \end{pmatrix}$. Возьмем минор матрицы отображения $\mathfrak{e}_4 \rightarrow (dx)$, соответствующий следующим десяти из дифференциалов координат: $dx_A, dy_A, dz_A, dt_A, dy_B, dz_B, dt_B, dz_C, dt_C, dt_D$.

От этого минора сразу отщепляется единичный множитель, соответствующий отображению (сдвиги) $\rightarrow$ (координаты вершины A); отщепление вызвано тем, что *повороты не влияют* на координаты A . Остается отображение шести поворотов в наборы $(dy_B, dz_B, dt_B, dz_C, dt_C, dt_D)$. Факторизация продолжается и дальше: повороты в

плоскостях xy , xz и xt влияют только на точку B (из оставшихся) и т.д. Результат таков: *минор отображения $\epsilon_4 \rightarrow (dx)$ равен единице* (как обычно, с точностью до знака).

Теперь рассматриваем минор матрицы отображения $(dx) \rightarrow (dL_a)$, соответствующий набору $(dx_B, dx_C, dy_C, dx_D, dy_D, dz_D, dx_E, dy_E, dz_E, dt_E)$. Здесь снова происходит факторизация в произведение определителей отображений:

$$(dx_E, dy_E, dz_E, dt_E) \rightarrow (dL_{AE}, dL_{BE}, dL_{CE}, dL_{DE}), \quad (28)$$

$$(dx_D, dy_D, dz_D) \rightarrow (dL_{AD}, dL_{BD}, dL_{CD}), \quad (29)$$

$$(dx_C, dy_C) \rightarrow (dL_{AC}, dL_{BC}), \quad (30)$$

$$dx_B \rightarrow dL_{AB}. \quad (31)$$

Напомним, что L – квадрат длины соответствующего ребра. Прямое вычисление показывает, что определители отображений (28)–(31) равны соответственно 2^4 , 2^3 , 2^2 и 2 .

Отсюда можно сделать следующий вывод: последовательность (26) вносит в кручение мультипликативный вклад, равный 2^{10} .

9.2. Вычисления для последовательности (27). Начнем справа, т.е. с отображения $(d\sigma)_0 \rightarrow (d\sigma)$. Десятимерное пространство $(d\sigma)_0$ состоит из компонент антисимметричного тензора $d\tau_{\alpha\beta}$ и вектора ds_β , а тридцатимерное пространство $(d\sigma)$ – из компонент девиаций всех пяти вершин. Отображение задается формулой (4).

Для построения минора матрицы отображения $(d\sigma)_0 \rightarrow (d\sigma)$ выберем следующие десять компонент тензоров $d\sigma_A, \dots, d\sigma_E$: возьмем *все шесть* компонент $d\sigma_A$ и по *одной* компоненте остальных девиаций, а именно, $(d\sigma_B)_{zt}$, $(d\sigma_C)_{zt}$, $(d\sigma_D)_{xy}$ и $(d\sigma_E)_{xy}$. Здесь уместно напомнить, что этот выбор зависит от нас (нужно только, чтобы миноры оказывались ненулевыми), и мотивировкой именно такого выбора является удобство дальнейших вычислений.

Из-за того, что радиус-вектор точки A равен нулю, вектор ds_β не влияет на $d\sigma_A$. Поэтому наш минор факторизуется, причем фактор, соответствующий отображению $d\tau \rightarrow d\sigma_A$, равен единице (ибо это тождественное отображение: $d\sigma_A = d\tau$). Оставшийся минор (4×4) факторизуется в произведение четырех единичных множителей, ибо, например, $(d\sigma_B)_{zt}$ зависит только от ds_y (это видно из формулы (4), если заменить в ней индекс A на B , игнорировать $d\tau_{\alpha\beta}$ и учесть, что единственная ненулевая компонента вектора $\vec{r}_B$ есть $(r_B)_x$) и т.д.

Итак, выбранный нами минор матрицы отображения $(d\sigma)_0 \rightarrow (d\sigma)$ оказался равным единице.

