Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Эстевес, Х. Прада, Решения иерархии Камассы–Холма в $(2 + 1)$ -мерном пространстве, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 295–301

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1854>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:54:14

© 2005 г.

П. Г. Эстевес*, Х. Прада†

РЕШЕНИЯ ИЕРАРХИИ КАМАССЫ–ХОЛМА В $(2 + 1)$ -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрены решения $(2 + 1)$ -мерного обобщения иерархии Камассы–Холма, включающие, в частности, известные мультипиконные решения знаменитого уравнения Камассы–Холма.

Ключевые слова: уравнение Камассы–Холма, преобразования годографа, неизоспектральные задачи.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1993 г. Камасса и Холм нашли вполне интегрируемое уравнение мелкой воды с дисперсией, а именно, уравнение

$$u_t + 2ku_x - u_{xxt} + 3uu_x - 2u_xu_{xx} + uu_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

где u — скорость жидкости в направлении x , а k — постоянная, связанная с критической волновой скоростью в приближении мелкой воды [1]. Особое внимание в работе [2] было уделено предельному случаю $k = 0$, поскольку он представляет интерес с математической точки зрения. Поиск решений в виде $u(x, t) = U(x - ct)$ (где U — функция, обращающаяся на бесконечности в нуль вместе со своими первой и второй производными) показал, что

$$U = ce^{-|x-ct|} + O(k \ln k). \quad (1.2)$$

Форма решения (1.2) в виде бегущей волны привела Камассу и Холма к построению известного анзаца для решений уравнения Камассы–Холма (КХ), представляющих собой N взаимодействующих пиков.

С этого времени пиконные решения (остроконечные солитонные решения) привлекли большое внимание. Например, в 1994 г. Альбер, Камасса, Холм и Марсден [3] исследовали геометрию остроконечных солитонов для общего уравнения КХ, т.е. уравнения (1.1) без дополнительного условия $k = 0$. Существование преобразования Лиувилля, переводящего спектральную задачу КХ в задачу теории струн, позволило в 1999 г.

* Area de Fisica Teórica. Universidad de Salamanca, Salamanca 37008, Spain.

E-mail: pilar@usal.es

† Departamento de Matemáticas. Universidad de Salamanca, Salamanca 37008, Spain.

E-mail: prada@usal.es

Билсу, Саттингеру и Шмигелскому [4], используя теорему Стильеса о непрерывных дробях, получить мультипиконные решения близкого вида. Те же авторы в работе [5] исследовали взаимосвязь между мультипиконами и классической проблемой моментов. В 2000 г. Константин и Штраус [6] изучали стабильность пиконов, а Ленеллс исследовал стабильность периодических пиконов [7] и предъявил соответствующее вариационное доказательство [8].

В 2002 г. Дегасперис, Холм и Хон [9] исследовали некоторое интегрируемое уравнение, обладающее пиконными решениями; по утверждению авторов, это уравнение было получено методом асимптотической интегрируемости и имеет вид, аналогичный уравнению мелкой воды КХ. В бездисперсионном случае уравнение было записано в виде

$$u_t - u_{xxt} + 4uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (1.3)$$

и доказано, что его решением является одиночный пикон

$$u(x, t) = ce^{-|x-ct|}. \quad (1.4)$$

Авторы рассмотрели также семейство уравнений

$$u_t - u_{xxt} + (b+1)uu_x = bu_x u_{xx} + uu_{xxx} \quad (1.5)$$

с вещественным параметром b , включающее как уравнение КХ ($b = 2$), так и уравнение (1.3) ($b = 3$) в качестве частных случаев [10]. Оказалось, что все уравнения семейства обладают мультипиконными решениями и отвечают некоторой динамической системе, которая принимает гамильтонову форму только в случае $b = 2$. Хон и Вонг [11] выделили пиконные уравнения с помощью алгебраического метода продолжения Уолквиста–Эстабрука. В работе [12] было показано, что спектральная задача КХ дает две различные интегрируемые иерархии нелинейных эволюционных уравнений: одна является иерархией КХ отрицательного порядка, другая – иерархией КХ положительного порядка. Кроме того, было установлено, что знаменитое уравнение КХ содержится в иерархии КХ отрицательного порядка, а уравнение типа Дима – в иерархии КХ положительного порядка. Решениям иерархии КХ было посвящено много работ, например [13].

