Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Д. Белоколот, В. З. Энольский, М. Салерно, Функции Ванье для квазипериодических конечнозонных потенциалов, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 234–256

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1850>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:57:46

© 2005 г. Е. Д. Белокозос*, В. З. Энольский†, М. Салерно‡

ФУНКЦИИ ВАННЬЕ ДЛЯ КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИХ КОНЕЧНОЗОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрены функции Ванны квазипериодических g -зонных ($g \geq 1$) потенциалов и исследованы их основные свойства. В частности, обсуждается проблема усреднения, на котором основано определение функций Ванны как для периодических, так и для квазипериодических потенциалов, а функции Блоха и квазиимпульсы выражены в терминах гиперэллиптических σ -функций. На основе этого подхода выведено степенное разложение функций Ванны для квазипериодических потенциалов, применимое при $|x| \simeq 0$, а также асимптотическое разложение, применимое на больших расстояниях. Эти функции имеют важное значение для ряда прикладных задач.

Ключевые слова: функции Ванны, конечнозонные потенциалы, тета-функции, гиперэллиптические кривые.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оператор Шредингера с периодическим потенциалом характеризуется двумя выделенными полными наборами ортогональных функций: функций Флоке–Блоха, введенных Флоке (1882) и Блохом (1928), и функций Ванны, введенных Ванны (1937). Оператор Шредингера с алгебраически интегрируемыми потенциалами позволяет построить функции Блоха (Флоке–Блоха в случае одного измерения) и функции Ванны и наиболее полно описать их свойства. В то время как функции Блоха изучались в течение долгого времени и им посвящены многие обзоры и монографии, исследование функций Ванны, соответствующих конечнозонным потенциалам, началось лишь недавно [1].

Цель данной работы состоит в том, чтобы продолжить эти исследования и дать определение и полное описание свойств функций Ванны для g -зонных потенциалов при $g \geq 1$. Заметим, что обычные функции Ванны, рассматриваемые в физике твердого тела, определяются для не зависящего от времени оператора Шредингера с *периодическим* потенциалом $U(x) = U(x - mT)$, $m \in \mathbb{Z}$, следующим образом:

$$W_n(x) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Psi_n(x; k) dk, \quad (1.1)$$

*Институт магнетизма, ул. Вернадского 36, Киев-142, Украина. E-mail: bel@im.imag.kiev.ua

†Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, 7141 Sherbrooke West, Montreal H4B 1R6, Quebec, Canada. E-mail: vze@ma.hw.ac.uk

‡Dipartimento di Fisica e Istituto Nazionale di Fisica della Materia (INFN), via S. Allende, I84081 Baronissi (SA), Italy. E-mail: salerno@sa.infn.it

где $\Psi_n(x; k)$ — функции Блоха, а интеграл берется по зоне Бриллюэна. Заметим, что функции Ваннье являются локализованными линейными комбинациями всех блоховских собственных состояний данной n -й спектральной зоны. Используя оператор трансляции, можно построить счетное множество функций Ваннье, $W_n^{(l)}(x) := W_n(x - lT)$, $l \in \mathbb{Z}$, которые образуют полный ортонормированный базис:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{W_n^{(l)}}(x) W_{n'}^{(l')}(x) dx = \delta_{n,n'} \delta_{l,l'}, \quad n, n', l, l' \in \mathbb{Z}.$$

Из преобразования, обратного к (1.1), видно, что блоховские функции выражаются в терминах функций Ваннье как

$$\Psi_n(x; k) = \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{1/2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} W_n^{(l)}(x) e^{ilak}, \quad (1.2)$$

т.е. два полных набора функций связаны унитарным преобразованием, являющимся в точности преобразованием Фурье. Рассматривая функции Ваннье для g -зонных потенциалов, которые, вообще говоря, являются *квазипериодическими*, а не периодическими функциями, мы *обобщаем* обычные функции Ваннье на случай квазикристаллов, т.е. квазипериодических решеток, и в этом состоит первый основной результат данной работы. Этот результат приводит к другой интересной задаче. Как хорошо известно, для определения функций Ваннье следует использовать процедуру усреднения, которая существенно различна в периодическом и квазипериодическом случаях. Хотя задача об усреднении исследовалась для некоторых алгебраически интегрируемых систем (см., например, [2], [3]), она, насколько нам известно, не обсуждалась достаточно подробно и не рассматривалась в связи с функциями Ваннье. Именно в подобном рассмотрении и состоит второй основной результат. Однако исследование задачи об усреднении для интегрируемых систем выходит за рамки данной статьи. Мы лишь напомним, что процедура усреднения возникает также в теории возмущений интегрируемых систем Крылова–Боголюбова–Митропольского, в теории Зайберга–Виттена и т.д. Мы надеемся развить это направление наших исследований в будущем.

Теория гиперэллиптических кривых различных родов приводит к разнообразным объектам, которые наследуют богатую структуру соответствующих пространств модулей кривых. Например, в случае эллиптической кривой рода $g = 1$ периодический и эргодический случаи совпадают, поскольку существует только одна частота. В случае двухзонного потенциала спектральное многообразие имеет вид ультраэллиптической кривой рода $g = 2$, причем периодический и эргодический случаи существенно различны. Более того, периодический случай допускает дальнейшее сужение рассмотрения на эллиптическую периодичность. При $g \geq 3$ возникает новое явление: кривая допускает так называемые сингулярные полупериоды, что приводит к определенным сложностям в теории.

С технической точки зрения наше рассмотрение основано на реализации гиперэллиптических функций в терминах σ -функций многих переменных. Эта реализация представляется естественным обобщением теории Вейерштрасса эллиптических функций на гиперэллиптические функции высших родов. Теория для высших родов была развита

Вейерштрассом и Клейном, и ее изложение приведено в классической монографии Бейкера [2]; недавние результаты в этой области можно найти в работах [4]–[7], а различные применения этой теории – например, в работах [8].

Ограниченный объем данной статьи не позволяет нам привести доказательства теорем, но мы намерены дать их в отдельной публикации.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 с чисто спектральной точки зрения описаны квазипериодические потенциалы. Показано, что основные объекты, такие как конечнозонный потенциал, функции Вейля и Блоха, которые исходно определяются на комплексной плоскости, можно разумным образом определить на гиперэллиптических римановых поверхностях, род которых совпадает с числом зон в спектре. В разделе 3 собраны необходимые результаты из теории гиперэллиптических σ -функций, такие как свойства гиперэллиптических $\wp$ - и ζ -функций и дифференциальные соотношения между ними, а также теоремы сложения. Кроме того, мы описываем определенные подмногообразия θ -дивизора. В разделе 4 показано, как вычислить функцию Блоха и квазимультипликатор в терминах многомерных σ -функций. В разделе 5 обсуждаются периодические и квазипериодические потенциалы и показывается, как вычислить норму функции Блоха в каждом из случаев. В разделе 6 обсуждаются функции Ванье для периодических и квазипериодических потенциалов, а также выводится степенное разложение функций Ванье для квазипериодических потенциалов, применимое при $|x| \simeq 0$, и асимптотическое разложение, применимое на больших расстояниях. Наконец, в разделе 7 подводятся итог и обсуждаются перспективы будущих исследований.

2. ОПЕРАТОР ШРЕДИНГЕРА С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМ И КОНЕЧНОЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛАМИ

2.1. Квазипериодический потенциал. Функция $u(x)$ из банахова пространства $C_b(\mathbb{R})$ непрерывных ограниченных функций называется почти периодической, если множество $\{T_x u(\cdot), x \in \mathbb{R}\}$, где $T_x u(\cdot) = u(\cdot + x)$, является относительно компактным в $C_b(\mathbb{R})$. Замыкание Γ этого множества является компактом в метризуемой абелевой группе. На множестве Γ существует нормированная мера Хаара μ , которая оказывается T_x -инвариантной и эргодической. Таким образом, каждая почти периодическая функция порождает вероятностное пространство (Γ, μ, T_x) . Операция усреднения на этом пространстве имеет вид

$$\langle f(u) \rangle = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(T_x u) dx = \int_{\Gamma} f(u) \mu(du). \quad (2.1)$$

С помощью дифференциального выражения

$$L(u) = -\partial_{xx} + u(x)$$

мы определим для $u \in \Gamma$ оператор Шредингера в $L^2(\mathbb{R})$, являющийся существенно самосопряженным. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$, а $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ – решения уравнения $L\varphi = \lambda\varphi$ с начальными условиями $c(0, \lambda) = 1$, $c'(0, \lambda) = 0$, $s(0, \lambda) = 0$, $s'(0, \lambda) = 1$. Функции $c(x, \lambda)$

и $s(x, \lambda)$ являются интегральными функциями порядка $1/2$ по λ и непрерывны по двум переменным (x, λ) . Пределы

$$w_{\pm}(\lambda) \equiv w_{\pm}(\lambda, u(\cdot)) = \mp \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c(x, \lambda)}{s(x, \lambda)} \quad (2.2)$$

существуют и называются функциями Вейля. Кроме них мы также используем функции Вейля $w_{\pm}(x, \lambda) \equiv w_{\pm}(\lambda, T_x u(\cdot))$. Хорошо известно, что все функции Вейля голоморфны в $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Im } \lambda > 0\}$, отображают $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{C}_+$, а если они имеют на вещественной оси нули или полюсы, то нули и полюсы могут быть только простыми [9].