Переходим к отображению $(d\sigma) \rightarrow (d\vec{v}_a)$. Здесь нужно сначала выбрать трехмерный базис для каждого из десяти векторов $d\vec{v}_{AB}, \dots, d\vec{v}_{DE}$. Проще всего это сделать для ребер, начинающихся в точке A : ребро AB расположено на оси x , и в качестве координатных осей для $d\vec{v}_{AB}$ выбираем три оставшиеся оси y, z и t ; аналогично выбираем оси для девиаций ребер AC, AD и AE .

Каждое из оставшихся шести ребер лежит в какой-либо координатной плоскости, и с ними мы поступим следующим образом. Ребро BC лежит в плоскости xy ; выберем для $d\vec{v}_{BC}$ следующие три оси: биссектрису угла, образованного осями x и y , и оси z и t ; с

девиациями ребер BD , BE , CD , CE и DE поступим аналогично. Компоненты векторов девиаций ребер вдоль биссектрис координатных углов будем обозначать $(dv_{BC})_{\text{bis}}$ и т.п. (не забывая, что ось-биссектриса у каждой девиации своя).

Рис. 2

Нам нужно выбрать двадцать компонент векторов девиаций ребер (ибо у нас имеется двадцать компонент девиаций вершин, не включенных в предыдущий минор). Мы выбираем *все* компоненты для ребер AB , AC , AD и AE и еще следующие восемь компонент: $(dv_{BD})_y$, $(dv_{BD})_t$, $(dv_{BE})_y$, $(dv_{BE})_z$, $(dv_{CD})_x$, $(dv_{CD})_t$, $(dv_{CE})_x$ и $(dv_{CE})_z$. На рис. 2 мы изобразили четыре ребра, к которым относятся эти компоненты, и выписали эти компоненты около ребер (например, мы пишем dv_y и dv_t около ребра BD , имея в виду $(dv_{BD})_y$ и $(dv_{BD})_t$).

Разумеется, наш минор (20×20) снова сильно факторизуется. Например, отпадает множитель, соответствующий, с одной стороны, компонентам $(d\sigma_B)_{xy}$, $(d\sigma_B)_{xz}$ и $(d\sigma_B)_{xt}$, а с другой — трем компонентам $d\vec{v}_{AB}$ (это вызвано тем, что все компоненты $d\sigma_A$ уже израсходованы, а из оставшихся компонент $d\sigma$ только эти влияют на $d\vec{v}_{AB}$). Из формул типа (2) видно, что этот множитель равен единице. Аналогично отпадают еще три множителя, получающиеся из предыдущего заменой $B \rightarrow C$, $x \leftrightarrow y$, или заменой $B \rightarrow D$, $x \leftrightarrow z$, или заменой $B \rightarrow E$, $x \leftrightarrow t$.

После этого остаются восемь уже перечисленных компонент векторов $d\vec{v}$, изображенных на рис. 2, и восемь компонент $d\sigma$, также изображенных на рис. 2, причем если, например, $d\sigma_{yz}$ и $d\sigma_{yt}$ изображены около вершины B , то они суть $(d\sigma_B)_{yz}$ и $(d\sigma_B)_{yt}$. Соответствующий минор факторизуется на восемь отдельных множителей. Это вызвано тем, что каждая компонента $d\vec{v}$ зависит *только от одной* компоненты $d\sigma$. Эти зависимости изображены стрелками на рис. 2. Отметим еще, что маленькие буквы около вершин обозначают оси, на которых эти вершины лежат.

Формулы типа (2) или (3) показывают, что все восемь множителей равны $1/2$. Следовательно, их вклад в кручение равен 2^8 .

Нам остается рассмотреть отображение $(d\vec{v}_a) \rightarrow (dS_i)$. Как мы помним, все компоненты векторов $d\vec{v}$, относящихся к ребрам AB , AC , AD и AE , израсходованы. Для оставшихся шести ребер остаются компоненты $d\vec{v}$ вдоль биссектрис координатных углов и еще $(dv_{BC})_z$, $(dv_{BC})_t$, $(dv_{DE})_x$ и $(dv_{DE})_y$ (эти относятся к двум ребрам, которых нет на рис. 2).

