Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Герджиков, Г. Г. Граховски, Н. А. Костов, О многокомпонентных уравнениях типа нелинейного уравнения Шредингера на симметричных пространствах и их редукциях, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 313–323

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1856>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:57:33

© 2005 г. В. С. Герджиков*, Г. Г. Граховски*, Н. А. Костов†

О МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТИПА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА НА СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ИХ РЕДУКЦИЯХ

Исследуются фундаментальные свойства многокомпонентных моделей типа нелинейного уравнения Шредингера, связанных с симметричными пространствами. Построены новые типы редукций таких систем. Кратко описаны спектральные свойства операторов Лакса, которые, в свою очередь, определяют соответствующий рекурсионный оператор и основные свойства соответствующего класса нелинейных эволюционных уравнений. Результаты проиллюстрированы на конкретных примерах систем типа нелинейного уравнения Шредингера, связанных с симметричным пространством типа $D. III$ алгебры $so(8)$.

Ключевые слова: многокомпонентные нелинейные уравнения Шредингера, группа редукций, симметричные пространства, гамильтоновы свойства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) (скалярное) [1]

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2u = 0, \quad u = u(x, t), \quad (1)$$

имеет целый ряд приложений в широком круге физических задач [2], [3]. Полная интегрируемость этого уравнения была доказана на самом раннем этапе развития метода обратной задачи (МОЗ). Действительно, уравнение (1) допускает представление Лакса, в котором в качестве оператора Лакса используется оператор (2×2) -системы Захарова–Шабата, связанной с алгеброй $sl(2)$:

$$L(\lambda)\psi(x, t, \lambda) = (i\partial_x + q(x, t) - \lambda\sigma_3)\psi(x, t, \lambda) = 0, \\ q(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & u(x, t) \\ -u^*(x, t) & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

*Institute for Nuclear Research and Nuclear Energy, Bulgarian Academy of Sciences, 72 Tsarigradsko chaussee, 1784 Sofia, Bulgaria. E-mail: gerjikov@inrne.bas.bg; grah@inrne.bas.bg

†Institute of Electronics, Bulgarian Academy of Sciences, 72 Tsarigradsko chaussee, 1784 Sofia, Bulgaria. E-mail: nakostov@ie.bas.bg

и является гамильтоновой системой, описываемой гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx (-|q_x|^2 + |q|^4). \quad (3)$$

Первая многокомпонентная модель типа НУШ с приложениями в физике – это так называемое векторное НУШ (модель Манакова) [4]:

$$i\mathbf{v}_t + \mathbf{v}_{xx} + 2\|\mathbf{v}\|^2\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1(x, t) \\ v_2(x, t) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Эта модель допускает очевидное обобщение на случай n -компонентных векторов.

Применение методов дифференциальной геометрии и теории алгебр Ли к уравнениям солитонного типа привело к открытию тесной взаимосвязи между многокомпонентными (матричными) нелинейными уравнениями Шредингера (МНУШ) и однородными и симметричными пространствами [5]. Было показано, что интегрируемые системы МНУШ обладают представлением Лакса. В качестве оператора Лакса использована обобщенная система Захарова–Шабата:

$$L\psi(x, t, \lambda) \equiv i \frac{d\psi}{dx} + (Q(x, t) - \lambda J)\psi(x, t, \lambda) = 0, \quad (5)$$

где J – фиксированный элемент подалгебры Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $Q(x, t) \equiv [J, \tilde{Q}(x, t)] \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Другими словами, потенциал $Q(x, t)$ принадлежит коприсоединенной орбите $\mathcal{M}_J$ алгебры $\mathfrak{g}$, проходящей через J .

Выбор элемента J определяет размерность орбиты $\mathcal{M}_J$, которая может рассматриваться как фазовое пространство соответствующих нелинейных эволюционных уравнений (НЭУ). Размерность орбиты равна числу корней алгебры $\mathfrak{g}$ таких, что $\alpha(J) \neq 0$. Принимая во внимание, что если α является корнем, то и $-\alpha$ также является корнем алгебры $\mathfrak{g}$, заключаем, что размерность $\dim \mathcal{M}_J$ всегда четная.