В разделе 2 настоящей работы рассматривается обобщение иерархии КХ на случай размерности $(2+1)$ [14], [15]. По примеру Камассы и Холма мы строим анзац для поиска некоторых мультипиконных решений различных уравнений иерархии и представляем получающуюся в результате динамическую систему. Эта система, естественно, является системой дифференциальных уравнений в частных производных, и поэтому содержит уравнения разного типа; некоторые уравнения включают производные по переменной y , другие задают рекуррентные соотношения и, наконец, имеются эволюционные уравнения. В разделе 3 представлены примеры динамических систем в некоторых частных случаях. В заключительном разделе приведены соответствующие выводы.

2. ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ИЕРАРХИЯ КАМАССЫ–ХОЛМА В РАЗМЕРНОСТИ $(2 + 1)$

Рассмотрим известную отрицательную иерархию Камассы–Холма (ОИКХ) [12] для поля $u(x, t)$, т.е. уравнение

$$u_t = R^{-n}u_x, \quad R = J_0J_1^{-1}, \quad (2.1)$$

где $n \geq 1$ (порядок иерархии) – некоторое целое число, а J_0, J_1 – следующие операторы:

$$J_0 = \partial^3 - \partial, \quad J_1 = u\partial + \partial u, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Введение n функций $v_1(x, t), \dots, v_n(x, t)$ (как в работе [15]) таких, что

$$\begin{aligned} v_1 &= J_0^{-1}u_x \Rightarrow J_0v_1 = u_x, \\ v_k &= J_0^{-1}J_1v_{k-1} \Rightarrow J_0v_k = J_1v_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (2.3)$$

позволяет записать уравнение (2.1) в виде

$$u_t = J_1v_n, \quad (2.4)$$

и, следовательно, ОИКХ может рассматриваться как система из $(n+1)$ уравнения (2.3), (2.4) на $(n+1)$ поле $u, v_1, \dots, v_n$.

В случае $n = 1$ система (2.3), (2.4) сводится, очевидно, к известному уравнению КХ [1].

2.1. Обобщение на размерность 3. Как показано в работе [15], простым обобщением системы (2.3), (2.4) на случай размерности 3 является следующая система:

$$\begin{aligned} U_y &= J_0V_1, \\ J_0V_k &= J_1V_{k-1}, \quad k = 2, \dots, n, \\ U_t &= J_1V_n, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $U = U(x, t, y)$ и $V_j = V_j(x, t, y)$, которая может быть записана как

$$U_t = R^{-n}U_y. \quad (2.6)$$

Эта система определяется иерархией КХ в размерности $(2 + 1)$. Очевидно, что ОИКХ (2.1) получается из уравнения (2.6) с помощью редукции $\partial/\partial y = \partial/\partial x$.

2.2. Решения отрицательной иерархии Камассы–Холма в размерности $(2 + 1)$. Для ОИКХ в размерности $(2 + 1)$ сделаем теперь следующую подстановку:

$$V_k(x, y, t) = \sum_{i=1}^N A_i^{(k)}(y, t) \partial^{-1} (e^{-|x - q_i(y, t)|}) + \\ + \sum_{i=1}^N B_i^{(k)}(y, t) e^{-|x - q_i(y, t)|}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (2.7)$$

где $A_i^{(1)}(y, t) = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$, т. е.

$$V_1(x, y, t) = \sum_{i=1}^N B_i^{(1)}(y, t) e^{-|x - q_i(y, t)|} \quad (2.8)$$

есть мультипликативное решение, и в соответствии с (2.5)

$$U(x, y, t) = -2 \sum_{i=1}^N \gamma_i(y, t) \delta(x - q_i(y, t)). \quad (2.9)$$

Таким образом, как и для уравнений КХ, пики поля V_1 суть дельта-функции поля U .

Подстановка формул (2.7) и (2.9) в систему (2.5) дает в результате систему явного вида. Среди уравнений, входящих в полученную систему, выделим три различных группы: во-первых, $2N$ уравнений, включающих производные по переменной y ; во-вторых, рекуррентные соотношения и, наконец, эволюционные уравнения. Итак, соответственно имеем

$$\frac{\partial \gamma_i(y, t)}{\partial y} = 0, \\ \gamma_i(y, t) \frac{\partial q_i(y, t)}{\partial y} = -B_i^{(1)}(y, t), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.10)$$

