Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари, К спектральной теории нестационарного уравнения Шредингера с двумерно возмущенным произвольным одномерным потенциалом, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 257–276

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1851>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:42:21

© 2005 г.

М. Бойти*, Ф. Пемпинелли*,
А. К. Погребков†, Б. Принари*

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДВУМЕРНО ВОЗМУЩЕННЫМ ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОДНОМЕРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

В рамках подхода расширенной резольвенты рассматривается нестационарное уравнение Шредингера, потенциал которого является возмущением произвольного одномерного потенциала посредством убывающей двумерной функции. Приведены соответствующие модификации решений Йоста, опережающих и запаздывающих решений и спектральных данных, а также соотношения между ними.

Ключевые слова: метод обратной задачи рассеяния, резольвентный подход, уравнение Кадомцева–Петвиашвили.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кадомцева–Петвиашвили в версии, которая называется КПП, имеет вид

$$(u_t - 6uu_{x_1} + u_{x_1x_1x_1})_{x_1} = 3u_{x_2x_2} \quad (1.1)$$

и является $(2 + 1)$ -мерным обобщением известного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) [1], [2]. Как следствие, уравнение КПП допускает решения, ведущие себя при бесконечно удаленных x подобно решениям уравнения КдФ. Например, если $u_1(t, x_1)$ удовлетворяет уравнению КдФ, то $u(t, x_1, x_2) = u_1(t, x_1 + \mu x_2 + 3\mu^2 t)$ является решением уравнения КПП при произвольной константе $\mu \in \mathbb{R}$. Поэтому естественно рассматривать такие решения уравнения (1.1), которые убывают на бесконечности по всем направлениям, кроме некоторых одномерных лучей, вдоль которых решение ведет себя как u_1 . Хотя уже около тридцати лет известно, что уравнение КПП интегрируемо [2], его общая теория далека от завершения. Действительно, в работах [3] задача Коши

*Dipartimento di Fisica, Università di Lecce and Sezione INFN, Lecce, Italy.

E-mail: boiti@le.infn.it, pempi@le.infn.it, prinari@le.infn.it

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, ул. Губкина 8, 119991, Москва, Россия.

E-mail: pogreb@mi.ras.ru

для КПП с быстроубывающими начальными данными была решена с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) на основе спектрального анализа нестационарного оператора Шредингера

$$\mathcal{L}(x, \partial_x) = i\partial_{x_2} + \partial_{x_1}^2 - u(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad (1.2)$$

задающего вспомогательную линейную задачу для уравнения КПП. Однако, как известно, стандартный подход к спектральной теории оператора (1.2), основанный на интегральных уравнениях для решений Йоста, неприменим для потенциалов с одномерным асимптотическим поведением.

В работах [4] был предложен метод расширенной резольвенты как способ построения обобщения МОЗР, позволяющего изучать спектральную теорию операторов с нетривиальным асимптотическим поведением на пространственной бесконечности. Здесь мы рассматриваем случай, когда имеется только одно направление неубывающего поведения, а именно, когда

$$u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_1, x_2), \quad (1.3)$$

поэтому без потери общности мы выбрали константу $\mu = 0$ (общий случай восстанавливается за счет галилеевой инвариантности уравнения (1.1)). Спектральная теория для простейшего примера потенциала в (1.2) была развита в работе [5], в которой для уравнения КПП была рассмотрена задача Коши с начальным условием типа (1.3), причем $u_1(x_1)$ являлось значением при $t = 0$ односолитонного решения уравнения КдФ, а $u_2(x)$ — гладкой, вещественной, быстроубывающей функцией на (x_1, x_2) -плоскости. В работе [5] была рассмотрена прямая задача и с помощью модифицированных интегральных уравнений было показано, что модифицированное решение Йоста в дополнение к стандартному скачку на вещественной оси спектрального параметра $\mathbf{k}$ имеет также скачок на отрезке мнимой оси комплексной $\mathbf{k}$ -плоскости. Однако в этой статье некоторые существенные свойства решений Йоста и соотношения между ними были даны без доказательства. В работе [6] задача была полностью решена в рамках подхода расширенной резольвенты для случая чисто односолитонного потенциала u_1 . Здесь мы даем обобщение этих результатов на случай, когда $u_1(x_1)$ в (1.3) — произвольный гладкий, вещественный и быстроубывающий по x_1 одномерный потенциал. Для краткости некоторые результаты приведены здесь без доказательств, которые можно будет найти в [7]. Там же будут выведены характеристические уравнения для спектральных данных и исследованы их свойства.

2. СЛУЧАЙ ОДНОМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

2.1. Основные объекты резольвентного подхода. В этом разделе мы даем краткий обзор основных элементов подхода расширенной резольвенты. Дальнейшие детали заинтересованный читатель может найти в [4]. Пусть $A(x, x'; q)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}'$ обобщенных функций умеренного роста от шести вещественных переменных $x = (x_1, x_2)$, $x' = (x'_1, x'_2)$ и $q = (q_1, q_2)$. Мы называем $A(q)$ оператором с ядром

$A(x, x'; q) \in \mathcal{S}'$. Для операторов $A(q)$ и $B(q)$ с ядрами $A(x, x'; q)$ и $B(x, x'; q)$ мы вводим стандартный закон композиции

$$(AB)(x, x'; q) = \int dx'' A(x, x''; q) B(x'', x'; q), \quad (2.1)$$

если интеграл существует в смысле обобщенных функций. Оператор A может обладать обратным в терминах этой композиции, $AA^{-1} = I$ или $A^{-1}A = I$, где I – единичный оператор в $\mathcal{S}'$, $I(x, x'; q) = \delta(x - x')$, а $\delta(x) = \delta(x_1)\delta(x_2)$ является двумерной δ -функцией. Существенный для нас подкласс в этом пространстве операторов получается следующим образом. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, \partial_x)$ означает дифференциальный оператор с ядром $A(x, x') = \mathcal{A}(x, \partial_x)\delta(x - x')$. В дальнейшем мы рассматриваем дифференциальные операторы, коэффициенты которых являются гладкими функциями от x . Мы вводим *расширение* дифференциальных операторов, т.е. каждому дифференциальному оператору $\mathcal{A}$ мы сопоставляем оператор $A(q)$ с ядром

$$A(x, x'; q) \equiv \mathcal{A}(x, \partial_x + q)\delta(x - x') = e^{-q(x-x')} A(x, x'), \quad (2.2)$$

где $x, x', q \in \mathbb{R}^2$ и $qx = q_1x_1 + q_2x_2$. Такие ядра, очевидно, принадлежат пространству $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^6)$.

Сопоставим каждому оператору $A(q)$ с ядром $A(x, x'; q)$ его “хэт-ядро”

$$\hat{A}(x, x'; q) = e^{q(x-x')} A(x, x'; q). \quad (2.3)$$

Если $A(q)$ – дифференциальный оператор, то это равенство задает соответствие, обратное (2.2), $\hat{A}(x, x'; q) = A(x, x')$, и для любого (не обязательно дифференциального) оператора $B(q)$ выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \widehat{AB}(x, x'; q) &= \mathcal{A}(x, \partial_x) \hat{B}(x, x'; q), \\ \widehat{BA}(x, x'; q) &= \mathcal{A}^d(x', \partial_{x'}) \hat{B}(x, x'; q), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\mathcal{A}^d$ – оператор, дуальный к $\mathcal{A}$. В дальнейшем для равенств типа (2.4) мы будем использовать обозначения

$$\widehat{AB} = \overrightarrow{\mathcal{A}} \hat{B}, \quad \widehat{BA} = \hat{B} \overleftarrow{\mathcal{A}}. \quad (2.5)$$

Расширение $L(q)$ оператора $\mathcal{L}(x, \partial_x)$ из (1.2) дается посредством соотношения

$$L(q) = L_0(q) - U, \quad (2.6)$$

где в соответствии с (2.2) L_0 имеет ядро

$$L_0(x, x'; q) = [i(\partial_{x_2} + q_2) + (\partial_{x_1} + q_1)^2] \delta(x - x'), \quad (2.7)$$

а ядро оператора U равно

$$U(x, x'; q) = u(x) \delta(x - x'), \quad (2.8)$$

причем функция $u(x)$ всегда полагается вещественной. Основным объектом нашего подхода является (расширенная) резольвента $M(q)$ оператора $L(q)$, которая определяется как оператор, обратный к оператору L :

$$LM = ML = I. \quad (2.9)$$

Мы опускаем здесь для краткости дополнительные условия, гарантирующие единственность расширенной резольвенты как решения уравнений (2.9), ссылаясь, например, на работу [6]. Хэт-ядро (см. (2.3)) расширенной резольвенты “голого” оператора L_0 задается как

$$\widehat{M}_0(x, x'; q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{k}_{\Im} = q_1} d\mathbf{k}_{\Re} [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(\ell_{2\Im}(\mathbf{k}) - q_2)] \Phi_0(x, \mathbf{k}) \Psi_0(x', \mathbf{k}), \quad (2.10)$$

где $\Phi_0(x, \mathbf{k}) = e^{-i\ell(\mathbf{k})x}$, $\Psi_0(x, \mathbf{k}) = e^{i\ell(\mathbf{k})x}$ и

$$\ell(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}^2), \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_{\Re} + i\mathbf{k}_{\Im} \in \mathbb{C} \quad (2.11)$$

— двухкомпонентный вектор. Мы используем полужирный шрифт для обозначения комплексных переменных. Для любого $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$ функции $\Phi_0(x, \mathbf{k})$ и $\Psi_0(x, \mathbf{k})$ являются решениями нестационарного уравнения Шредингера (1.2) и удовлетворяют свойству сопряжения $\overline{\Phi_0(x, \mathbf{k})} = \Psi_0(x, \bar{\mathbf{k}})$. Используя обозначения (2.5), равенства (2.9) для случая нулевого потенциала можно записать в виде $\overrightarrow{\mathcal{L}}_0 \widehat{M}_0(q) = \widehat{M}_0(q) \overleftarrow{\mathcal{L}}_0 = I$, которое показывает, что $\widehat{M}_0(q)$ — дупараметрическое семейство функций Грина уравнения (1.2) и дуального к нему.