С помощью функций Вейля можно определить функции

$$\psi_{\pm}(x, \lambda) = c(x, \lambda) \pm w_{\pm}(x, \lambda)s(x, \lambda) = \exp\left(\pm \int_0^x w_{\pm}(y, \lambda) dy\right), \quad (2.3)$$

которые для каждого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}_{\pm})$, где $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, и $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$. По определению, функции $\psi_{\pm}(x, \lambda)$ удовлетворяют уравнению

$$-\partial_{xx}\psi_{\pm}(x, \lambda) + (u(x) - \lambda)\psi_{\pm}(x, \lambda) = 0. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в это уравнение, получаем следующее уравнение для функций Вейля:

$$\pm \partial_x w_{\pm}(x, \lambda) + w_{\pm}^2(x, \lambda) + \lambda - u(x) = 0. \quad (2.5)$$

Следуя работе [10], определим функцию Флоке

$$f(x, \lambda) = \frac{1}{2} \langle w_+(x, \lambda) + w_-(x, \lambda) \rangle. \quad (2.6)$$

Пусть $\lambda = \xi + i\eta$. Функция Флоке почти всюду имеет конечный предел при $\xi \in \mathbb{R}$, $\eta \downarrow 0$:

$$f(\xi + i0, x) = -l(x, \xi) + i\pi n(x, \xi), \quad (2.7)$$

где $l(x, \xi)$ — экспонента Ляпунова, а $n(x, \xi)$ — число состояний.

Число состояний $n(x, \xi)$ определяет спектр $\Sigma(u)$ оператора $L(u)$: при $u \in \Gamma$ спектр является множеством точек роста числа состояний [11],

$$\Sigma(u) = \text{supp}(dn).$$

Показатель Ляпунова $l(x, \xi)$ определяет абсолютно непрерывный спектр, т.е. замкнутое множество спектральных точек с нулевым показателем Ляпунова,

$$\Sigma_{\text{a.c.}}(u) = \overline{\{\xi \in \mathbb{R} \mid l(x, \xi) = 0\}},$$

где замыкание берется по отношению к мере Лебега [11], [12]. Перейдем теперь к обсуждению специального подмножества квазипериодических потенциалов — к так называемым конечнозонным потенциалам (подробнее см. в [13]–[15]).

2.2. Конечнотонный потенциал. Теория конечнотонных потенциалов оператора Шредингера имеет давнюю историю, восходящую к Эрмиту, Алфену и Дарбу. Дальнейшее развитие, стимулированное *теорией солитонов*, было достигнуто в середине семидесятых годов в работах Новикова, Дубровина и Новикова, Итса, Матвеева и Кричевера (см., например, работу [13] и приведенную в ней библиографию).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Почти периодическая функция $u(x)$ называется *конечнотонным потенциалом*, если спектр оператора Шредингера $L(u) = -\partial_{xx} + u(x)$ является объединением конечного множества отрезков лебегова (дважды абсолютно непрерывного) спектра $[E_1, E_2] \cup [E_3, E_4] \cup \dots \cup [E_{2g+1}, \infty]$, где границы зон предполагаются вещественными и упорядоченными: $E_1 < E_2 < \dots < E_{2g+1} < +\infty$.

Исходя из этого определения, можно вывести основные свойства и явные выражения для конечнотонных потенциалов и функций Вейля и Блоха. Мы покажем, что адекватным языком для описания этих объектов является теория гиперэллиптических римановых поверхностей. Для этого мы фиксируем риманову поверхность X рода g алгебраической кривой, задаваемой уравнением

$$\mu^2 = R_{2g+1}(\lambda) = 4 \prod_{k=1}^{2g+1} (\lambda - E_k). \quad (2.8)$$

Обозначим координату на кривой X через $P = (\lambda, \mu)$, а координаты точек ветвления — через $(E_k, 0)$, $k = 1, \dots, 2g+1$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Функция Вейля конечнотонного потенциала $u(x)$ определена на римановой поверхности X гиперэллиптической кривой (2.8) формулой*

$$w(x, P) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_x S(x, P)}{S(x, P)} + \frac{i\mu}{S(x, P)} \right), \quad (2.9)$$

где

$$S(x, \lambda) = \prod_{k=1}^g (\lambda - \lambda_k(x)) \quad (2.10)$$

и точки $(\lambda_k(x), \mu_k(x))$, $k = 1, \dots, g$, являются различными точками на кривой X , зависящими от x .

Для дальнейших рассуждений нам потребуется выражение числа состояний $n(x, \xi)$ через функцию $w_+(x, \xi)$:

$$n(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \langle w_+(x, \xi) \rangle = \frac{1}{\pi} \langle \operatorname{Im} w_+(x, \xi) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi}^{\xi} \left\langle \frac{1}{\operatorname{Im} w_+(x, \xi)} \right\rangle d\xi. \quad (2.11)$$

Для конечнотонного потенциала $u(x)$ имеем

$$\operatorname{Im} w_+(x, \xi) = \frac{\sqrt{R_{2g+1}(\xi)}}{2S(x, \xi)}.$$

Поэтому в данном случае число состояний есть

$$n(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \left\langle \frac{\sqrt{R_{2g+1}(\xi)}}{2S(x, \xi)} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \int^\xi \left\langle \frac{S(x, \xi)}{\sqrt{R_{2g+1}(\xi)}} \right\rangle d\xi.$$

Число состояний и волновое число для всех конечнозонных потенциалов связаны равенством

$$n(x, \xi) = \frac{1}{\pi} k(\xi).$$

Прямым следствием приведенных выше соотношений является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.2. *Квазиимпульс собственной функции можно определить выражением*

$$k(P) = \langle w(x, P) \rangle = \left\langle \frac{\mu}{S(x, P)} \right\rangle = \int_{P_0}^P \frac{\langle S(x, P) \rangle}{\mu} d\lambda, \quad (2.12)$$

где $P = (\lambda, \mu)$ и $P_0 = (\lambda_0, \mu_0)$ – точки гиперэллиптической кривой $\mu^2 = R_{2g+1}(\lambda)$.

Интеграл в выражении (2.12) является интегралом Шварца–Кристоффеля, отображающим левую полуплоскость комплексной λ -плоскости в прямоугольник в комплексной k -плоскости [16]. Далее мы понимаем этот интеграл как абелев интеграл второго рода на X от мероморфного дифференциала

$$d\mathcal{K} = \frac{\langle S(x, P) \rangle}{\mu} d\lambda, \quad (2.13)$$

который будем называть дифференциалом квазиимпульса.

ТЕОРЕМА 2.3. *Собственная функция g -зонного потенциала, нормированная условием*

$$\langle |\psi(x, P)|^2 \rangle = 1, \quad (2.14)$$

имеет вид

$$\psi(x, P) = \sqrt{\frac{S(x, P)}{\langle S(x, P) \rangle}} \exp \left\{ \frac{i\mu}{2} \int_{x_0}^x \frac{dy}{S(y, P)} \right\}. \quad (2.15)$$

Видно, что для определения квазиимпульса и нормировки собственной функции требуется усреднение. Поэтому необходимо сказать несколько слов об усреднении для квазипериодических и почти периодических функций, поскольку потенциалы с конечным числом зон являются квазипериодическими функциями, а потенциалы с бесконечным числом зон – почти периодическими функциями.

2.3. Усреднение для конечнозонных потенциалов: периодический и эргодический случаи. Всякая почти периодическая функция обладает средним значением

$$\langle f \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx.$$

Это позволяет для любой почти периодической функции построить ряд Фурье

$$f(x) \simeq \sum_n A_n \exp(i\lambda_n x), \quad A_n = \langle f(x) \exp(i\lambda_n x) \rangle.$$

Числа λ_n называются частотами Фурье, а числа A_n — коэффициентами Фурье функции $f(x)$.