$$A_i^{(k)}(y, t) = \sum_{j=1}^N \gamma_i(y, t) A_j^{(k-1)}(y, t) e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|} - \\ - \sum_{j=1}^N \gamma_i(y, t) B_j^{(k-1)}(y, t) e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|} \operatorname{sgn}(q_i(y, t) - q_j(y, t)), \\ B_i^{(k)}(y, t) = - \sum_{j=1}^N \gamma_i(y, t) A_j^{(k-1)}(y, t) (e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|} - 1) \operatorname{sgn}(q_i(y, t) - q_j(y, t)) + \\ + \sum_{j=1}^N \gamma_i(y, t) B_j^{(k-1)}(y, t) e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|}, \quad k = 2, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \gamma_i(y, t)}{\partial t} &= \gamma_i(y, t) \sum_{j=1}^N A_j^n(y, t) e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|} - \\
&\quad - \gamma_i(y, t) \sum_{j=1}^N B_j^n(y, t) e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|} \operatorname{sgn}(q_i(y, t) - q_j(y, t)), \\
\frac{\partial q_i(y, t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^N A_j^n(y, t) (e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|} - 1) \operatorname{sgn}(q_i(y, t) - q_j(y, t)) - \\
&\quad - \sum_{j=1}^N B_j^n(y, t) e^{-|q_i(y, t) - q_j(y, t)|}, \quad i = 1, 2, \dots, N.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

3. ПРИМЕРЫ В РАЗМЕРНОСТИ $(2 + 1)$

3.1. Случай $n = 1$ и $N = 1$. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}
U_y &= (V_1)_{xxx} - (V_1)_x, \\
U_t &= 2U(V_1)_x + U_x V_1,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

которая соответствует выбору $n = 1$ в иерархии (2.5). Для $N = 1$, т.е. для

$$\begin{aligned}
V_1(x, y, t) &= p(y, t) e^{-|x - q(y, t)|}, \\
U(x, y, t) &= -2\gamma(y, t) \delta(x - q(y, t)),
\end{aligned} \tag{3.2}$$

получается, что

$$\begin{aligned}
\gamma(y, t) &= \gamma_0, \\
\frac{\partial q(y, t)}{\partial t} &= \gamma_0 \left(\frac{\partial q(y, t)}{\partial y} \right),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

т.е. $q(y, t) = F(y + \gamma_0 t)$, таким образом,

$$\begin{aligned}
V_1(x, y, t) &= -\frac{\partial q(y, t)}{\partial t} e^{-|x - q(y, t)|}, \\
U(x, y, t) &= -2\gamma_0 \delta(x - q(y, t)).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Если предположить, что $q(y, t) = y + \gamma_0 t$, то пиконное решение предыдущей системы дается формулами

$$\begin{aligned}
V_1(x, y, t) &= \gamma_0 e^{-|x - y - \gamma_0 t|}, \\
U(x, y, t) &= -2\gamma_0 \delta(x - y - \gamma_0 t).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2. Случай $n = 1$ и $N = 2$. Двухсолитонная динамика. Рассмотрим систему (3.1) и положим

$$\begin{aligned}
V_1(x, y, t) &= p_1(y, t) e^{-|x - q_1(y, t)|} + p_2(y, t) e^{-|x - q_2(y, t)|}, \\
U(x, y, t) &= -2\gamma_1(y, t) \delta(x - q_1(y, t)) - 2\gamma_2(y, t) \delta(x - q_2(y, t)).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Подстановка этих функций в (3.1) дает динамическую систему для двухсолитонного случая, из которой следует, что функции γ_1 и γ_2 не зависят от переменной y . Если ввести обозначения

$$F(t) = p_2(y, t)e^{|q_1(y, t) - q_2(y, t)|} \operatorname{sgn}(q_1(y, t) - q_2(y, t)), \quad (3.7)$$

$$G(t) = p_1(y, t)e^{|q_2(y, t) - q_1(y, t)|} \operatorname{sgn}(q_2(y, t) - q_1(y, t)), \quad (3.8)$$

то

$$\ln \gamma_1(t) = - \int F(t) dt, \quad \ln \gamma_2(t) = - \int G(t) dt, \quad (3.9)$$

и таким образом,

$$U(y, t) = -2e^{-\int F(t) dt} \delta(x - q_1(y, t)) - 2e^{-\int G(t) dt} \delta(x - q_2(y, t)), \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1(y, t)}{\partial y} &= -e^{\int F(t) dt} p_1(y, t), & \frac{\partial q_2(y, t)}{\partial y} &= -e^{\int G(t) dt} p_2(y, t), \\ \frac{\partial q_1(y, t)}{\partial t} &= -p_1(y, t) - p_2(y, t)e^{-|q_1(y, t) - q_2(y, t)|}, \\ \frac{\partial q_2(y, t)}{\partial t} &= -p_1(y, t)e^{-|q_2(y, t) - q_1(y, t)|} - p_2(y, t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.3. Случай $n = 2$ и $N = 1$. Выбирая для системы

$$\begin{aligned} U_y &= (V_1)_{xxx} - (V_1)_x, \\ (V_2)_{xxx} - (V_2)_x &= 2U(V_1)_x + U_x V_1, \\ U_t &= 2U(V_2)_x + U_x V_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