Мы сконцентрируем внимание на отвечающих наибольшему вырождению способах выбора J , для которых ad_J имеет только два ненулевых собственных значения $\pm 2a$; в этом случае $J^2 = a^2 \mathbf{1}$. Такие способы выбора J согласованы с несколькими типами симметричных пространств: **A. III** $\simeq SU(p+q)/S(U(p) \otimes U(q))$, **C. I** $\simeq Sp(2p)/U(p)$ и **D. III** $\simeq SO(2p)/U(p)$ [5], [6].

Интерпретация МОЗ как обобщенных преобразований Фурье и его распространение на так называемые “квадраты” решений (см. работы [7] для случая регулярных и работу [8] для случая нерегулярных элементов J) позволяют исследовать все основные свойства соответствующих НЭУ. Такое исследование включает: 1) описание класса НЭУ, которые отвечают данному оператору Лакса $L(\lambda)$ и могут быть решены посредством МОЗ; 2) построение бесконечного семейства интегралов движения; 3) построение иерархии их гамильтоновых структур.

Вырожденность J означает, что подалгебра $\mathfrak{g}_J \subset \mathfrak{g}$ элементов, коммутирующих с J (т.е. ядро оператора ad_J), является некоммутативной, что усложняет вывод фундаментальных аналитических решений (ФАР) оператора Лакса (5) и построение соответствующего (порождающего) рекурсионного оператора Λ . В данной работе, используя калибровочно-ковариантный подход [7], [8], мы опишем в общих чертах явную конструкцию

рекурсионного оператора, связанного с оператором (5). Далее мы выведем алгебраические $\mathbb{Z}_4$ -редукции МНУШ на симметричном пространстве типа **D. III**, связанные с алгеброй Ли **D**₄. Насколько нам известно, полученные редуцированные МНУШ являются новыми.

Настоящая статья организована следующим образом. В разделе 2 приведены некоторые предварительные сведения относительно простых алгебр Ли. В разделе 3 описываются модели МНУШ общего вида и соответствующие рекурсионные операторы. В разделе 4 обсуждаются особенности гамильтоновых свойств рассматриваемых систем. В разделе 5 с помощью действия группы редукций [9] получены два 4-компонентных НУШ.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ. ПРОСТЫЕ ГРУППЫ ЛИ

Установим обозначения и нормировочные условия для генераторов Картана–Вейля $\{h_k, E_\alpha\}$ алгебры $\mathfrak{g}$ ($r = \text{rank } \mathfrak{g}$) с системой корней Δ . Введем $h_k \in \mathfrak{h}$, $k = 1, \dots, r$, как элементы Картана, дуальные к ортонормированному базису $\{e_k\}$ в корневом пространстве $\mathbb{E}^r$, и генераторы Вейля E_α , $\alpha \in \Delta$. Их коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [h_k, E_\alpha] &= (\alpha, e_k) E_\alpha, & [E_\alpha, E_{-\alpha}] &= \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \sum_{k=1}^r (\alpha, e_k) h_k, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= \begin{cases} N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta}, & \alpha + \beta \in \Delta, \\ 0, & \alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}. \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\vec{a} = \sum_{k=1}^r a_k e_k$ — r -мерный вектор, дуальный к $J \in \mathfrak{h}$, и $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{E}^r$. Нормировка базиса определяется формулами

$$E_{-\alpha} = E_\alpha^T, \quad \langle E_{-\alpha}, E_\alpha \rangle = \frac{2}{(\alpha, \alpha)}, \quad N_{-\alpha, -\beta} = -N_{\alpha, \beta}, \quad (7)$$