Из (2.10) непосредственно следует, что при $q_1 \neq 0$

$$\frac{\partial \widehat{M}_0(q)}{\partial q_1} = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbf{k}_{\Im} = q_1} d\mathbf{k}_{\Re} \bar{\mathbf{k}} \delta(\ell_{2\Im}(\mathbf{k}) - q_2) \Phi_0(\mathbf{k}) \otimes \Psi_0(\mathbf{k}), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \widehat{M}_0(q)}{\partial q_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{k}_{\Im} = q_1} d\mathbf{k}_{\Re} \delta(\ell_{2\Im}(\mathbf{k}) - q_2) \Phi_0(\mathbf{k}) \otimes \Psi_0(\mathbf{k}), \quad (2.13)$$

где $\ell_{2\Im}$ — мнимая часть второй компоненты вектора, введенного в (2.11), а прямое произведение определено стандартным образом как оператор с ядром

$$(\Phi_0(\mathbf{k}) \otimes \Psi_0(\mathbf{k}))(x, x') = \Phi_0(x, \mathbf{k}) \Psi_0(x', \mathbf{k}).$$

С помощью M_0 резольвента общего оператора L из (2.6) также может быть определена как решение интегральных уравнений

$$M = M_0 + M_0 U M, \quad M = M_0 + M U M_0. \quad (2.14)$$

Снова ссылаясь на работы [4], отметим здесь, что основной инструмент для исследования свойств резольвенты выводится из тождества

$$M' - M = -M'(L' - L)M, \quad (2.15)$$

где L' — другой оператор типа (1.2) и M' — его резольвента. Это тождество Гильберта (мы называем его так по аналогии со стандартной спектральной теорией операторов) используется для исследования свойств непрерывности и дифференцируемости резольвенты по q -переменным.

2.2. Резольвентный подход в случае одномерного потенциала. Ниже в этом разделе мы рассмотрим вложение стандартного одномерного преобразования рассеяния, см. [8], в теорию двумерных дифференциальных операторов с одномерным потенциалом. Это дает нам базовый пример потенциала (1.3) с $u_2 \equiv 0$. Результаты этого построения будут использованы в следующем разделе, где изучается общий случай $u_2 \neq 0$. Итак, мы рассматриваем здесь расширенный дифференциальный оператор

$$L_1(q) = L_0(q) - U_1, \quad U_1(x, x'; q) = u_1(x_1)\delta(x - x'), \quad (2.16)$$

где $L_0(q)$ определен в (2.7). Для решений Йоста нестационарного уравнения Шредингера и дуального к нему мы используем обозначения

$$\varphi(x, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}^2 x_2} \Phi_1(x_1, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}x_1 - i\mathbf{k}^2 x_2} \chi_1(x_1, \mathbf{k}), \quad (2.17)$$

$$\psi(x, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}^2 x_2} \Psi_1(x_1, \mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}x_1 + i\mathbf{k}^2 x_2} \xi_1(x_1, \mathbf{k}), \quad (2.18)$$

соответственно, где $\Phi_1(x_1, \mathbf{k})$ и $\Psi_1(x_1, \mathbf{k})$ являются решениями Йоста одномерного оператора Штурма–Лиувилля, а именно, χ_1 определено интегральным уравнением

$$\chi_1(x_1, \mathbf{k}) = 1 + \int_{-\mathbf{k}_{\Im}\infty}^{x_1} dy_1 \frac{e^{2i\mathbf{k}(x_1 - y_1)} - 1}{2i\mathbf{k}} u_1(y_1) \chi_1(y_1, \mathbf{k}), \quad (2.19)$$

и аналогичное уравнение определяет $\xi_1(x_1, \mathbf{k})$. Функции $\varphi(x, \mathbf{k})$ и $\psi(x, \mathbf{k})$, равно как и их предельные значения на вещественной оси, $\varphi^\pm(x, k) = \varphi(x, k \pm i0)$ и $\psi^\pm(x, k) = \psi(x, k \pm i0)$, удовлетворяют свойствам сопряжения:

$$\overline{\varphi(x, \mathbf{k})} = \psi(x, \bar{\mathbf{k}}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}; \quad \overline{\varphi^\pm(x, k)} = \psi^\mp(x, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (2.20)$$

а также соотношениям ортогональности и полноты:

$$\frac{1}{2\pi} \int dx_1 \psi(x, \mathbf{k} + p) \varphi(x, \mathbf{k}) = \frac{\delta(p)}{t(\mathbf{k})}, \quad p \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{C}, \quad (2.21)$$

$$\int dx_1 \psi(x, i\kappa_j) \varphi(x, \mathbf{k}) = \int dx_1 \psi(x, \mathbf{k}) \varphi(x, i\kappa_j) = 0, \quad |\mathbf{k}_{\Im}| < \kappa_j, \quad (2.22)$$

$$\int dx_1 \psi(x, i\kappa_j) \varphi(x, i\kappa_{j'}) = \frac{i\delta_{j,j'}}{t_j}, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{x'_2=x_2} dx_{\Re} t(\mathbf{k}) \varphi(x, \mathbf{k}) \psi(x', \mathbf{k}) - \\ & - i \sum_{j=1}^N t_j \theta(\kappa_j - |\mathbf{k}_{\Im}|) \varphi(x, i\kappa_j) \psi(x', i\kappa_j) \Big|_{x'_2=x_2} = \delta(x_1 - x'_1), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $t(\mathbf{k})$ – коэффициент прохождения одномерной задачи с полюсами в точках $\pm i\kappa_j$, $j = 1, \dots, N$ (для определенности мы полагаем $\kappa_j > 0$ для всех j). Обозначим вычеты функции $t(\mathbf{k})$ в верхней полуплоскости как

$$t_j = \operatorname{res}_{\mathbf{k}=i\kappa_j} t(\mathbf{k}). \quad (2.25)$$

Другой набор дискретных спектральных данных одномерной задачи дается коэффициентами b_j , определенными одним из следующих равенств:

$$\Phi_1(x_1, i\kappa_j) = b_j \Phi_1(x_1, -i\kappa_j), \quad \Psi_1(x_1, -i\kappa_j) = b_j \Psi_1(x_1, i\kappa_j). \quad (2.26)$$

Эти коэффициенты вещественны, отличны от нуля, и $\operatorname{sgn}(it_j b_j) = -1$. Из формулы (2.20) следует, что

$$\varphi(x, i\kappa_j) = b_j \varphi(x, -i\kappa_j), \quad \varphi(x, i\kappa_j) = b_j \overline{\psi(x, i\kappa_j)}. \quad (2.27)$$

В силу (2.24) легко проверить (ср. с (2.3)), что хэт-ядро резольвенты $M_1(q)$ двумерного оператора $L_1(q)$ в терминах предыдущих обозначений дается равенством

$$\begin{aligned} \widehat{M}_1(x, x'; q) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{k}_{\Im}=q_1} d\mathbf{k}_{\Re} [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(2\mathbf{k}_{\Re}\mathbf{k}_{\Im} - q_2)] t(\mathbf{k}) \varphi(x, \mathbf{k}) \psi(x', \mathbf{k}) - \\ & - \sum_j \theta(\kappa_j^2 - q_1^2) t_j [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(-q_2)] \varphi(x, i\kappa_j) \psi(x', i\kappa_j), \end{aligned} \quad (2.28)$$

т.е. в обозначениях (2.5)

$$\overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \widehat{M}_1(q) = \widehat{M}_1(q) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 = I, \quad (2.29)$$

что эквивалентно (2.9). Более того, возвращаясь к ядру $M_1(x, x'; q)$ и используя свойства одномерных решений Йоста и определения (2.18), мы получаем, что $M_1(x, x'; q) \in \mathcal{S}'$.