поля V_1 , U , как в (3.2), и положив

$$V_2(x, y, t) = A_1^{(2)}(y, t)\delta^{-1}(e^{-|x - q(y, t)|}) + B_1^{(2)}(y, t)e^{-|x - q(y, t)|}, \quad (3.13)$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma(y, t)}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial q(y, t)}{\partial y} &= -\frac{p(y, t)}{\gamma(y, t)}, \\ A_1^{(2)}(y, t) &= 0, & B_1^{(2)}(y, t) &= \gamma(y, t)p(y, t), \\ \frac{\partial \gamma(y, t)}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial q(y, t)}{\partial t} &= -\gamma(y, t)p(y, t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma(y, t) &= \operatorname{const} = \gamma_0, \\ V_1(x, y, t) &= -\gamma_0 \frac{\partial q(y, t)}{\partial y} e^{-|x - q(y, t)|}, \\ V_2(x, y, t) &= -\frac{\partial q(y, t)}{\partial t} e^{-|x - q(y, t)|}, \\ U(x, y, t) &= -2\gamma_0 \delta(x - q(y, t)), \\ \frac{\partial}{\partial t}(q(y, t)) &= \gamma_0^2 \frac{\partial q(y, t)}{\partial y}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $q(y, t) = F(y + \gamma_0^2 t)$.

Заметим, что если в этом случае положить $q(y, t) = y + \gamma_0^2 t$, то решение последней системы будет иметь вид

$$\begin{aligned} V_1(x, y, t) &= -\gamma_0 a e^{-|x-y-\gamma_0^2 t|}, \\ V_2(x, y, t) &= -\gamma_0^2 e^{-|x-y-\gamma_0^2 t|}, \\ U(x, y, t) &= -2\gamma_0 \delta(x-y-\gamma_0^2 t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

и следовательно, обе величины V_1 и V_2 обладают пиконными решениями.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено обобщение иерархии КХ на случай размерности $(2 + 1)$ и изучены некоторые решения. Основные результаты состоят в следующем:

- 1) найдена динамическая система, выделены различные группы входящих в нее уравнений, а именно, уравнения, включающие производные по пространственной переменной y , рекуррентные соотношения и эволюционные уравнения;
- 2) проведен анализ полученной динамической системы в некоторых частных случаях, доказывающий существование пиконных решений.

Благодарности. Работа была частично поддержана DGEYC в рамках контрактов BFM2002-02609 и BFM2003-00078, а также Junta de Castilla y León в рамках контракта SA011/04.

Список литературы

- [1] *R. Camassa, D. D. Holm.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1661–1666.
- [2] *R. Camassa, D. D. Holm, J. M. Hyman.* Adv. Appl. Mech. 1994. V. 31. P. 1–33.
- [3] *M. S. Alber, R. Camassa, D. D. Holm, E. Marsden.* Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. P. 137–151.
- [4] *R. Beals, D. H. Sattinger, J. Szmigielski.* Adv. Math. 1998. V. 140. P. 190–206; Inverse Problems. 1999. V. 15. P. L1–L4.
- [5] *R. Beals, D. H. Sattinger, J. Szmigielski.* Adv. Math. 2000. V. 154. P. 229–257.
- [6] *A. Constantin, W. Strauss.* Commun. Pure Appl. Math. 2000. V. 53. P. 603–610.
- [7] *J. Lenells.* Int. Math. Res. Notices. 2004. P. 485–489.
- [8] *J. Lenells.* J. Nonlinear Math. Phys. 2004. V. 11. P. 151–163.
- [9] *А. Дегасперис, Д. Д. Холм, А. Н. И. Хон.* ТМФ. 2002. Т. 133. № 2. С. 170–183.
- [10] *C. R. Gilson, A. Pickering.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 7487–7494.
- [11] *A. N. W. Hone, J. P. Wang.* Inverse Problems. 2003. V. 19. P. 129–145.
- [12] *D. D. Holm, Z. Qiao.* The Camassa–Holm Hierarchy, related N -dimensional integrable systems, and algebro-geometric solutions on a symplectic submanifold. nlin.SI/0202009.
- [13] *F. Gesztesy, H. Holden.* Rev. Mat. Iberoamericana. 2003. V. 19. № 1. P. 74–142.
- [14] *P. A. Clarkson, P. R. Gordoa, A. Pickering.* Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 1463–1476.
- [15] *P. G. Estevez, J. Prada.* J. Phys. A. 2005. V. 38. P. 1287–1297; nlin.SI/0412019.