Напомним, что счетное множество вещественных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ имеет рациональный базис $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, если числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ линейно независимы и любое число λ_n можно представить как их конечную линейную комбинацию с рациональными коэффициентами, т.е.

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{S_n} r_k^n \alpha_k, \quad r_k^n \in \mathbb{Q}.$$

Будем говорить, что базис является конечным, если он является конечным множеством, и целочисленным, если все числа r_k^n целые. Если частоты Фурье почти периодической функции имеют конечный и целочисленный базис, то мы называем эту функцию квазипериодической. Квазипериодическая функция с одним периодом является периодической.

Функция $F(x_1, x_2, \dots)$ конечного или счетного числа переменных, каждая из которых принимает все вещественные значения, называется предельно периодической, если она является равномерным пределом периодических функций, т.е. если для любого положительного вещественного числа ε можно указать такое целое положительное число $n(\varepsilon)$ и такую периодическую функцию $F_\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что для всех $n > n(\varepsilon)$

$$\sup_{\substack{-\infty < x_k < +\infty \\ k=1,2,\dots}} |F(x_1, x_2, \dots) - F_\varepsilon(x_1, x_2, \dots, x_n)| < \varepsilon.$$

Оказывается, что для всякой почти периодической функции $f(x)$ существует такая предельно периодическая функция $F(x_1, x_2, \dots)$ конечного или счетного набора переменных, что

$$f(x) = F(x, x, \dots).$$

Другими словами, любая почти периодическая функция является сужением на диагональ некоторой предельно периодической функции. Свойства предельно периодической функции $F(x_1, x_2, \dots)$ существенно зависят от базиса частот Фурье функции $f(x)$. Если базис $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ почти периодической функции $f(x)$ является целочисленным, то предельно периодическая функция $F(x_1, x_2, \dots)$ является периодической с периодами $2\pi/\alpha_1, 2\pi/\alpha_2, \dots$. Если базис $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ почти периодической функции $f(x)$ является конечным, то предельно периодическая функция $F(x_1, x_2, \dots)$ зависит от конечного набора переменных. Если базис $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ почти периодической функции $f(x)$ является конечным и целочисленным, то предельно периодическая функция $F(x_1, x_2, \dots)$ является периодической функцией конечного набора переменных. Очевидно, среднее значение функции $f(x)$ существенно зависит от того, является ли эта функция периодической, квазипериодической или почти периодической. Если функция $f(x)$ является периодической, то ее среднее значение есть в точности среднее по периоду. Если функция $f(x)$ является квазипериодической или почти периодической, то ее среднее значение есть среднее по фазовому пространству, т.е. имеет место эргодичность. Это иллюстрируется следующим классическим утверждением.

ТЕОРЕМА 2.4 (Кронекер–Вейль). Пусть λ_k – вещественные линейно независимые числа, θ_k – произвольные вещественные числа, δ_k – произвольные положительные числа, $k = 1, \dots, n$. Пусть $\chi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – характеристическая функция параллелепипеда в $\mathbb{R}^n$, определенного неравенствами

$$\theta_k - \delta_k < x_k < \theta_k + \delta_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Тогда равномерно по L имеем

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \chi(\lambda_1 x - \theta_1, \dots, \lambda_n x - \theta_n) dx = \pi^{-n} \delta_1 \dots \delta_n,$$

где функция $\chi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ периодически продолжена на все $\mathbb{R}^n$ по всем переменным x_k , $k = 1, \dots, n$, с периодами 2π .

В рассматриваемой задаче конечнозонный потенциал появляется как сужение на прямую некоторой мероморфной функции, определенной на якобиане. Разумеется, на этой прямой потенциал должен быть вещественным и несингулярным. В зависимости от направления прямой по отношению к периодам якобиана этот конечнозонный потенциал может быть периодическим или квазипериодическим, и это обстоятельство оказывает существенное влияние на усреднение. Ранее в литературе было описано усреднение квазипериодических функций, являющихся ограничениями θ -функций [17], а также усреднение решений интегрируемых эволюционных уравнений [2]. Мы используем эти результаты при обсуждении усреднения для конечнозонных потенциалов. Сначала формулируем нашу задачу в терминах σ -функций.

Заметим, что использовать язык σ -функций удобно потому, что все выражения в σ -функциях форм-инвариантны по отношению к числу зон потенциала (роду кривой), и этот факт весьма полезен при изложении. Имея это в виду, в следующем разделе мы кратко опишем необходимые факты из теории гиперэллиптических σ -функций.

3. ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ σ -ФУНКЦИИ

Теория гиперэллиптических σ -функций представляет собой многомерное обобщение теории эллиптических функций и предоставляет подходящий аппарат для наших исследований.

3.1. Кривая и дифференциалы. Пусть X – гиперэллиптическая кривая, заданная уравнением

$$\mu^2 = 4\lambda^{2g+1} + \sum_{i=0}^{2g} \alpha_i \lambda^i = 4 \prod_{k=1}^{2g+1} (\lambda - E_k) = R(\lambda), \quad (3.1)$$

реализованная как двулистное накрытие сферы Римана с ветвлением в вещественных точках $(E_k, 0)$, $k \in \mathcal{G} = \{1, \dots, 2g + 1\}$, где $E_j \neq E_k$ при $j \neq k$, и на бесконечности, $E_{2g+2} = \infty$. Точки ветвления упорядочены: $E_1 < E_2 < \dots < E_{2g+1}$ (см. рисунок).

Базис гомологий римановой поверхности гиперэллиптической кривой рода g с вещественными точками ветвления $E_1, \dots, E_{2g+2} = \infty$ (верхний лист). Разрезы проведены от E_{2i-1} к E_{2i} , $i = 1, \dots, g+1$. $\mathbf{b}$ -циклы замыкаются на нижнем листе (дуги циклов на нижнем листе симметричны относительно вещественной оси).

Набор $2g$ канонических голоморфных дифференциалов $d\mathbf{h} = (dh_1, \dots, dh_g)^T$ и мероморфных дифференциалов $d\mathbf{r} = (dr_1, \dots, dr_g)^T$ определяется следующими выражениями:

$$dh_j = \frac{\lambda^{j-1}}{\mu} d\lambda, \quad j = 1, \dots, g, \quad (3.2)$$

$$dr_j = \sum_{k=j}^{2g+1-j} (k+1-j) \alpha_{k+1+j} \frac{\lambda^k}{4\mu} d\lambda, \quad j = 1, \dots, g. \quad (3.3)$$

Обозначим периоды как

$$\begin{aligned} 2\omega &= \left(\oint_{\mathbf{a}_k} dh_i \right)_{i,k=1,\dots,g}, & 2\omega' &= \left(\oint_{\mathbf{b}_k} dh_i \right)_{i,k=1,\dots,g}, \\ 2\eta &= \left(- \oint_{\mathbf{a}_k} dr_i \right)_{i,k=1,\dots,g}, & 2\eta' &= \left(- \oint_{\mathbf{b}_k} dr_i \right)_{i,k=1,\dots,g}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Полупериоды $\omega, \omega', \eta, \eta'$ удовлетворяют обобщенным соотношениям Лежандра

$$\mathfrak{M} \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{M}^T = \frac{i\pi}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где 1_g — единичная $(g \times g)$ -матрица, а $\mathfrak{M}$ — $(2g \times 2g)$ -матрица вида

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}.$$

Пусть $\tau = \omega^{-1}\omega'$ обозначает матрицу, принадлежащую верхнему полупространству Зигеля $\mathcal{S}_g = \{\tau \mid \tau^T = \tau, \operatorname{Im} \tau > 0\}$, а $\varkappa = \eta(2\omega)^{-1}$ — с необходимостью симметричную

матрицу. Многообразие Якоби данной кривой определяется как фактор по нормированной решетке периодов, $\text{Jac}(X) = \mathbb{C}/1_g \oplus \tau$. Отображение Абеля $\mathfrak{A}: \{P \in X\} \rightarrow \text{Jac}(X)$ переводит точку P кривой в якобиан по правилу

$$\mathfrak{A}(P) = \int_{P_0}^P dv,$$

где P_0 – базисная точка отображения Абеля. Оно отображает положительный дивизор $D = P_1 + \dots + P_n$ степени n следующим образом:

$$\mathfrak{A}(D) = \mathfrak{A}(P_1) + \dots + \mathfrak{A}(P_n).$$

В дальнейшем мы будем иметь дело с неспециальными дивизорами (напомним, что специальным называется дивизор D , для которого существует мероморфная функция на X с возможными полюсами в D , но без полюсов вне D). Базисную точку отображения Абеля выберем как $P_0 = (\infty, \infty)$, если только не оговорено иное.