Поведение $\widehat{M}_1(x, x'; q)$ по переменным q определяется комбинацией θ -функций и поведением $t(\mathbf{k})$ в полюсах. Вводя в подынтегральное выражение члены, компенсирующие эти полюсные особенности, мы разлагаем резольвенту в сумму

$$\widehat{M}_1(q) = \widehat{M}_{1,\text{reg}}(q) + \sum_j \Gamma_j(q) \varphi(i\kappa_j) \otimes \psi(i\kappa_j), \quad (2.30)$$

где $\widehat{M}_{1,\text{reg}}(q)$ – регулярная функция от q , и $\Gamma_j(q)$ суть не зависящие от x функции,

$$\Gamma_j(q) = \frac{t_j \operatorname{sgn} q_1}{2\pi i} \ln \frac{q_2 + 2iq_1(q_1 - \kappa_j)}{q_2 + 2iq_1(q_1 + \kappa_j)}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2.31)$$

где логарифм имеет разрез по отрицательной части вещественной оси своего аргумента. Это доказывает, что расширенная резольвента в случае одномерного потенциала имеет логарифмические особенности в точках $q = (\pm \kappa_j, 0)$ и разрыв при $q_2 = 0$. Для скачка резольвенты при $q_2 = 0$ мы получаем из (2.28), что

$$\widehat{M}_1(q_1, +0) - \widehat{M}_1(q_1, -0) = - \sum_j t_j \theta(\kappa_j - |q_1|) \varphi(i\kappa_j) \otimes \psi(i\kappa_j). \quad (2.32)$$

Для всех остальных значений q резольвента (2.28) имеет производные по q вида (2.12), (2.13). Например, справедливо равенство

$$\frac{\partial \widehat{M}_1(q)}{\partial q_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{k}_{\Im}=q_1} d\mathbf{k}_{\Re} \delta(\ell_{2\Im}(\mathbf{k}) - q_2) t(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}) \otimes \psi(\mathbf{k}), \quad (2.33)$$

которое в окрестности точки $q_1 = 0$ следует понимать в смысле обобщенных функций. Функция Грина $\mathcal{G}_1(x, x', \mathbf{k})$ уравнения (1.2) вводится посредством редукции

$$\mathcal{G}_1(\mathbf{k}) = \widehat{M}_1(q) \Big|_{q=\ell_{\Im}(\mathbf{k})}, \quad (2.34)$$

см. (2.11), такой же, как и в случае убывающего потенциала [6]. Тогда из (2.28) мы получаем билинейное представление

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(x, x', \mathbf{k}) = & \frac{1}{2\pi i} \int d\alpha [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(\mathbf{k}_{\Im}(\alpha - \mathbf{k}_{\Re}))] t(\alpha + i\mathbf{k}_{\Im}) \times \\ & \times \varphi(x, \alpha + i\mathbf{k}_{\Im}) \psi(x', \alpha + i\mathbf{k}_{\Im}) - \\ & - \sum_j t_j \theta(\varkappa_j - |\mathbf{k}_{\Im}|) [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(-\mathbf{k}_{\Re} \mathbf{k}_{\Im})] \varphi(x, i\varkappa_j) \psi(x', i\varkappa_j), \end{aligned} \quad (2.35)$$

которое обобщает на случай произвольного потенциала u_1 функцию Грина, использованную в [5] и [6] для чисто односолитонного потенциала. Эта функция Грина удовлетворяет свойству сопряжения $\overline{\mathcal{G}_1(x, x', \mathbf{k})} = \mathcal{G}_1(x', x, \overline{\mathbf{k}})$, а произведение $g_1(x, x', \mathbf{k}) = e^{i\ell(\mathbf{k})(x-x')} \mathcal{G}_1(x, x', \mathbf{k})$ убывает при $\mathbf{k} \rightarrow \infty$. Принимая во внимание, что резольвента удовлетворяет (2.29), мы получаем, что функция Грина удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\mathcal{G}_1(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_0(\mathbf{k}) + \mathcal{G}_0(\mathbf{k}) U_1 \mathcal{G}_1(\mathbf{k}), \quad \mathcal{G}_1(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_0(\mathbf{k}) + \mathcal{G}_1(\mathbf{k}) U_1 \mathcal{G}_0(\mathbf{k}), \quad (2.36)$$

она аналитична при $\mathbf{k}_{\Re} \mathbf{k}_{\Im} \neq 0$, и в этой области мы имеем

$$\frac{\partial \mathcal{G}_1(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}_{\Im}} = \frac{\text{sgn } \mathbf{k}_{\Im}}{2\pi} t(\mathbf{k}) \varphi(\mathbf{k}) \otimes \psi(\mathbf{k}). \quad (2.37)$$

В силу (2.34) можно записать разложение для функции Грина, аналогичное разложению (2.30):

$$\mathcal{G}_1(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_{1,\text{reg}}(\mathbf{k}) + \sum_j \gamma_j(\mathbf{k}) \varphi(i\varkappa_j) \otimes \psi(i\varkappa_j), \quad (2.38)$$

где в соответствии с (2.31)

$$\gamma_j(\mathbf{k}) = \Gamma_j(\ell_{\Im}(\mathbf{k})) \equiv \frac{t_j \text{sgn } \mathbf{k}_{\Im}}{2\pi i} \ln \frac{\mathbf{k} - i\varkappa_j}{\mathbf{k} + i\varkappa_j}. \quad (2.39)$$

Это доказывает, что в дополнение к стандартному скачку на вещественной оси функция Грина имеет логарифмические особенности в точках $\mathbf{k} = \pm i\varkappa_j$ и разрыв на мнимой оси при $|\mathbf{k}_{\Im}| < \max_j \varkappa_j$, что обобщает результаты, полученные в [5] для случая односолитонного потенциала u_1 .

В [4] мы показали, что в случае убывающего потенциала сами решения Йоста являются результатом специального транкирования и редукций функций Грина. Однако в применении к введенным выше решениям Йоста φ и ψ эти процедуры приводят, как

и следовало ожидать, к расходящимся выражениям. Они могут быть регуляризованы при $\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \neq 0$ посредством следующей предельной процедуры:

$$\varphi(x, \mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int dx' (\mathcal{G}_1(\mathbf{k}) \overleftarrow{\mathcal{L}}_0)(x, x') e^{-i\ell(\mathbf{k})x' - i\varepsilon x'_2}, \quad (2.40)$$

$$\psi(x, \mathbf{k}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int dx' e^{i\ell(\mathbf{k})x' + i\varepsilon x'_2} (\overrightarrow{\mathcal{L}}_0 \mathcal{G}_1(\mathbf{k}))(x', x), \quad (2.41)$$

которая дает тождества при подстановке $\mathcal{G}_1(\mathbf{k})$ из формулы (2.35).

Коэффициент прохождения, функция Грина и решения Йоста разрывны на вещественной оси $\mathbf{k}$. В дальнейшем мы используем обозначения

$$\begin{aligned} t^{\pm}(k) &= \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} t(k + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \quad k \in \mathbb{R}, \\ \varphi^{\pm}(k) &= \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} \varphi(k + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \quad \psi^{\pm}(k) = \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} \psi(k + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \\ \mathcal{G}_1^{\pm}(k) &= \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} \mathcal{G}_1(k + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

для их граничных значений. По определению, $t^{\pm}(k)$, $\varphi^{\pm}(k)$ и $\psi^{\pm}(k)$ — конечные гладкие функции от k , в то время как граничное значение функции Грина разрывно при $k = 0$, как следует из (2.35).

Вследствие (2.28) резольвента $M_1(q)$ разрывна при $q = 0$ и $q_2 = 0$. Рассмотрим сначала предел $q_2 \rightarrow 0$, когда $q_1 \neq 0$. По формуле (2.34) мы получаем

$$\lim_{q_2 \rightarrow \pm 0} (\widehat{M}_1(q)|_{q_1 = \mathbf{k}_{\mathfrak{S}}}) = \mathcal{G}_1(\pm 0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) \quad (2.43)$$

и для разрыва функции Грина имеем из (2.32)

$$\mathcal{G}_1(+0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) - \mathcal{G}_1(-0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) = -\operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \sum_j t_j \theta(\varkappa_j - |\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}|) \varphi(i\varkappa_j) \otimes \psi(i\varkappa_j). \quad (2.44)$$

Разрывность резольвенты $M_1(q)$ по q_2 в нуле, когда $q_1 = 0$, приводит к введению опережающей и запаздывающей функций Грина подобно случаю убывающего потенциала, т.е. мы полагаем, что

$$\mathcal{G}_{1,\pm}(x, x') = \lim_{q_2 \rightarrow \pm 0} \lim_{q_1 \rightarrow 0} \widehat{M}_1(x, x'; q), \quad (2.45)$$

где предел $q_1 \rightarrow 0$ не зависит от знака. Тогда с учетом (2.28) мы получаем следующее билинейное представление для этих функций Грина в терминах решений Йоста на вещественной оси:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{1,\pm}(x, x') &= \pm \theta(\pm(x_2 - x'_2)) \left(\frac{1}{2\pi i} \int d\alpha t^{\sigma}(\alpha) \varphi^{\sigma}(x, \alpha) \psi^{\sigma}(x', \alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_j t_j \varphi(x, i\varkappa_j) \psi(x', i\varkappa_j) \right), \end{aligned} \quad (2.46)$$