На каждый из шести дифференциалов dS_i , где грань i содержит вершину A , влияет только одна из компонент только одного из оставшихся векторов $d\vec{v}$. Так возникают шесть множителей: $\partial S_{ABC}/(\partial v_{BC})_{\text{bis}} = \sqrt{2}$ и еще пять равных ему. Вклад в кручение, таким образом, равен 2^3 .

Остается минор, строки которого отвечают компонентам dS_{BCD} , dS_{BCE} , dS_{BDE} и dS_{CDE} , а столбцы — $(dv_{BC})_z$, $(dv_{BC})_t$, $(dv_{DE})_x$ и $(dv_{DE})_y$. И здесь оказывается, что каждый дифференциал dS зависит лишь от одного дифференциала dv . Получается произведение четырех равных друг другу частных производных; например, одна из них есть

$$\frac{\partial S_{BCD}}{(\partial v_{BC})_z} = l_{BC} \cos \gamma = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

где γ есть угол между гранью BCD и осью z . Таким образом, здесь вклад в кручение равен $2^4 \cdot 3^{-2}$.

Отсюда можно сделать следующий вывод: последовательность (27) вносит в кручение мультипликативный вклад, равный $2^8 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2} = 2^{15} \cdot 3^{-2}$.

9.3. Результат: инвариант сферы S^4 . Объединяя выводы, сделанные в конце двух предыдущих пунктов, находим, что для сферы S^4 кручение есть

$$\tau(S^4) = 2^{25} \cdot 3^{-2}.$$

Вычислим теперь произведения, входящие в формулу (25).

В комплексе имеется шесть двумерных граней площадью $1/2$ и четыре — площадью $\sqrt{3}/2$. Поэтому $\prod S = 3^2/2^{10}$. Далее, имеется два 4-симплекса, оба имеют объем $1/24$, поэтому $\prod V = 2^{-6} \cdot 3^{-2}$. Наконец, имеется четыре ребра длиной 1 и шесть — длиной $\sqrt{2}$, поэтому $\prod l = 2^{45} \cdot 3^{20}$.

Все это приводит к обещанной в конце раздела 8 формуле:

$$I(S^4) = 1. \quad (32)$$

10. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, в случае сферы S^4 комплекс оказался ациклическим, и кручение (а с ним и наш инвариант) удалось вычислить. Самый большой определитель, который при этом встретился, имел размеры (20×20) , но, к счастью, он распался в произведение меньших определителей.

По-видимому, со временем будут обнаружены свойства наших инвариантов, упрощающие вычисления, а также выработается необходимая техника. Это должно позволить реально вычислить инварианты для достаточно большого “зоопарка” многообразий. В данный момент один из интересных вопросов заключается в следующем: что получится для произведения двумерных сфер $S^2 \times S^2$ и, если комплекс *не* окажется ациклическим, можно ли как-то обойти эту трудность?

Еще одна задача – обобщение наших комплексов и нахождение их возможных квантовых аналогов. Начать можно с построения комплекса на основе $SL(2)$ -решения уравнения пентагона из работы [5].

Вполне возможно, что наши конструкции могут быть обобщены так, что включают в себя и *кручение Райдемайстера*. В перспективе можно думать о создании единой общей теории, объединяющей идеи алгебры ациклических комплексов и квантовой топологии.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 01-01-00059.

Список литературы

- [1] *И. Г. Корепанов.* ТМФ. 2002. Т. 131. № 3. С. 377–388.
- [2] *И. Г. Корепанов.* ТМФ. 2002. Т. 133. № 1. С. 24–35.
- [3] *I. G. Korepanov.* J. Nonlinear. Math. Phys. 2001. V. 8. № 2. P. 196–210.
- [4] *I. G. Korepanov, E. V. Martyshev.* J. Nonlinear. Math. Phys. 2002. V. 9. № 1. P. 86–98.
- [5] *И. Г. Корепанов, Е. В. Мартюшев.* ТМФ. 2001. Т. 129. № 1. С. 14–19.

Поступила в редакцию 17.V.2002 г.