3.2. θ -функции и σ -функции. Введем каноническую θ -функцию $\theta(z; \tau)$ по формуле

$$\theta(z; \tau) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi \mathbf{m}^T \tau \mathbf{m} + 2i\pi \mathbf{z}^T \mathbf{n}}. \quad (3.6)$$

Фундаментальная теорема Римана об обращении в нуль гласит, что если для вектора $\mathbf{z} \in \text{Jac}(X)$ выполнено условие $\theta(\mathbf{z}; \tau) \neq 0$, то существует неспециальный дивизор D степени g и вектор $\mathbf{K}_\infty$ (вектор римановых констант для базисной точки $P_0 = (\infty, \infty)$), причем

$$\mathbf{z} = \mathfrak{A}(D) - \mathbf{K}_\infty.$$

Более того, θ -функция Римана

$$\theta(P) = \theta(\mathfrak{A}(P) - \mathfrak{A}(D) + \mathbf{K}_\infty; \tau)$$

обращается в нуль в точности в g точках дивизора D . Пусть $(\lambda_1, \mu_1), \dots, (\lambda_g, \mu_g)$ – неспециальный дивизор. Обозначим

$$\mathbf{h} = \sum_{k=1}^g \int_{(\infty, \infty)}^{(\lambda_k, \mu_k)} du_k - \mathbf{K}_\infty. \quad (3.7)$$

Тогда σ -функция определяется по формуле

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{h}) &= \sqrt{\frac{\pi^g}{\det(2\omega)}} \sqrt[4]{\prod_{1 \leq i < j \leq 2g+1} (E_i - E_j)} \\ &\times \theta((2\omega)^{-1} \mathbf{h}; \tau) \exp(\mathbf{h}^T \eta(2\omega)^{-1} \mathbf{h}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эта функция представляет собой g -мерное обобщение эллиптической σ -функции. Она инвариантна относительно действия некоторых подгрупп симплектической группы. Она

также имеет следующие трансформационные свойства по отношению к сдвигу аргумента на период:

$$\sigma(\mathbf{h} + 2\omega\mathbf{n} + 2\omega'\mathbf{m}) = (-1)^{\mathbf{n}^T \mathbf{n}} \sigma(\mathbf{h}) \exp\{(2\eta\mathbf{n} + 2\eta'\mathbf{m})^T (\mathbf{h} + \omega\mathbf{n} + \omega'\mathbf{m})\}, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{n}, \mathbf{m}$ – целочисленные g -векторы.

Многообразие нулей σ -функции, называемое σ -дивизором Θ , совпадает с θ -дивизором. В рациональном пределе σ -дивизор определяется нулями *многочлена Шура–Вейерштрасса*, изучавшегося в работе [6].

Пусть Θ_1 обозначает образ кривой X при отображении Абеля,

$$\Theta_1 = \left\{ \mathbf{v} \in \text{Jac}(X) \mid \mathbf{v} = \int_{\infty}^P d\mathbf{h}, \quad P \in X \right\}.$$

Для родов $g > 1$ многообразие Θ_1 принадлежит σ -дивизору, $\Theta_1 \subset \Theta$. Нам потребуется следующий результат из работы [18], описывающий обращение в нуль некоторых частных производных σ -функции.

ЛЕММА 3.1 (Ониши [18]). *Пусть $\sigma_{\mathcal{J}}$ – частная производная,*

$$\sigma_{\mathcal{J}}(\mathbf{h}) = \prod_{j \in \mathcal{J}} \frac{\partial \sigma(\mathbf{h})}{\partial h_j},$$

где $\mathcal{J}$ – мультииндекс, заданный для различных родов g гиперэллиптической кривой X в следующей таблице:

g	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\mathcal{J}$		2	2	24	24	246	246	2468	2468	...

Тогда в окрестности точки $\mathbf{h} = (0, \dots, 0)^T \in \Theta_1$ имеют место следующие разложения для λ -координаты кривой X и частной производной $\sigma_{\mathcal{J}}$:

$$\lambda = \frac{1}{\xi^2} + O(1), \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\mathcal{J}}(\mathbf{h})^2 = \xi^{2g} + O(\xi^{2g+2}). \quad (3.11)$$

Более того, все производные $\sigma_{\mathcal{J}}(\mathbf{h})$ обращаются в нуль в точке $\mathbf{h} \in \Theta_1$ для всех мультииндексов $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}$, $|\mathcal{J}| < |\mathcal{J}|$.

Доказательство леммы основано на подробном анализе многочленов Шура, связанных с гиперэллиптическими кривыми, и на некоторых результатах из работы [6].

3.3. Клейновы $\wp$ - и ζ -функции. Введем g -мерные ζ и $\wp$ -функции как логарифмические производные σ -функции:

$$\begin{aligned}\zeta_i(\mathbf{h}) &= \frac{\partial \ln \sigma(\mathbf{h})}{\partial u_i}, & i &= 1, \dots, g, \\ \wp_{i,j}(\mathbf{h}) &= -\frac{\partial^2 \ln \sigma(\mathbf{h})}{\partial u_i \partial u_j}, & i, j &= 1, \dots, g, \\ \wp_{i,j,k}(\mathbf{h}) &= -\frac{\partial^3 \ln \sigma(\mathbf{h})}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k}, & i, j, k &= 1, \dots, g, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

Эти функции имеют следующие свойства периодичности. Пусть $\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g$ — два произвольных целочисленных вектора. Тогда

$$\zeta_k(\mathbf{u} + 2\omega\mathbf{n} + 2\omega'\mathbf{m}) = \zeta_k(\mathbf{u}) + 2\eta\mathbf{n} + 2\eta'\mathbf{m}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (3.12)$$

$$\wp_{\mathcal{J}}(\mathbf{u} + 2\omega\mathbf{n} + 2\omega'\mathbf{m}) = \wp_{\mathcal{J}}(\mathbf{u}), \quad (3.13)$$

где $\mathcal{J}$ — произвольный набор из двух, трех и т. д. индексов.

Рассмотрим главный объект гиперэллиптической теории — *фундаментальный полином*

$$F(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_g) = \prod_{k=1}^g (\lambda - \lambda_k),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ — координаты неспециального дивизора степени g , $P_1 = (\lambda_1, \mu_1), \dots, P_g = (\lambda_g, \mu_g)$. В работе Больца [19] найдено выражение для фундаментального полинома через $\wp$ -функции (см. также [4], [20] по поводу его вывода и применений) в виде

$$F(\lambda; \lambda_1, \dots, \lambda_g) \equiv \mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h}) = \lambda^g - \wp_{g,g}(\mathbf{h})\lambda^{g-1} - \dots - \wp_{g,1}(\mathbf{h}). \quad (3.14)$$

Ниже мы будем называть такую параметризацию фундаментального полинома *полиномом Больца*.

Известно, что нули полинома Больца $\mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h})$ дают решение задачи обращения Якоби:

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \dots + \lambda_g &= \wp_{g,g}(\mathbf{h}), \\ \lambda_1 \lambda_2 + \dots + \lambda_{g-1} \lambda_g &= -\wp_{2,g}(\mathbf{h}), \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_1 \dots \lambda_g &= (-1)^{g+1} \wp_{1,g}(\mathbf{h}),\end{aligned} \quad (3.15)$$

а μ -координаты дивизора $P_1 = (\mu_1, \lambda_1), \dots, P_g = (\mu_g, \lambda_g)$ выражаются как

$$\mu_k = -\frac{\partial}{\partial u_g} \mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h}) \Big|_{\lambda=\lambda_k}, \quad k = 1, \dots, g. \quad (3.16)$$

Мы используем следующую формулу для ζ -функции:

$$-\int_{(E_{2g+1}, 0)}^P \frac{\lambda^g}{\mu} d\lambda + \frac{1}{2} \frac{\mu}{\mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h})} + \frac{1}{2} \frac{\partial_g \mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h})}{\mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h})} = \zeta_g \left(\mathbf{h} + \int_{\infty}^P d\mathbf{h} \right) - \zeta_g(\mathbf{h}). \quad (3.17)$$

Вывод этой формулы приведен в [4], [5], [20] и основан на нахождении явного выражения для фундаментального бидифференциала – так называемого *ядра Бергмана* в современной терминологии.