где $\sigma = +, -$, и для граничных значений решений Йоста и $t(\mathbf{k})$ были использованы обозначения (2.42). Понятно, что опережающая и запаздывающая функции Грина не зависят от знака σ в (2.46) и удовлетворяют свойству сопряжения $\overline{\mathcal{G}_{1,\pm}(x, x')} = \mathcal{G}_{1,\mp}(x', x)$. Опережающее и запаздывающее решения уравнения (1.2) определяются так же, как в случае убывающего потенциала, т. е.

$$\varphi_{\pm}(x, k) = \int dx' (\mathcal{G}_{1,\pm} \overleftarrow{\mathcal{L}}_0)(x, x') e^{-i\ell(k)x'}, \quad (2.47)$$

$$\psi_{\pm}(x, k) = \int dx' e^{i\ell(k)x'} (\overrightarrow{\mathcal{L}}_0 \mathcal{G}_{1,\pm})(x', x). \quad (2.48)$$

Используя обозначения (2.42), мы получаем по формулам (2.35) и (2.46)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1^{\sigma}(k) - \mathcal{G}_{1,\pm} = & \frac{\mp 1}{2\pi i} \int d\alpha \theta(\pm\sigma(\alpha - k)) t^{\sigma}(\alpha) \varphi^{\sigma}(\alpha) \otimes \psi^{\sigma}(\alpha) \pm \\ & \pm \theta(\mp\sigma k) \sum_j t_j \varphi(i\mathfrak{x}_j) \otimes \psi(i\mathfrak{x}_j), \quad \sigma = +, -. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Опережающее и запаздывающее решения и предельные значения решений Йоста на вещественной оси связаны друг с другом посредством соотношений

$$\varphi_{\pm}(k) = \int dp \varphi^{\sigma}(p) \overline{r_{\pm}^{-\sigma}(p, k)}, \quad t^{\sigma}(k) \varphi^{\sigma}(k) = \int dp \varphi_{\pm}(p) r_{\pm}^{\sigma}(p, k), \quad (2.50)$$

где

$$r_{\pm}^{\sigma}(p, k) = \delta(k - p) [\theta(\pm\sigma k) + \theta(\mp\sigma k) t(\sigma k)] + \theta(\mp\sigma k) \delta(k + p) r^{\sigma}(k) \quad (2.51)$$

и $r^{\pm}(k)$ являются стандартными (левым и правым) коэффициентами отражения (см. формулу (2.53) ниже). Аналогичные соотношения для дуальных решений следуют из (2.20) и свойства сопряжения

$$\overline{\varphi_{\pm}(k)} = \psi_{\mp}(k). \quad (2.52)$$

В стандартной теории уравнения Штурма–Лиувилля опережающие и запаздывающие решения не используются, в отличие от случая нестационарного уравнения Шредингера. Здесь мы ввели их для удобства дальнейших ссылок. Стандартные (см. [8]) соотношения между граничными значениями решений Йоста на вещественной оси следуют из подстановки первого уравнения в (2.50) во второе:

$$t^{\sigma}(k) \varphi^{\sigma}(k) = \int dp \varphi^{-\sigma}(p) f^{-\sigma}(p, k), \quad \sigma = +, -, \quad (2.53)$$

где мы ввели спектральные данные

$$f^{-\sigma}(k, k') = \int dk'' \overline{r_{\pm}^{\sigma}(k'', k)} r_{\pm}^{\sigma}(k'', k') \equiv \delta(k - k') + \delta(k + k') r^{-\sigma}(k) \quad (2.54)$$

и использовали (2.51) в последнем равенстве.

3. МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ НАД НЕТРИВИАЛЬНЫМ ФОНОМ: ДВУМЕРНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ ОДНОМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

3.1. Резольвента. Теперь мы приступаем к изучению спектральных свойств оператора $\mathcal{L}$ (1.2) с потенциалом, данным в (1.3). Распирение $L(q)$ определено в (2.6), а обратный к $L(q)$ оператор, т. е. резольвенту $M(q)$, мы задаем одним из интегральных уравнений

$$M(q) = M_1(q) + M_1(q)U_2M(q), \quad M(q) = M_1(q) + M(q)U_2M_1(q), \quad (3.1)$$

где $U_2(x, x'; q) = u_2(x)\delta(x - x')$. Мы полагаем $u_2(x)$ вещественной, гладкой и быстроубывающей функцией по обоим переменным (x_1, x_2) . Более того, мы полагаем ее “малой” в том смысле, что решения $M(x, x'; q)$ обоих уравнений в (3.1) существуют в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^6)$ и совпадают. Тогда из (3.1) очевидно следует, что резольвента удовлетворяет (2.9). Ее свойства по отношению к переменным q наследуют соответствующие свойства резольвенты $M_1(q)$. В частности, $M(q)$ — непрерывная функция от q , когда $q \neq 0$ и $q_2 \neq 0$.

Как уже отмечалось, для исследования свойств резольвенты мы используем тождество Гильберта (2.15), которое запишем в виде

$$M(q') - M(q) = M(q')L_1(q')(M_1(q') - M_1(q))L_1(q)M(q), \quad (3.2)$$

так что для производных хэт-ядра (2.3) резольвенты мы получаем

$$\frac{\partial \widehat{M}(q)}{\partial q_j} = \widehat{M}(q) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \frac{\partial \widehat{M}_1(q)}{\partial q_j} \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \widehat{M}(q), \quad j = 1, 2, \quad q_2 \neq 0.$$

Используя в правой части этого равенства производную (2.33), мы приходим к равенствам

$$\frac{\partial \widehat{M}(q)}{\partial q_1} = \frac{i}{\pi} \int_{\mathbf{k}_{\Im} = q_1} d\mathbf{k}_{\Re} \bar{\mathbf{k}} \delta(\ell_{2\Im}(\mathbf{k}) - q_2) t(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) \otimes \Psi(\mathbf{k}), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \widehat{M}(q)}{\partial q_2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{k}_{\Im} = q_1} d\mathbf{k}_{\Re} \delta(\ell_{2\Im}(\mathbf{k}) - q_2) t(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}) \otimes \Psi(\mathbf{k}), \quad (3.4)$$

см. (2.11), справедливым при $q_2 \neq 0$, где мы положили

$$\Phi(x, \mathbf{k}) = \int dx' (\mathcal{L}_1^d(x', \partial_{x'}) \mathcal{G}(x, x', \mathbf{k})) \varphi(x', \mathbf{k}), \quad (3.5)$$

$$\Psi(x', \mathbf{k}) = \int dx \psi(x, \mathbf{k}) \mathcal{L}_1(x, \partial_x) \mathcal{G}(x, x', \mathbf{k}) \quad (3.6)$$

($\mathcal{L}_1^d$ — оператор, дуальный к $\mathcal{L}_1$), и где функция Грина $\mathcal{G}(x, x', \mathbf{k})$ определена как специальное значение самой резольвенты (ср. с (2.34)),

$$\mathcal{G}(x, x', \mathbf{k}) = \widehat{M}(x, x'; q)|_{q=\ell_{\Im}(\mathbf{k})} \equiv \widehat{M}(x, x'; \mathbf{k}_{\Im}, 2\mathbf{k}_{\Im} \mathbf{k}_{\Re}). \quad (3.7)$$

В дальнейшем мы рассматриваем функцию $\mathcal{G}(x, x', \mathbf{k})$ как ядро оператора $\mathcal{G}(\mathbf{k})$, а функции $\Phi(x, \mathbf{k})$ и $\Psi(x', \mathbf{k})$ — как “вектор” $\Phi(\mathbf{k})$ и “ковектор” $\Psi(\mathbf{k})$ и для краткости записываем уравнения (3.5)–(3.7), опуская зависимость от x, x' , т. е. как

$$\Phi(\mathbf{k}) = \mathcal{G}(\mathbf{k}) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi(\mathbf{k}), \quad \Psi(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k}) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}(\mathbf{k}), \quad (3.8)$$

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}) = \widehat{M}(q)|_{q=\ell_{\Im}(\mathbf{k})}. \quad (3.9)$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 - U_2$, можно проверить что $\mathcal{G}(\mathbf{k})$ действительно удовлетворяет дифференциальным уравнениям $\overrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{G}(\mathbf{k}) = \mathcal{G}(\mathbf{k}) \overleftarrow{\mathcal{L}} = I$, как следует из (2.9) и (2.4). Тогда по формуле (3.8) получаем $\overrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(\mathbf{k}) = 0 = \Psi(\mathbf{k}) \overleftarrow{\mathcal{L}}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$, т. е. функции $\Phi(x, \mathbf{k})$ и $\Psi(x, \mathbf{k})$, введенные в (3.5), (3.6), являются решениями Йоста, соответственно, оператора (1.2) и дуального к нему. Заметим, что эти определения уже не нуждаются ни в какой регуляризации типа (2.40), (2.41).

Резольвента $M(q)$, как и $M_1(q)$, разрывна при $q = 0$ и $q_2 = 0$. В случае, когда сначала выполняется предельный переход $q_1 \rightarrow 0$, мы вводим по аналогии с (2.45) опережающую и запаздывающую функции Грина посредством соотношений

$$\mathcal{G}_{\pm}(x, x') = \lim_{q_2 \rightarrow \pm 0} \lim_{q_1 \rightarrow 0} \widehat{M}(x, x'; q). \quad (3.10)$$

С другой стороны, если $q_1 \neq 0$, то по (3.9) предельные значения резольвенты выражаются (ср. (2.43)) через предельные значения функции Грина на мнимой оси:

$$\lim_{q_2 \rightarrow \pm 0} (\widehat{M}(q)|_{q_1=\mathbf{k}_{\Im}}) = \mathcal{G}(\pm 0 + i\mathbf{k}_{\Im}). \quad (3.11)$$

3.2. Скачок функции Грина на мнимой оси. В силу (3.1) и определения (3.9) функция Грина удовлетворяет интегральным уравнениям

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{k}) + \mathcal{G}_1(\mathbf{k}) U_2 \mathcal{G}(\mathbf{k}), \quad \mathcal{G}(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{k}) + \mathcal{G}(\mathbf{k}) U_2 \mathcal{G}_1(\mathbf{k}) \quad (3.12)$$

и свойству сопряжения

$$\overline{\mathcal{G}(x, x', \mathbf{k})} = \mathcal{G}(x', x, \bar{\mathbf{k}}). \quad (3.13)$$

Свойства аналитичности функции Грина вытекают из свойств $\mathcal{G}_1(\mathbf{k})$ и нашего предположения о “малости” возмущения u_2 . В частности, это означает, что $\mathcal{G}(\mathbf{k})$ аналитична в области $\mathbf{k}_{\Re} \mathbf{k}_{\Im} \neq 0$, где в силу (3.3) и (3.4) удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}_{\Re}} = \frac{\operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\Im}}{2\pi i} \Phi(\mathbf{k}) \otimes \Psi(\mathbf{k}), \quad \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}_{\Im}} = \frac{\operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\Im}}{2\pi} \Phi(\mathbf{k}) \otimes \Psi(\mathbf{k}). \quad (3.14)$$

Функция Грина обладает стандартным разрывом при $\mathbf{k}_{\Im} = 0$ и дополнительным при $\mathbf{k}_{\Re} = 0$, если $|\mathbf{k}_{\Im}| < \max_j \varkappa_j$.

Для описания скачка на мнимой оси воспользуемся тождеством Гильберта (3.2), записывая его в силу (2.43), (3.11) с помощью функций Грина. Тогда благодаря (2.44) мы получаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(+0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) - \mathcal{G}(-0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) &= -\operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \sum_j t_j \theta(\varkappa_j - |\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}|) \times \\ &\times (\mathcal{G}(\pm 0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi(i\varkappa_j)) \otimes (\psi(i\varkappa_j) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}(\mp 0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где выражения в скобках понимаются в смысле (3.8). Равенство (3.15) предлагает введение функций $\Phi_j(x, \mathbf{k}_{\mathfrak{S}})$ и $\Psi_j(x, \mathbf{k}_{\mathfrak{S}})$ посредством соотношений

$$\Phi_j(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) = \mathcal{G}(+0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi(i\varkappa_j), \quad \Psi_j(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) = \psi(i\varkappa_j) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}(+0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}). \quad (3.16)$$

Теперь из (3.15) (нижний знак) мы выводим для этого разрыва следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(+0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) - \mathcal{G}(-0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) &= \\ &= -\sum_{l,m} \theta(\varkappa_l - |\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}|) \Phi_l(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) (A(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})^{-1})_{lm} \otimes \Psi_m(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $A(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})$ – матрица с элементами

$$\begin{aligned} A_{lm}(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) &= \frac{\delta_{lm}}{t_l \operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\mathfrak{S}}} - \theta(\min\{\varkappa_l, \varkappa_m\} - |\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}|) \times \\ &\times (\psi(i\varkappa_l) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}(+0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi(i\varkappa_m)), \end{aligned} \quad (3.18)$$

и где “математическое ожидание” (последний множитель в (3.18)) равно

$$\int dx \int dx' \psi(x, i\varkappa_l) \varphi(x', i\varkappa_m) \mathcal{L}_1(x, \partial_x) \mathcal{L}_1^d(x', \partial'_x) \mathcal{G}(x, x', +0 + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})$$

(ср. обозначения (3.8)) и является функцией только от $\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}$.

В предположении однозначной разрешимости интегрального уравнения для функции Грина матрица $A(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})$ несингулярна, а в силу (2.27) и (3.13) легко видеть, что

$$A(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})^{\dagger} = B A(-\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) B^{-1}, \quad (3.19)$$

где мы ввели диагональную матрицу $B = \operatorname{diag}\{b_1, \dots, b_N\}$. Заметим, что B – эрмитова матрица, поскольку b_j в (2.26) вещественны.

3.3. Скачок решений Ёоста на мнимой оси. Решения Ёоста $\Phi(x, \mathbf{k})$ и $\Psi(x, \mathbf{k})$, введенные в (3.8), удовлетворяют в силу (3.12) интегральным уравнениям

$$\Phi(\mathbf{k}) = \varphi(\mathbf{k}) + \mathcal{G}_1(\mathbf{k})U_2\Phi(\mathbf{k}), \quad \Psi(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k}) + \Psi(\mathbf{k})U_2\mathcal{G}_1(\mathbf{k}), \quad (3.20)$$

причем благодаря (3.8) и (3.13)

$$\overline{\Phi(x, \mathbf{k})} = \Psi(x, \overline{\mathbf{k}}). \quad (3.21)$$

В силу свойств функции Грина $\mathcal{G}(\mathbf{k})$ решения Ёоста являются аналитическими функциями переменной $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$, если $\mathbf{k}_{\Re}\mathbf{k}_{\Im} \neq 0$, и в ситуации общего положения имеют стандартный разрыв на вещественной оси $\mathbf{k}_{\Im} = 0$ и дополнительный разрыв на отрезке $\mathbf{k}_{\Re} = 0$, $|\mathbf{k}_{\Im}| \leq \max_j \varkappa_j$, мнимой оси. Принимая во внимание, что функции $\varphi(\mathbf{k})$ и $\psi(\mathbf{k})$ непрерывны при $\mathbf{k}_{\Re} = 0$ и применяя к (3.15) операцию $\overleftarrow{\mathcal{L}}_1\varphi(i\mathbf{k}_{\Im})$, из (3.8) для этого скачка мы получаем

$$\Phi(x, +0 + i\mathbf{k}_{\Im}) - \Phi(x, -0 + i\mathbf{k}_{\Im}) = \sum_l \theta(\varkappa_l - |\mathbf{k}_{\Im}|) \Phi_l(x, \mathbf{k}_{\Im}) w_l(\mathbf{k}_{\Im}), \quad (3.22)$$

где мы ввели функции

$$w_l(\mathbf{k}_{\Im}) \equiv t_l \operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\Im} (\psi(i\varkappa_l) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}(-0 + i\mathbf{k}_{\Im}) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi(i\mathbf{k}_{\Im})), \quad (3.23)$$

а выражения в скобках понимаются, как в (3.18). Функции $w_l(\mathbf{k}_{\Im})$ являются спектральными данными, описывающими скачок решения Ёоста на мнимой оси. Аналогичное соотношение для дуального решения $\Psi(x, \mathbf{k})$ можно получить из свойств сопряжения (3.21) и условий

$$\overline{\Phi_j(x, \mathbf{k}_{\Im})} = b_j \Psi_j(x, -\mathbf{k}_{\Im}), \quad \overline{\Psi_j(x, \mathbf{k}_{\Im})} = \frac{\Phi_j(x, -\mathbf{k}_{\Im})}{b_j}, \quad (3.24)$$

которые, в свою очередь, следуют из (2.27) и (3.13). Итак, по формуле (3.22) скачок решения Ёоста на мнимой оси выражается через введенные в (3.16) функции $\Phi_l(x, \mathbf{k}_{\Im})$, $\Psi_l(x, \mathbf{k}_{\Im})$. Мы доказываем, что они, как и решения Ёоста, удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\overrightarrow{\mathcal{L}}\Phi_l(\mathbf{k}_{\Im}) = \Psi_l(\mathbf{k}_{\Im})\overleftarrow{\mathcal{L}} = 0$. Эти функции являются обобщениями $\varphi(i\varkappa_l)$ и $\psi(i\varkappa_l)$ на случай $u_2 \neq 0$. При этом в отличие от последних $\Phi_l(x, \mathbf{k}_{\Im})$ и $\Psi_l(x, \mathbf{k}_{\Im})$ не совпадают с решениями Ёоста в некоторых точках и нетривиально зависят от $\mathbf{k}_{\Im}$. Учитывая (3.15), замечаем, что эти функции требуются нам лишь на интервале $|\mathbf{k}_{\Im}| < \varkappa_l$. В дальнейшем мы называем их вспомогательными решениями Ёоста. Как следует из свойств полной функции Грина, эти решения разрывны при $\mathbf{k}_{\Im} = 0$.