Другой набор формул описывает многообразие Якоби $\text{Jac}(X)$ как алгебраическое многообразие в $\mathbb{C}^{g+\frac{g(g+1)}{2}}$. Функции $\wp_{g,g,i}$ и $\wp_{i,k}$ связаны соотношением

$$\begin{aligned} \wp_{g,g,i}\wp_{g,g,k} = & 4\wp_{g,g}\wp_{g,i}\wp_{g,k} - 2(\wp_{g,i}\wp_{g-1,k} + \wp_{g,k}\wp_{g-1,i}) + \\ & + 4(\wp_{g,k}\wp_{g,i-1} + \wp_{g,i}\wp_{g,k-1}) + 4\wp_{k-1,i-1} - 2(\wp_{k,i-2} + \wp_{i,k-2}) + \\ & + \alpha_{2g}\wp_{g,k}\wp_{g,i} + \frac{\alpha_{2g}-1}{2}(\delta_{i,g}\wp_{k,g} + \delta_{k,g}\wp_{i,g}) + c_{i,k}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где

$$c_{i,k} = \alpha_{2i-2}\delta_{i,k} + \frac{1}{2}(\alpha_{2i-1}\delta_{k,i+1} + \alpha_{2k-1}\delta_{i,k+1}). \quad (3.19)$$

Мы также будем пользоваться производными этих формул,

$$\wp_{g,g,g,i} = (6\wp_{g,g} + \alpha_{2g})\wp_{g,i} + 6\wp_{g,i-1} - 2\wp_{g-1,i} + \frac{1}{2}\delta_{g,i}\alpha_{2g-1}, \quad (3.20)$$

которые описывают иерархию КдФ [4]. Заметим, что приведенные формулы были получены для случая ультраэллиптических кривых рода $g = 2$ в [21], где связь с интегрируемыми уравнениями, подобными уравнениям КдФ или синус-Гордон, не была замечена. Исчерпывающее обобщение на гиперэллиптические кривые высших родов было впервые получено в работах [4], [5].

Закончим наше краткое описание σ -функций теоремой сложения *точка + дивизор* для гиперэллиптических σ -функций.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть

$$\mathbf{v} = \int_{(\infty, \infty)}^{(\lambda, \mu)} d\mathbf{h} \in \Theta_1$$

– образ кривой X при отображении Абеля и пусть $\mathbf{h}$ – вектор общего положения в $\text{Jac}(X)$. Тогда имеет место формула

$$\frac{\sigma(\mathbf{h} - \mathbf{v})\sigma(\mathbf{h} + \mathbf{v})}{\sigma_{\mathcal{I}}(\mathbf{v})^2\sigma(\mathbf{h})^2} = \mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h}), \quad (3.21)$$

где $\mathcal{P}(\lambda, \mathbf{h})$ – полином Больца (3.14), а мультииндекс $\mathcal{I}$ определен в таблице в лемме 3.1.

Насколько известно авторам, формула (3.21), как и приводимое ниже соотношение (3.22), являются новыми. Подробному доказательству будет посвящена отдельная работа, а здесь мы представим только его краткий вариант. Это доказательство основано на теореме Римана об обращении в нуль и на формуле (3.15), что приводит к появлению полинома Больца в правой части равенства (3.21). Лемма 3.1 позволяет проверить совпадение главных членов в разложениях по $\mathbf{v}$ вблизи точки $\mathbf{v} = (0, \dots, 0)^T \in \Theta_1$ в обеих частях равенства.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть $\Omega = \sum_{k \in \mathbb{I}} \mathfrak{A}_k$, где $|\mathbb{I}| = g$ – несингулярный четный полупериод, представимый в виде $\Omega = 2\omega \mathbf{n} + 2\omega' \mathbf{n}'$, где $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^g$. Тогда верна формула

$$\frac{\sigma(\mathbf{v} - \Omega)^2}{\sigma_{\mathbb{J}}(\mathbf{v})^2} = \mathcal{Q}_0(\lambda) \prod_{i \in \mathbb{I}} (\lambda - E_i), \quad \mathbf{v} \in \Theta_1, \quad \Omega \in \text{Jac}(X), \quad (3.22)$$

где $\mathcal{Q}_0(\lambda) = \sigma(\Omega)^2 \exp\{\Delta^T \int_{\infty}^P d\mathbf{h}\}$, $\Delta = 2\eta \mathbf{n} + 2\eta' \mathbf{n}'$, E_i – точки ветвления кривой X , а $\mathbb{J}$ – набор мультииндексов из леммы 3.1.

4. σ -ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим $\mathbf{h}$ -векторы вида

$$\mathbf{h} = ix\mathbf{e}_g - \Omega, \quad \mathbf{e}_g = (0, \dots, 0, 1)^T, \quad (4.1)$$

где $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_g)^T$ – не чисто мнимый четный несингулярный полупериод с носителем в g точках ветвления,

$$\Omega = \sum_{i \in \mathbb{I}} \mathfrak{A}_i, \quad |\mathbb{I}| = g. \quad (4.2)$$

Тогда полином Больца отождествляется с функцией $S(x, \lambda)$, введенной в разделе 2:

$$\mathcal{P}(\lambda; \mathbf{h}) = S(x, \lambda). \quad (4.3)$$

4.1. Теорема Итса–Матвеева. Следующая теорема, описывающая алгебро-геометрические решения уравнения Шредингера с конечнозонными потенциалами, была доказана Итсом и Матвеевым в 1975 г. в работе [22]. Известны различные варианты ее доказательства, см., например, [14], [15], [23].

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X – невырожденная гиперэллиптическая кривая рода g . Пусть $\Omega = \omega \mathbf{n} + \omega' \mathbf{n}'$, $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^g$ – не чисто мнимый четный несингулярный полупериод с носителем в g точках ветвления. Тогда гладкий вещественный потенциал $u(x)$ и однозначная на кривой X функция Блоха $\psi(x, P)$ имеют вид

$$u(x) = \wp_{g,g}(ix\mathbf{e}_g - \Omega), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, P) = C(P) \frac{\sigma\left(\int_{\infty}^P d\mathbf{h} - ix\mathbf{e}_g + \Omega\right)}{\sigma_{\mathbb{J}}\left(\int_{\infty}^P d\mathbf{h}\right) \sigma(ix\mathbf{e}_g - \Omega)} \times \\ \times \exp\left\{ix \int_{(E_{2g+1}, 0)}^P dr_g - (\eta \mathbf{n} + \eta' \mathbf{n}')^T \int_{(\infty, \infty)}^P d\mathbf{h}\right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $\mathbb{J}$ – набор индексов, заданный в таблице в лемме 3.1, $C(P)$ – постоянная нормировки, зависящая от точки $P \in X$, $\mathbf{e}_g = (0, \dots, 0, 1)^T$.

4.2. σ -функциональное описание функции Вейля и волнового числа.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда функция Вейля $w(x, P)$ и волновое число $k(P)$ выражаются формулами

$$w(x, P) = \zeta_g \left(ix\mathbf{e}_g - \mathbf{\Omega} + \int_{(E_{2g+1}, 0)}^P d\mathbf{h} \right) - \zeta_g(ix\mathbf{e}_g - \mathbf{\Omega}) - \int_{(E_{2g+1}, 0)}^P dr_g. \quad (4.6)$$

Волновое число или квазиимпульс имеет вид

$$k(P) = \left\langle \zeta_g \left(ix\mathbf{e}_g - \mathbf{\Omega} + \int_{\infty}^P d\mathbf{h} \right) - \zeta_g(ix\mathbf{e}_g - \mathbf{\Omega}) - \int_{(E_{2g+1}, 0)}^P dr_g \right\rangle. \quad (4.7)$$

Заметим, что в силу формулы (3.17) и упомянутого отождествления $S(x, \lambda)$ с полиномом Больца квазиимпульс дается абелевым интегралом второго рода (2.12). Обозначим $\mathfrak{a}$ -периоды функции $k(P)$ как

$$\mathcal{K}_i = \oint_{\mathfrak{a}_i} d\mathcal{K}, \quad i = 1, \dots, g. \quad (4.8)$$

4.3. Нормировка функции Блоха. В различных физических задачах приняты различные нормировки функции Блоха. В нашем случае нормировочная постоянная $C(P)$ вычисляется из условия (2.14). Мы сделаем это на основании соотношения (3.21). В результате получается следующее выражение для нормировочной постоянной:

$$C(P) = \frac{1}{\sqrt{\langle S(x; \lambda) \rangle}}. \quad (4.9)$$

Доказательство в общем случае основано на теореме сложения [4]. Выражение (4.9) было ранее приведено в работе [14], гл. 8. Подчеркнем, что оно верно как в эргодическом, так и в периодическом случаях.