3.4. Поведение функции Грина, решений Йоста и спектральных данных в точках $\pm i\kappa_j$. В (2.38) было показано, что $\mathcal{G}_1(\mathbf{k})$ имеет логарифмические особенности во всех точках $\mathbf{k} = \pm i\kappa_j$, $j = 1, \dots, N$. Рассмотрим, как эти особенности влияют на свойства полной функции Грина $\mathcal{G}(\mathbf{k})$ и построенных по ней объектов. Выберем некоторое κ_j и предположим, что $\mathbf{k}$ принадлежит таким окрестностям точек $\pm i\kappa_j$, которые не включают других точек $\pm i\kappa_l$, $l \neq j$, или точек на вещественной оси. Введем функцию

$$\mathcal{G}_{1,j}(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_1(\mathbf{k}) - \gamma_j(\mathbf{k})\varphi(\mathbf{k}) \otimes \psi(\mathbf{k}), \quad (3.25)$$

которая по формуле (2.38) конечна в указанных окрестностях точек $\pm i\kappa_j$, но, возможно, разрывна в соответствии с (2.44). Этот недостаток регуляризации (3.25) по сравнению с регуляризацией $\mathcal{G}_{1,\text{reg}}(\mathbf{k})$ в (2.38) компенсируется тем фактом, что произведение $e^{i\ell(\mathbf{k})(x-x')}\mathcal{G}_{1,j}(x, x', \mathbf{k})$ ограничено на x -плоскости. Определим теперь новую функцию Грина нестационарного уравнения Шредингера с потенциалом (1.3) посредством интегрального уравнения $\mathcal{G}_j(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_{1,j}(\mathbf{k}) + \mathcal{G}_{1,j}(\mathbf{k})U_2\mathcal{G}_j(\mathbf{k})$ или дуального к нему. Тогда $\mathcal{G}_j(\mathbf{k})$ – регуляризация $\mathcal{G}(\mathbf{k})$ в окрестностях $\pm i\kappa_j$ такая, что

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_j(\mathbf{k}) + \gamma_j(\mathbf{k})\tilde{\Phi}_j(\mathbf{k}) \otimes \Psi(\mathbf{k}), \quad (3.26)$$

где мы используем обозначения (3.8) для решений Йоста и аналогично вводим

$$\tilde{\Phi}_j(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_j(\mathbf{k})\overleftarrow{\mathcal{L}}_1\varphi(\mathbf{k}), \quad \tilde{\Psi}_j(\mathbf{k}) = \psi(\mathbf{k})\overrightarrow{\mathcal{L}}_1\mathcal{G}_j(\mathbf{k}). \quad (3.27)$$

Функции $\tilde{\Phi}_j(\mathbf{k})$ и $\tilde{\Psi}_j(\mathbf{k})$ также являются решениями нестационарного уравнения Шредингера и дуального к нему, соответственно. Эти функции ограничены в окрестностях точек $\pm i\kappa_j$, но могут быть разрывны в этих окрестностях. Те же свойства выполняются и для функций

$$g_j(\mathbf{k}) = (\psi(\mathbf{k})\overrightarrow{\mathcal{L}}_1\mathcal{G}_j(\mathbf{k})\overleftarrow{\mathcal{L}}_1\varphi(\mathbf{k})), \quad (3.28)$$

где выражение в скобках понимается подобно “математическому ожиданию” в (3.18). Применяя $\psi(\mathbf{k})\overrightarrow{\mathcal{L}}_1$ к (3.26) слева, мы получаем по формулам (3.8) и (3.27), (3.28), что $\Psi(\mathbf{k}) = \tilde{\Psi}(\mathbf{k})(1 - \gamma_j(\mathbf{k})g_j(\mathbf{k}))^{-1}$, так что (3.26) может быть записано как

$$\mathcal{G}(\mathbf{k}) = \mathcal{G}_j(\mathbf{k}) + \frac{\gamma_j(\mathbf{k})}{1 - \gamma_j(\mathbf{k})g_j(\mathbf{k})}\tilde{\Phi}_j(\mathbf{k}) \otimes \tilde{\Psi}_j(\mathbf{k}). \quad (3.29)$$

Теперь мы видим, что поведение функции Грина и решений Йоста в окрестностях точек $\pm i\kappa_j$ определяется поведением функций $g_j(\mathbf{k})$. Если

$$g_j(\mathbf{k}) = o(1), \quad \mathbf{k} \sim \pm i\kappa_j, \quad (3.30)$$

то функция Грина имеет логарифмические особенности в точках $\pm i\kappa_j$, а решения Йоста ограничены, но разрывны в этих точках. С другой стороны, если

$$g_j(\mathbf{k}) = O(1), \quad \mathbf{k} \sim \pm i\kappa_j, \quad (3.31)$$

и предел (также зависящий от пути предельного перехода) отличен от нуля, то

$$\Phi(\mathbf{k}) = o(1), \quad \Psi(\mathbf{k}) = o(1), \quad \mathbf{k} \sim \pm i\kappa_j, \quad (3.32)$$

более точно, в правых частях мы имеем порядок $1/\ln(|\mathbf{k} \mp i\kappa_j|)$.

В дальнейшем мы полагаем, что условие (3.31) выполняется для всех $j = 1, \dots, N$ (имеется только одно условие для каждого j , поскольку по формулам (2.20) и (3.13) $\overline{g_j(\mathbf{k})} = g_j(\overline{\mathbf{k}})$). В частности, при таком условии

$$\Phi_j(\pm\kappa_j) = \Psi_j(\pm\kappa_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (3.33)$$

в то время как значения $\Phi_m(\pm\kappa_j)$ и $\Psi_m(\pm\kappa_j)$ вспомогательных решений для m таких, что $\kappa_m > \kappa_l$, конечны и отличны от нуля, и

$$\psi(i\kappa_j) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \Phi_m(\pm\kappa_j) = 0, \quad \Psi_m(\pm\kappa_j) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi(i\kappa_j) = 0. \quad (3.34)$$

При условии (3.31) матричные элементы $A_{lm}(\mathbf{k}_\Im)$ имеют конечные пределы при $\mathbf{k}_\Im = \pm\kappa_j$, как следует из (3.18). В частности, с учетом (3.27) и (3.34) получаем

$$A(\pm\kappa_j)_{jm} = A(\pm\kappa_j)_{mj} = \frac{\pm\delta_{jm}}{t_j}, \quad (3.35)$$

что совпадает со значениями $A_{jm}(\mathbf{k}_\Im)$ и $A_{mj}(\mathbf{k}_\Im)$ при $\mathbf{k}_\Im > \min\{\kappa_j, \kappa_m\}$. Наконец, используя (3.23), можно доказать, что при условии (3.31)

$$w_l(\pm\kappa_j)_{jm} = 0 \quad \text{для всех } j \text{ и } l: \kappa_j \leq \kappa_l. \quad (3.36)$$

Выведенные свойства решений Йоста и спектральных данных позволяют восстановить вспомогательные решения Йоста из граничных значений самих решений Йоста. Действительно, интегрируя (3.14) при $\mathbf{k}_\Re = \pm 0$ и используя обозначения (2.42) для предельного значения полной функции Грина на вещественной оси, мы получаем

$$\mathcal{G}(\pm 0 + i\mathbf{k}_\Im) = \mathcal{G}^\sigma(\pm 0) + \frac{\text{sgn } \mathbf{k}_\Im}{2\pi} \int_0^{\mathbf{k}_\Im} d\alpha \, t(i\alpha) \Phi(\pm 0 + i\alpha) \otimes \Psi(\pm 0 + i\alpha), \quad (3.37)$$

где $\sigma = \text{sgn } \mathbf{k}_\Im$. Тем же способом в силу равенств (3.16), (3.18), (3.23) и (3.33) мы находим в области $|\mathbf{k}_\Im| < \kappa_j$, что

$$\Phi_j(\mathbf{k}_\Im) = \frac{\text{sgn } \mathbf{k}_\Im}{2\pi} \int_{\kappa_j \text{sgn } \mathbf{k}_\Im}^{\mathbf{k}_\Im} d\alpha \, t(i\alpha) \Phi(+0 + i\alpha) \sum_l b_l \overline{w_l(-\alpha)} A_{lj}(\alpha). \quad (3.38)$$

Это выражение обобщает одномерные соотношения (2.27). Так же из равенств (3.14), (3.18), (3.23) и (3.35) получаем

$$\begin{aligned} (A^{-1}(\mathbf{k}_\Im))_{jm} &= t_m \text{sgn } \mathbf{k}_\Im \delta_{jm} + \theta(\min\{\kappa_m, \kappa_j\} - |\mathbf{k}_\Im|) \frac{\text{sgn } \mathbf{k}_\Im}{2\pi} b_m \times \\ &\times \int_{\min\{\kappa_m, \kappa_j\} \text{sgn } \mathbf{k}_\Im}^{\mathbf{k}_\Im} d\alpha \, t(i\alpha) w_j(\alpha) \overline{w_m(-\alpha)}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

что выражает спектральные данные $A_{mj}(\mathbf{k}_\Im)$ через $w_j(\mathbf{k}_\Im)$. Непосредственно проверяется, что описанные выше свойства решений Йоста и спектральных данных совместны с представлениями (3.38) и (3.39).

3.5. Билинейное представление для резольвенты и соотношения между функциями Грина. Пусть $q_1 \neq 0$. Производная $\widehat{M}(q)$ по q_2 при $q_2 \neq 0$ дана в (3.4), а скачок при $q_2 = 0$ следует из (3.11) и (3.17). Эти равенства позволяют нам восстановить хэт-ядро $\widehat{M}(x, x'; q)$ резольвенты с точностью до не зависящего от q_2 слагаемого. Это слагаемое фиксируется условием, что ядро $M(x, x'; q)$ (определенное по формуле (2.3)) принадлежит $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^6)$. Опуская детали этой конструкции (см. [7]), мы приведем здесь окончательное выражение:

$$\begin{aligned} \widehat{M}(x, x'; q) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}=q_1} d\mathbf{k}_{\mathfrak{R}} [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(2\mathbf{k}_{\mathfrak{R}}\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} - q_2)] t(\mathbf{k}) \Phi(x, \mathbf{k}) \Psi(x', \mathbf{k}) - \\ & - \operatorname{sgn} q_1 [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(-q_2)] \sum_{l,m} \theta(\min\{\varkappa_l, \varkappa_m\} - |q_1|) (A(q_1)^{-1})_{lm} \times \\ & \times \Phi_l(x, q_1) \Psi_m(x', q_1), \end{aligned} \quad (3.40)$$

которое дает билинейное представление резольвенты в терминах решений Йоста. Заметим, что в силу ограниченности ядра $M(x, x'; q)$ по q и его непрерывности по q_1 при $q_2 \neq 0$ представление (3.40) справедливо при всех q .

Это билинейное представление для резольвенты приводит с учетом (3.7) к следующему билинейному представлению для функции Грина:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, x', \mathbf{k}) = & \int \frac{dk'}{2\pi i} [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}k')] t(k' + \mathbf{k}) \Phi(x, k' + \mathbf{k}) \Psi(x', k' + \mathbf{k}) - \\ & - \operatorname{sgn} \mathbf{k}_{\mathfrak{S}} [\theta(x_2 - x'_2) - \theta(-\mathbf{k}_{\mathfrak{R}}\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})] \times \\ & \times \sum_{l,m} \theta(\min\{\varkappa_l, \varkappa_m\} - |\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}|) (A(\mathbf{k}_{\mathfrak{S}})^{-1})_{lm} \Phi_l(x, \mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) \Psi_m(x', \mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \end{aligned} \quad (3.41)$$

обобщающему (2.35). Более того, благодаря (3.10) билинейное представление (3.40) дает представление для опережающей и запаздывающей функций Грина также в терминах решений Йоста:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\pm}(x, x') = & \pm \theta(\pm(x_2 - x'_2)) \left(\frac{1}{2\pi i} \int dk t^{\sigma}(k) \Phi^{\sigma}(x, k) \Psi^{\sigma}(x', k) - \right. \\ & \left. - \sigma \sum_{l,m} (A^{\sigma})_{lm}^{-1} \Phi_l^{\sigma}(x) \Psi_m^{\sigma}(x') \right), \end{aligned} \quad (3.42)$$

где $\sigma = +, -$, и по аналогии с (2.42) мы ввели обозначения ($k \in \mathbb{R}$)

$$\Phi^{\pm}(x, k) = \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} \Phi(x, k + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \quad \Psi^{\pm}(x) = \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} \Psi(x, k + i\mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \quad (3.43)$$

$$\Phi_l^{\pm}(x) = \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} \Phi_l(x, \mathbf{k}_{\mathfrak{S}}), \quad \Psi_l^{\pm}(x) = \lim_{\mathbf{k}_{\mathfrak{S}} \rightarrow \pm 0} \Psi_l(x, \mathbf{k}_{\mathfrak{S}}) \quad (3.44)$$

для значений решений Йоста на вещественной оси. Благодаря (3.21) и (3.24) эти предельные значения удовлетворяют следующим свойствам сопряжения:

$$\overline{\Phi^{\pm}(x, k)} = \Psi^{\mp}(x, k), \quad \overline{\Phi_l^{\pm}(x)} = b_l \Psi_l^{\mp}(x), \quad k \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, N. \quad (3.45)$$

Отметим здесь без доказательства, что левая часть равенства (3.42) не зависит от σ .

Непосредственно проверяется, что функции $\mathcal{G}_\pm$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\overrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{G}_\pm = \mathcal{G}_\pm \overleftarrow{\mathcal{L}} = I$, свойству сопряжения

$$\overline{\mathcal{G}_\pm(x, x')} = \mathcal{G}_\mp(x', x) \quad (3.46)$$

и интегральным уравнениям $\mathcal{G}_\pm = \mathcal{G}_{1,\pm} + \mathcal{G}_{1,\pm} U_2 \mathcal{G}_\pm$ и дуальным к ним.

Обычные и вспомогательные опережающие/запаздывающие решения определяются (ср. с (3.8), (3.16)) как

$$\Phi_\pm(k) = \mathcal{G}_\pm \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi_\pm(k), \quad \Phi_{\pm,j} = \mathcal{G}_\pm \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi(i\kappa_j), \quad (3.47)$$

$$\Psi_\pm(k) = \psi_\pm(k) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}_\pm, \quad \Psi_{\pm,j} = \psi(i\kappa_j) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}_\pm. \quad (3.48)$$

Эти функции удовлетворяют нестационарному уравнению Шредингера с потенциалом u и свойствам сопряжения

$$\overline{\Phi_\pm(x, k)} = \Psi_\mp(x, k), \quad \overline{\Phi_{\pm,j}} = b_j \Psi_{\mp,j}. \quad (3.49)$$

Предельные значения функции Грина на вещественной оси, как следует из (3.7), также связаны с пределами $M(q)$ при $q \rightarrow 0$, отличными от (3.10). Для этих предельных значений мы используем обозначения $\mathcal{G}^\pm(k)$, как в (2.42). Поскольку правые части равенств (3.41) и (3.42) выражены через решения Йоста, то, переходя в (3.41) к пределу $\mathbf{k} \rightarrow k + i\sigma 0$, по формулам (3.43) и (3.44) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\sigma(k) - \mathcal{G}_\pm &= \frac{\mp 1}{2\pi i} \int dk' \theta(\pm\sigma(k' - k)) t^\sigma(k') \Phi^\sigma(k') \otimes \Psi^\sigma(k') \pm \\ &\pm \sigma \theta(\mp\sigma k) \sum_{l,m} (A^\sigma)_{lm}^{-1} \Phi_l^\sigma \otimes \Psi_m^\sigma. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Другое выражение для этой разности следует из тождества Гильберта (3.2). Для этого мы используем (3.7) (снова в пределе $\mathbf{k} \rightarrow k + i\sigma 0$) и соотношения (3.14), (2.49) и (2.50). Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^\sigma(k) - \mathcal{G}_\pm &= \frac{\mp 1}{2\pi i} \int d\alpha \theta(\pm\sigma(\alpha - k)) \int dp \Phi_\pm(p) r_\pm^\sigma(p, \alpha) \otimes \psi^\sigma(\alpha) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}^\sigma(k) \pm \\ &\pm \theta(\mp\sigma k) \sum_j t_j \Phi_{\pm,j} \otimes \psi(i\kappa_j) \overrightarrow{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}^\sigma(k), \end{aligned} \quad (3.51)$$

где $r_\pm^\sigma$ определено в (2.51).

3.6. Спектральные данные. В последнем равенстве разность функций Грина определяется через опережающие и запаздывающие решения, что непосредственно приводит к выражению решения Йоста через опережающее и запаздывающее решения. Действительно, в силу определений (3.8), (3.16) (в предельном случае (3.43), (3.44)) и равенств (3.47), (3.48) мы получаем

$$t^\sigma(k)\Phi^\sigma(k) = \int dp \Phi_\pm(p)\mathcal{R}_\pm^\sigma(p, k) + \sum_j \Phi_{\pm,j}\mathcal{R}_{\pm,j}^\sigma(k), \quad \sigma = +, -, \quad (3.52)$$

$$\Phi_m^\sigma = \int dp \Phi_\pm(p)\hat{\mathcal{R}}_{\pm,m}^\sigma(p) + \theta(\pm\sigma)\Phi_{\pm,m} \mp \theta(\mp\sigma) \sum_j t_j \Phi_{\pm,j} A_{jm}^\sigma, \quad (3.53)$$

где в последней строке мы воспользовались (3.18) в пределе $\mathbf{k}_\Sigma \rightarrow \sigma 0$. Кроме того, мы ввели спектральные данные $\mathcal{R}_\pm^\sigma$, $\mathcal{R}_{\pm,j}^\sigma$ и $\hat{\mathcal{R}}_{\pm,m}^\sigma$ как

$$\mathcal{R}_\pm^\sigma(p, k) = \int d\alpha r_\pm^\sigma(p, \alpha) R_\pm^\sigma(\alpha, k), \quad (3.54)$$