В дальнейшем мы фиксируем значение, заданное формулой (4.9), для нормировочной постоянной и будем рассматривать только нормированные функции Блоха $\psi(x, P)$.

5. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ЭРГОДИЧЕСКИЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Рассмотрим два класса конечнозонных потенциалов: периодические и эргодические.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Будем называть вектор $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_g)^T$ вида

$$\mathbf{U} = (2\omega')^{-1} \mathbf{e}_g \quad (5.1)$$

обмоточным вектором (*winding-вектором*).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. Конечнoзoннoй потенциал называется *периодическим*, если кривая X допускает существование целoчисленнoгo вектoра $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g$ и вещественнoгo числа $U \in \mathbb{R}$, $U \neq 0$, таких, что

$$\mathbf{U} = \mathbf{n}U. \quad (5.2)$$

В прoтивнoм случае конечнoзoннoй потенциал называется *эргодическим*.

Заметим, что в oбщем случае конечнoзoннoй потенциал является эргодическим, а периодическим он oказывается только при специальных условиях на кривую, приведенных выше.

5.1. Условие периодичности конечнoзoннoгo потенциала. Прямое следствие приведеннoгo выше oпределения состоит в том, что конечнoзoннoй потенциал является периодическим, если и только если матрица периодов $2\omega'$ удовлетворяет уравнению

$$\omega' \mathbf{n} = \frac{1}{2U} \mathbf{e}_g \quad (5.3)$$

для некоторoгo вектoра $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g$ и вещественнoгo числа $U \neq 0$. Легко видеть, что при условии (5.3) функции $g_{k,l}(x) = \wp_{k,l}(ix\mathbf{e}_g - \Omega)$ являются периодическими по x с периодом i/U . Действительно,

$$\wp_{k,l}\left(i\left(x + \frac{i}{U}\right)\mathbf{e}_g - \Omega\right) = \wp_{k,l}(ix\mathbf{e}_g - \Omega - 2\omega'\mathbf{n}) = \wp_{k,l}(ix\mathbf{e}_g - \Omega).$$

Условия периодичности (5.3) представляют собой g трансцендентных условий на модули кривой. Однако эти условия слабее, чем условия двойной периодичности конечнoзoннoх потенциалов по x . Последние условия следующим образом формулируются в терминах матрицы периодов τ , связанной с кривой.

ТЕОРЕМА 5.1 [14]. *Конечнoзoннoй потенциал $u(x)$ есть эллиптическая функция от x если и только если*

• *существует такой базис гомологий $\mathcal{B} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_g; \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_g)$, что матрица периодов τ имеет вид*

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{11} & k/N & 0 & \dots & 0 \\ k/N & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

где $k \in \{1, \dots, N-1\}$, $N > 1$, $N \in \mathbb{N}$;

• *в базисе гомологий $\mathcal{B}$ обмоточный вектор $\mathbf{U}$ имеет вид*

$$\mathbf{U} = (*, 0, \dots, 0)^T. \quad (5.5)$$

Условия (5.4) и (5.5) представляют собой $2g - 2$ уравнений, а потому соответствующие двоякопериодические потенциалы можно включить как частные случаи в множество периодических потенциалов. Двоякопериодические потенциалы допускают явное аналитическое описание, и ниже мы будем использовать это обстоятельство. Заметим,

что сведение теории абелевых функций к теории эллиптических функций восходит к Вейерштрассу и Пуанкаре и изложено в классической монографии Кразера [24]; современное изложение и применения к интегрируемым системам приводятся, в частности, в работах [25]; теорема 5.1 была недавно рассмотрена в [26], где было дано ее альтернативное доказательство.

5.2. Вычисление средних. Среднее

$$\langle S(x, \lambda) \rangle = \lambda^g + \sum_{j=1}^g \lambda^{j-1} s_j \quad (5.6)$$

чувствительно к соизмеримости или несоизмеримости частот (компонент обмоточного вектора $\mathbf{U}$). Обозначим коэффициенты полинома (5.6) как $s_j^{(p)}$ или $s_j^{(e)}$, где верхний индекс (p) соответствует периодическому случаю, а индекс (e) – эргодическому случаю, снабдим также $\langle S(x, \lambda) \rangle$ соответствующими нижними индексами p и e .

ТЕОРЕМА 5.2 (усреднение в эргодическом случае). *Пусть все компоненты обмоточного вектора $\mathbf{U}$ несоизмеримы. Тогда среднее $\langle S(x, \lambda) \rangle_e$ является эргодическим и выражается как*

$$\langle S(x, \lambda) \rangle_e = \lambda^g + \sum_{j=1}^g \lambda^{j-1} s_j^{(e)}, \quad (5.7)$$

где

$$s_j^{(e)} = \frac{1}{\det(2\omega')} \cdot \det \begin{pmatrix} \omega'_{1,1} & \dots & \omega'_{1,g} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \omega'_{j-1,1} & \dots & \omega'_{j-1,g} \\ \eta'_{g,1} & \dots & \eta'_{g,g} \\ \omega'_{j+1,1} & \dots & \omega'_{j+1,g} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \omega'_{g,1} & \dots & \omega'_{g,g} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, g.$$

В частности, при $g = 1$

$$\langle S(x, \lambda) \rangle_e = \lambda + \frac{\eta'}{\omega'},$$

а при $g = 2$

$$\langle S(x, \lambda) \rangle_e = \lambda^2 + \lambda \frac{\det \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \eta'_{21} & \eta'_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{pmatrix}} + \frac{\det \begin{pmatrix} \eta'_{21} & \eta'_{22} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{pmatrix}}.$$

В случае соизмеримости получаем другой результат для среднего.

ТЕОРЕМА 5.3 (усреднение в периодическом случае). Пусть все компоненты обмоточного вектора $\mathbf{U}$ соизмеримы. Тогда среднее $\langle S(x, \lambda) \rangle_p$ является периодическим и дается формулой

$$\langle S(x, \lambda) \rangle_p = z^g + \sum_{j=1}^g z^{j-1} s_j^{(p)}, \quad (5.8)$$

где

$$s_j^{(p)} = \frac{1}{\det(2\omega')} \cdot \det \begin{pmatrix} \omega'_{1,1} & \cdots & \omega'_{1,g} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega'_{g-1,1} & \cdots & \omega'_{g-1,g} \\ \eta'_{j,1} & \cdots & \eta'_{j,g} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, g. \quad (5.9)$$

В частности, при $g = 1$

$$\langle S(x, \lambda) \rangle_p = \lambda + \frac{\eta'}{\omega'},$$

а при $g = 2$

$$\langle S(x, \lambda) \rangle_p = \lambda^2 + \lambda \frac{\det \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \eta'_{21} & \eta'_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{pmatrix}} + \frac{\det \begin{pmatrix} \omega'_{21} & \omega'_{22} \\ \eta'_{11} & \eta'_{12} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \omega'_{11} & \omega'_{12} \\ \omega'_{21} & \omega'_{22} \end{pmatrix}}.$$

Видно, что в случае эллиптической кривой рода $g = 1$ средние в эргодическом и периодическом случаях совпадают, но для $g > 1$ средние $\langle S(x, \lambda) \rangle_p$ и $\langle S(x, \lambda) \rangle_e$ задаются различными выражениями. Исчерпывающее доказательство этих формул будет приведено в отдельной публикации.

6. ФУНКЦИЯ ВАННЬЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Функцией Ваннье $W_n(x)$ в n -й спектральной зоне называется следующий интеграл от нормированной функции Блоха:

$$W_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}_n}} \oint_{\mathbf{a}_n} \psi(x, \lambda) d\mathcal{K}(\lambda), \quad n = 1, \dots, g, \quad (6.1)$$

где $\mathcal{K}_n$ — $\mathbf{a}_n$ -периоды дифференциала квазиимпульса (2.13).