где $R_\pm^\sigma$ — треугольный оператор, $R_\pm^\sigma(p, k) = \delta(p - k) \mp \theta(\pm\sigma(p - k))R^\sigma(p, k)$,

$$R^\sigma(p, k) = \frac{t^\sigma(k)}{2\pi i} (\psi^\sigma(p) \vec{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}^\sigma(k) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi^\sigma(k)), \quad (3.55)$$

и выражение в скобках снова понимается, как в формуле (3.18). Далее, $\mathcal{R}_{\pm,j}^\sigma(k) = \pm\theta(\mp\sigma k)\mathcal{R}_j^\sigma(k)$, где

$$\mathcal{R}_j^\sigma(k) = t_j t^\sigma(k) (\psi(i\kappa_j) \vec{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}^\sigma(k) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi^\sigma(k)), \quad (3.56)$$

и

$$\hat{\mathcal{R}}_{\pm,m}^\sigma(p) = \int d\alpha r_\pm^\sigma(p, \alpha) \hat{R}_{\pm,m}^\sigma(\alpha), \quad (3.57)$$

где $\hat{R}_{\pm,m}^\sigma(k) = \mp\theta(\pm\sigma k)\hat{R}_m^\sigma(k)$,

$$\hat{R}_m^\sigma(k) = \frac{1}{2\pi i} (\psi^\sigma(k) \vec{\mathcal{L}}_1 \mathcal{G}^\sigma(+0) \overleftarrow{\mathcal{L}}_1 \varphi^\sigma(i\kappa_m)). \quad (3.58)$$

Обратные соотношения, которые выражают опережающее и запаздывающее решения через решение Йоста, получаются аналогично, но путем редукции равенства (3.50). Благодаря введенным выше определениям спектральных данных мы находим

$$\Phi_\pm(k) = \int dk' \Phi^\sigma(k') \overline{\mathcal{R}_\pm^{-\sigma}(k, k')} - 2\pi i \sigma \sum_{l,m} \Phi_l^\sigma (A^\sigma)_{lm}^{-1} \frac{1}{b_m} \overline{\hat{\mathcal{R}}_{\pm,m}^{-\sigma}(k)}, \quad (3.59)$$

$$\Phi_{\pm,j} = \frac{-b_j}{2\pi i t_j} \int dk' \Phi^\sigma(k') \overline{\mathcal{R}_{\pm,j}^{-\sigma}(k')} + \theta(\pm\sigma) \Phi_j^\sigma \mp \frac{\theta(\mp\sigma)}{t_j} \sum_l \Phi_l^\sigma (A^\sigma)_{lj}^{-1}. \quad (3.60)$$

Наконец, подставляя эти равенства в (3.52), (3.53), мы получаем соотношения между предельными значениями решения Йоста на вещественной оси:

$$t^\sigma(k)\Phi^\sigma(k) = \int dp \Phi^{-\sigma}(p)\mathcal{F}^{-\sigma}(p, k) + 2\pi i\sigma \sum_{l,m} \Phi_l^{-\sigma}(A^{-\sigma})_{lm}^{-1} \frac{1}{b_m} \mathcal{F}_m^{-\sigma}(k), \quad (3.61)$$

$$\Phi_j^\sigma = \int dp \Phi^{-\sigma}(p)\hat{\mathcal{F}}_j^{-\sigma}(p) + 2\pi i\sigma \sum_{l,m} \Phi_l^{-\sigma}(A^{-\sigma})_{lm}^{-1} \frac{1}{b_m} \mathcal{F}_{mj}^{-\sigma}, \quad (3.62)$$

обобщающие (2.53). Здесь по аналогии с (2.54) мы ввели альтернативные спектральные данные

$$\mathcal{F}^{-\sigma}(k, k') = \int dk'' \overline{\mathcal{R}_\pm^\sigma(k'', k)} \mathcal{R}_\pm^\sigma(k'', k') - \sum_j \frac{b_j}{2\pi i t_j} \overline{\mathcal{R}_{\pm,j}^\sigma(k)} \mathcal{R}_{\pm,j}^\sigma(k'), \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l^{-\sigma}(k') &= -\frac{\theta(\pm\sigma)b_l}{2\pi i t_l} \mathcal{R}_{\pm,l}^\sigma(k) \pm \frac{\theta(\mp\sigma)}{2\pi i} \sum_{m=1}^N b_l A_{lm}^{-\sigma} \mathcal{R}_{\pm,m}^\sigma(k) + \\ &+ \int dk'' \overline{\hat{\mathcal{R}}_{\pm,l}^\sigma(k'')} \mathcal{R}_\pm^\sigma(k'', k'), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{F}}_j^{-\sigma}(k) &= -\frac{\theta(\pm\sigma)b_j}{2\pi i t_j} \overline{\mathcal{R}_{\pm,j}^\sigma(k)} \pm \sum_l \frac{b_l \theta(\mp\sigma)}{2\pi i} A_{lj}^\sigma \overline{\mathcal{R}_{\pm,l}^\sigma(k)} + \\ &+ \int dk' \overline{\mathcal{R}_\pm^\sigma(k', k)} \hat{\mathcal{R}}_{\pm,j}^\sigma(k'), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{lj}^{-\sigma} &= -\frac{\theta(\pm\sigma)b_l}{2\pi i t_l} \delta_{lj} + \frac{\theta(\mp\sigma)}{2\pi i} \sum_{m=0}^N b_l A_{lm}^{-\sigma} t_m A_{mj}^\sigma + \\ &+ \int dk' \overline{\hat{\mathcal{R}}_{\pm,l}^\sigma(k')} \hat{\mathcal{R}}_{\pm,j}^\sigma(k'). \end{aligned} \quad (3.66)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одним из преимуществ резольвентного подхода является существование билинейного представления (3.40), которое выражает расширенную резольвенту через решения Йоста. Сами эти решения, как и любые другие имеющие отношение к делу решения рассматриваемой задачи рассеяния и дуальной к ней, получаются как специальные редукции соответствующих функций Грина. Функции Грина, в свою очередь, являются значениями резольвенты в некоторых специальных точках. Это свойство дает нам простой и регулярный способ вывода соотношений между различными типами решений линейной задачи, а также между спектральными данными. Свойства обоих наборов ((3.54)–(3.58)) и (3.63)–(3.66)) спектральных данных заслуживают специального рассмотрения. То же самое справедливо и для характеристических уравнений для них, которые следуют из комбинации равенств (3.52), (3.53) и (3.61), (3.62), а также из независимости левой части равенств (3.63)–(3.66) от знаков $\pm$. Эти соотношения, как и формулировка обратной задачи, основанной на полученных выше результатах, будут даны в [7].

Благодарности. Данная работа выполнена при частичной поддержке PRIN 2002 ‘Sintesi’, РФФИ (грант № 02-01-00484), гранта НШ 2052.2003.1 и программы РАН “Математические методы нелинейной динамики”. А. К. Погребков благодарит своих коллег по Факультету физики Университета г. Лечче за гостеприимство.

Список литературы

- [1] Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили. ДАН СССР. 1970. Т. 192. С. 753.
- [2] В. Е. Захаров, А. Б. Шабат. Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. С. 43; В. С. Дрюма. Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 19. С. 219.
- [3] V. E. Zakharov, S. V. Manakov. Sov. Sci. Rev. – Phys. Rev. 1979. V. 1. P. 133; S. V. Manakov. Physica. D. 1981. V. 3. P. 420; A. S. Fokas, M. J. Ablowitz. Stud. Appl. Math. 1983. V. 69. P. 211; M. Boiti, J. Léon, F. Pempinelli. Phys. Lett. A. 1989. V. 141. P. 96; Xin Zhou. Commun. Math. Phys. 1990. V. 128. P. 551; A. S. Fokas, L. Y. Sung. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1999. V. 125. P. 113.
- [4] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, М. К. Поливанов. ТМФ. 1992. Т. 93. С. 181; M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, M. C. Polivanov. Inverse Problems. 1992. V. 8. P. 331; M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. Inverse Problems. 1994. V. 10. P. 505; J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 4683; М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков. ТМФ. 1994. Т. 99. С. 185; M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov. Spectral theory of solitons on a generic background for the KPI equation. In: Nonlinear Physics. Theory and Experiment. Proc. of the Workshop (Lecce, Italy, 29 June – 7 July, 1995). Eds. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Singapore: World Scientific, 1996. P. 37; Inverse Problems. 1997. V. 13. P. L7; М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари. ТМФ. 1998. Т. 116. С. 3.
- [5] A. S. Fokas, A. K. Pogrebkov. Nonlinearity. 2003. V. 16. P. 771.
- [6] M. Boiti, F. Pempinelli, A. K. Pogrebkov, B. Prinari. J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 3309.
- [7] М. Бойти, Ф. Пемпинелли, А. К. Погребков, Б. Принари. Тр. МИАН. 2005 (в печати).
- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980; Ф. Калоджеро, А. Дегасперис. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1982.