Используя оператор трансляции, можно построить счетный набор функций Ваннье

$$W_n^{(l)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}_n}} \oint_{\mathbf{a}_n} \psi_l(x, \lambda) d\mathcal{K}(\lambda), \quad n = 1, \dots, g, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_l(x, P) = & \frac{1}{\sqrt{\langle S(x; \lambda) \rangle}} \frac{\sigma \left(\int_{\infty}^P d\mathbf{h} - ix\mathbf{e}_g + \mathbf{\Omega} + 2l\mathbf{\Omega}' \right)}{\sigma_j \left(\int_{\infty}^P d\mathbf{h} \right) \sigma(ix\mathbf{e}_g - \mathbf{\Omega} - 2l\mathbf{\Omega}')} \times \\ & \times \exp \left\{ ix \int_{(E_{2g+1}, 0)}^P dr_g - (2l\mathbf{E}' + \mathbf{E})^T \int_{(\infty, \infty)}^P d\mathbf{h} \right\}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

а Ω' — чисто мнимый несингулярный четный полупериод, $\Omega = \omega n + \omega' n'$, $E = \eta n + \eta' n'$, $\Omega' = \omega m + \omega' m'$, $E' = \eta m + \eta' m'$, $n, n', m, m' \in \mathbb{Z}^g$. В случае рода $g = 1$ приведенные выше определения совпадают с теми, что даны в [1].

Чтобы дополнить определение, следует вычислить периоды дифференциала (2.13). Для этого используется следующая лемма.

ЛЕММА 6.1. Пусть s_k — коэффициенты полинома

$$\langle S(x, \lambda) \rangle = \lambda^g + s_g \lambda^{g-1} + \dots + s_1.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{K}_g \end{pmatrix} = 2\omega^T \begin{pmatrix} 2\kappa_{g,1} - s_1 \\ \vdots \\ 2\kappa_{g,g} - s_g \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

В частности, при $g = 1$ имеем $s_1 = \eta'/\omega'$, $\kappa_{11} = \kappa = \eta/2\omega$ и

$$\mathcal{K}_1 = \frac{i\pi}{\omega'}. \quad (6.5)$$

Заметим, что в случае $g = 1$ функция Ванье (6.1) совпадает с классической, полученной в [1],

$$W_1(x) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/2} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \psi(x, P) dk, \quad T = -2i\omega'.$$

Основными ожидаемыми свойствами множества функций Ванье $W_k(x)$, $k = 1, \dots, g$, являются ортонормальность

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{W_k^{(k')}(x)} W_l^{(l')}(x) dx = \delta_{k,l} \delta_{k',l'}, \quad k, l = 1, \dots, g, \quad k', l' \in \mathbb{Z}, \quad (6.6)$$

и полнота в пространстве собственных функций оператора Шредингера с конечнозонным квазипериодическим потенциалом. Мы отложим обсуждение этих вопросов до будущих публикаций.

Поскольку нормировка функции Блоха различна для периодического и эргодического случаев, мы будем различать два вида функций Ванье — классические функции Ванье, соответствующие периодическим потенциалам, и квазипериодические функции Ванье, соответствующие квазипериодическим потенциалам. Оба вида функций Ванье определяются одними и теми же формулами, содержащими полином Больца в выражении для нормировочной постоянной. Нормировочные постоянные, однако, вычисляются различными способами в периодическом и эргодическом случаях.

6.1. Степенной ряд для функции Ваннье при $|x| \simeq 0$.

ТЕОРЕМА 6.2. *Функция Ваннье первой низшей энергетической зоны $W_1(x)$ допускает разложение*

$$W_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} W_1^{(2p)} x^{2p}, \quad (6.7)$$

где

$$W_1^{(2p)} = \sum_{k=1} M_k q_{p,k}, \quad (6.8)$$

а величины M_k выражаются как α -циклы абелевых интегралов второго рода,

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{K}_k}} \oint_{\alpha_1} \lambda^k \sqrt{\frac{\lambda^g + s_g \lambda^{g-1} + \dots + s_1}{\prod_{i \in \{1, \dots, 2g+1\} \setminus \mathbb{I}} (\lambda - E_i)}} d\lambda, \quad k = 0, \dots \quad (6.9)$$

Величины $q_{k,l}$ являются коэффициентами полиномов $Q_p = \sum_{l=0}^p q_{p,l} z^l$, определенных рекуррентными соотношениями

$$Q_p = \sum_{m=0}^{p-1} \binom{2p}{2m-p} \phi_{m-p-1}(z) Q_m$$

с условиями

$$\phi_0 = \wp_{g,g}(\Omega) + z, \quad \phi_p = \underbrace{\wp_{g, \dots, g}}_{2p+2}(\Omega).$$

Первые несколько коэффициентов имеют вид

$$\begin{aligned} W_1^{(0)} &= M_0, \\ W_1^{(2)} &= M_1 + 2\wp_{g,g}(\Omega) M_0, \\ W_1^{(4)} &= M_2 + 4\wp_{g,g}(\Omega) M_1 + (4\wp_{g,g}(\Omega)^2 + 2\wp_{g,g,g,g}(\Omega)) M_0, \\ W_1^{(6)} &= M_3 + 6\wp_{g,g}(\Omega) M_2 + (12\wp_{g,g}(\Omega)^2 + 14\wp_{g,g,g,g}(\Omega)) M_1 + \\ &\quad + (2\wp_{g,g,g,g,g,g}(\Omega) + 28\wp_{g,g,g,g}(\Omega)\wp_{gg}(\Omega) + 8\wp_{g,g}(\Omega)^3) M_0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \wp_{g,g}(\Omega) &= \sum_{i \in \mathbb{I}} E_i, \\ \wp_{g,g,g,g}(\Omega) &= \left(6 \sum_{i \in \mathbb{I}} E_i + \alpha_{2k} \right) \sum_{i \in \mathbb{I}} E_i + 4 \sum_{i,k \in \mathbb{I}} E_i E_k, \end{aligned}$$

и мы использовали соотношение (3.20).

Заметим, что доказательство этой теоремы требует разложения по x экспоненциала в формуле (6.3), который является производящей функцией для полиномов Шура [27], и последующего интегрирования этих полиномов (подробности будут приведены в другой

статье). Подынтегральное выражение можно выразить рекуррентно в терминах абелевых дифференциалов второго рода, описанных ниже. В случае кривой рода 1 и эллиптических периодических потенциалов эти интегралы даются стандартными гипергеометрическими функциями [1].

Другое замечание состоит в том, что в ходе доказательства естественным образом возникает двойственная гиперэллиптическая кривая $X^\#$ того же рода, дуальная исходной гиперэллиптической кривой X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. *Двойственными кривыми $X_k^\#$, $k = 1, \dots, g$, связанными с кривой X , будем называть множество гиперэллиптических кривых рода g , заданных формулами*

$$\begin{aligned}\mu^{\#2} &= 4(\lambda^g + s_g \lambda^{g-1} + \dots + s_1) \prod_{i \in \{1, \dots, 2g+1\} \setminus \mathbb{I}_k} (\lambda - E_i) = \\ &= 4(\lambda^{2g+1} + \alpha_{2g}^\# \lambda^{2g} + \dots + \alpha_0^\#),\end{aligned}\quad (6.10)$$

где $\mathbb{I}_k \subset \{1, \dots, 2g+1\}$ – произвольный набор из g несовпадающих индексов.

Заметим, что амплитуды импульсов Ванье $W_n(0)$, $n = 1, \dots, g$, выражаются как периоды мероморфного гиперэллиптического интеграла соответствующих двойственных кривых.

Для описания канонических дифференциалов на $X_1^\#$ удобно ввести набор дифференциалов второго рода, которые мы будем называть дифференциалами Ванье:

$$d\mathcal{W}_1^{(n)} = \lambda^n \sqrt{\frac{\lambda^g + s_g \lambda^{g-1} + \dots + s_1}{\prod_{i \in \{1, \dots, 2g+1\} \setminus \mathbb{I}} (\lambda - E_i)}} d\lambda, \quad n = 0, \dots \quad (6.11)$$

Канонические голоморфные дифференциалы $d\mathbf{h}^\# = (dh_1^\#, \dots, dh_g^\#)^T$ кривой записываются как

$$dh_k^\# = \frac{\partial}{\partial s_k} d\mathcal{W}^{(0)} = \frac{\lambda^{k-1}}{\mu^\#} d\lambda, \quad k = 1, \dots, g. \quad (6.12)$$

Тот факт, что голоморфные дифференциалы двойственной кривой суть производные по модулям мероморфных дифференциалов, напоминает основное свойство алгебраических кривых, появляющихся в теории Зайберга–Виттена [28], см. также [29], где обсуждаются различные виды этих кривых.

Введем также канонические дифференциалы второго рода $d\mathbf{r}^\# = (dr_1^\#, \dots, dr_g^\#)^T$ аналогично формуле (3.3):

$$dr_j^\# = \sum_{k=j}^{2g+1-j} (k+1-j) \alpha_{k+1+j}^\# \frac{\lambda^k}{4\mu^\#} d\lambda, \quad j = 1, \dots, g. \quad (6.13)$$

Первые g дифференциалов $d\mathcal{W}^{(k)}$, $k = 0, \dots, g-1$, линейно зависят от $2g$ дифференциалов $d\mathbf{r}^\#$ и $d\mathbf{h}^\#$. Периоды дифференциалов $d\mathcal{W}^{(n)}$ для больших n также выражаются в терминах упомянутых $2g$ дифференциалов согласно теореме де Рама [30].

Последний аспект теории, который мы хотели бы обсудить, – это асимптотическое разложение функции Ванье при $x \rightarrow +\infty$. Для вычисления этого разложения можно использовать вариант метода перевала, применимый в случае, когда подынтегральное выражение содержит множитель, обращающийся в нуль в седловой точке. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6.3. При $x \rightarrow \infty$ функция Ваннье нижней энергетической зоны $[E_1, E_2]$ для однозонного потенциала имеет асимптотическое выражение

$$W_1(x) \simeq \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\mathcal{Q}_0(\lambda_0)}{\mathcal{K}_n}} \sqrt{\prod_{i \in \mathbb{I}} (\lambda_0 - E_i)} \psi(x, \lambda_0) \left[\frac{i}{2 \langle S'(x, \lambda_0) \rangle} \right]^{1/4} \frac{\Gamma(3/4)}{x^{3/4}} \right\}, \quad (6.14)$$

где λ_0 является решением уравнения

$$\langle S(x, \lambda) \rangle = 0, \quad (6.15)$$

а $\mathcal{Q}_0(\lambda)$ определяется в лемме 3.3.

Формула для асимптотического разложения естественным образом обобщает результат для рода 1, полученный в работе [1], и показывает универсальный характер закона убывания функции Ваннье на бесконечности как $e^{ic_0|x|}|x|^{-3/4}$ с вещественной фазой $c_0|x|$ в седловой точке.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы определили функции Ваннье, связанные с разрешенными зонами квазипериодических конечнозонных потенциалов. Ряд интересных вопросов остался за пределами нашего рассмотрения. Один такой вопрос состоит в том, порождает ли введенная выше функция Ваннье ортогональный и полный набор в пространстве собственных функций оператора Шредингера. Более того, желательно было бы обсудить несколько нетривиальных примеров, а также сравнить наши аналитические выражения для амплитуд и асимптотического поведения функций Ваннье с результатами численного анализа, выполненного в работе [1] для однозонного случая. Мы планируем представить этот материал и другие связанные с ним задачи в следующей подробной публикации.

Благодарности. Е. Д. Белоколов и В. З. Энольский благодарны Физическому факультету Университета Салерно за финансовую поддержку в течение месяца, когда часть данной задачи была решена, и профессорам М. Бойти, Ф. Пемпинелли и Б. Принари за предоставленную возможность участвовать в конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. III”, где были анонсированы предварительные результаты данной работы. М. Салерно благодарит MIUR за частичную финансовую поддержку (межуниверситетский проект PRIN-2003, a Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, sezione di Salerno).

Список литературы

- [1] E. D. Belokolos, V. Z. Enolskii, M. Salerno. J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 9685–9704; cond-mat/0401440.
- [2] N. Ercolani, M. G. Forest, D. W. McLaughlin, R. Montgomery. Duke Math. J. 1987. V. 55. P. 949–983; H. Flaschka, G. Forest, D. McLaughlin. Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. № 6. P. 739–794.
- [3] И. М. Кривчевер. Функции анализа и его прилож. 1988. Т. 22. № 3. С. 37–52.

- [4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin. Hyperelliptic Kleinian functions and applications. In: Solitons, Geometry and Topology: On the Crossroad. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. V. 179. Eds. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov. Providence, RI: AMS, 1997. P. 1–34.
- [5] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin. Rev. Math. Math. Phys. 1997. V. 102. № 2. P. 1–125.
- [6] В. М. Бухштабер, В. З. Энольский, Д. В. Лейкин. Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 2. С. 1–15.
- [7] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин. Функц. анализ и его прилож. 2002. Т. 36. № 4. С. 18–34.
- [8] S. Baldwin, J. Gibbons. J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 8393–8413; 2004. V. 37. P. 5341–5354; J. D. Edelstein, M. Gómez-Reino, M. Mariño. Adv. Theor. Math. Phys. 2000. V. 4. P. 503–543; hep-th/0006113; J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, E. Previato. Lett. Math. Phys. 2003. V. 63. P. 5–17; S. Matsutani. J. Geom. Phys. 2002. V. 794. P. 1–17; S. Matsutani, Y. Ônishi. Rev. Math. Phys. 2003. V. 15. P. 559–628; Glasgow Math. J. 2002. V. 44. P. 353–364.
- [9] E. A. Coddington, N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations. N.Y.: McGraw-Hill, 1955.
- [10] R. Johnson, J. Moser. Commun. Math. Phys. 1982. V. 84. P. 403–438.
- [11] L. A. Pastur. Commun. Math. Phys. 1980. V. 75. P. 179–196.
- [12] S. Kotani. Lyapunov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Schrödinger operators. In: Stochastic Analysis. Proc. on Stochastic Analysis. Taniguchi Symp. (Katata, Kyoto, 1982). North-Holland Math. Libr. V. 32. Ed. K. Itô. Tokyo: Kinokuniya; Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 225–247.
- [13] В. Е. Захаров, С. В. Макаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [14] E. D. Belokolos, A. I. Bobenko, V. Z. Enolskii, A. R. Its, V. B. Matveev. Algebro Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations. Berlin: Springer, 1994.
- [15] F. Gesztesy, H. Holden. Soliton Equations and Their Algebro-Geometric Solutions. (1 + 1)-Dimensional Continuous Models. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.
- [16] J. Guckenheimer, J. Moser, S. E. Newhouse. Dynamical Systems. In: C.I.M.E. Lectures (Bressanone, Italy, June 1978). Progress in Mathematics. V. 8. Basel, Stuttgart: Birkhäuser, 1980. P. 233–289; В. А. Марченко, И. В. Островерхий. Матем. сб. 1975. Т. 97. С. 493–554.
- [17] H. Weyl. Math. Ann. 1916. V. 77. P. 313–352.
- [18] Y. Ônishi. Determinant expressions for hyperelliptic functions, (with an Appendix by Shigeki Matsutani: Connection of The formula of Cantor and of Brioschi–Kiepert type). To appear in Proc. Edinburgh Math. Soc. 2005.
- [19] O. Bolza. Amer. J. Math. 1895. V. 17. P. 11–36.
- [20] H. F. Baker. Abel's Theorem and the Allied Theory of Theta Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1897, reprinted 1995; H. F. Baker. Amer. J. Math. 1898. V. 20. P. 301–384.
- [21] H. F. Baker. Multiple Periodic Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1907.
- [22] А. П. Имс, В. Б. Мамвеев. ТМФ. 1975. Т. 23. С. 51–68.
- [23] Б. А. Дубровин. УМН. 1981. Т. 36. С. 11–80.
- [24] A. Krazer. Lehrbuch der Thetafunktionen. Leipzig: Teubner, 1903. Reprinted by AMS Chelsea Publishing, 1998.
- [25] E. D. Belokolos, V. Z. Enolskii. J. Math. Sci. 2001. V. 106. № 6. P. 3395–3486; 2002. V. 108. № 3. P. 295–374.
- [26] L. Gavrilov, A. M. Perelomov. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 6339–6352.
- [27] И. Г. Макдональд. Симметрические функции и многочлены Холла. М.: Мир, 1984.
- [28] N. Seiberg, E. Witten. Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. № 2. P. 19–52; Erratum. V. 430. P. 485–486; hep-th/9407087; 1994. V. 431. № 3. P. 484–550; hep-th/9407087.
- [29] A. Gorskii, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morosov. Phys. Lett. B. 1995. V. 355. P. 466–474.
- [30] P. Griffiths, J. Harris. Principles of Algebraic Geometry. N.Y.: Wiley, 1978.