где $N_{\alpha, \beta} = \pm(p+1)$, целое $p \geq 0$ такое, что $\alpha + s\beta \in \Delta$ для всех $s = 1, \dots, p$, $\alpha + (p+1)\beta \notin \Delta$, и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ (см. [6]). Система корней Δ алгебры $\mathfrak{g}$ инвариантна относительно группы $W_{\mathfrak{g}}$ вейлевских отражений S_α :

$$S_\alpha \vec{y} = \vec{y} - \frac{2(\alpha, \vec{y})}{(\alpha, \alpha)} \alpha, \quad \alpha \in \Delta. \quad (8)$$

С каждым отражением S_α можно связать внутренний автоморфизм алгебры $\text{Ad}_{A_\alpha} \in \text{Aut}_0 \mathfrak{g}$, который действует на базис Картана–Вейля естественным образом, а именно:

$$\begin{aligned} S_\alpha(H_\beta) &\equiv A_\alpha H_\beta A_\alpha^{-1} = H_{\beta'}, & \beta' &= S_\alpha \beta, \\ S_\alpha(E_\beta) &\equiv A_\alpha E_\beta A_\alpha^{-1} = n_{\alpha, \beta} E_{\beta'}, & n_{\alpha, \beta} &= \pm 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку $S_\alpha^2 = 1$, то должно выполняться $A_\alpha^2 = \pm 1$.

Как уже отмечалось во введении, МНУШ соответствуют оператору Лакса (5) с нерегулярными (фиксированными) элементами Картана $J \in \mathfrak{h}$. Если J — регулярный элемент подалгебры Картана алгебры $\mathfrak{g}$, то $\text{ad } J$ имеет столько различных собственных значений, сколько корней у алгебры, и эти собственные значения имеют вид $a_j = \alpha_j(J)$,

$\alpha_j \in \Delta$. Такие элементы J могут быть использованы для введения упорядочения в системе корней, если принять, что $\alpha > 0$ при $\alpha(J) > 0$. В дальнейшем мы будем полагать, что все корни, для которых $\alpha(J) > 0$, положительны.

Очевидно, что собственные подпространства оператора ad_J могут рассматриваться как градуировка алгебры $\mathfrak{g}$. Ниже рассматриваются симметричные пространства, связанные с максимально вырожденными J , т.е. такими, для которых ad_J имеет только два ненулевых собственных значения $\pm 2a$. В таком случае алгебра $\mathfrak{g}$ представляется в виде прямой суммы подалгебры $\mathfrak{g}_0$ и линейных подпространств $\mathfrak{g}_{\pm}$:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-, \quad \mathfrak{g}_{\pm} = \text{l.c.}\{X_{\pm j} \mid [J, X_{\pm}] = \pm 2aX_{\pm}\}.$$

Подалгебра $\mathfrak{g}_0$ содержит подалгебру Картана $\mathfrak{h}$, а также все корневые векторы $E_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}$, соответствующие корням α таким, что $(\vec{\alpha}, \alpha) = 0$. Система корней Δ расщепляется на подмножества $\Delta = \theta_0 \cup \theta_+ \cup (-\theta_+)$, где

$$\theta_0 = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(J) = 0\}, \quad \theta_+ = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha(J) = a > 0\}. \quad (10)$$

Для того чтобы упростить потенциал Q , можно использовать коммутирующее с J калибровочное преобразование; в частности, можно устранить все компоненты Q , принадлежащие $\mathfrak{g}_0$. В действительности это означает, что наш потенциал $Q(x, t) = Q_+(x, t) + Q_-(x, t) \in \mathfrak{g}_+ \cup \mathfrak{g}_-$ может рассматриваться как локальная координата на коприсоединенной орбите $\mathcal{M}_J \simeq \mathfrak{g} \backslash \mathfrak{g}_0$:

$$Q_+(x, t) = \sum_{\alpha \in \theta_+} q_{\alpha}(x, t) E_{\alpha}, \quad Q_-(x, t) = \sum_{\alpha \in \theta_-} p_{\alpha}(x, t) E_{-\alpha}. \quad (11)$$

Очевидно, что $Q_{\pm} \in \mathfrak{g}_{\pm}$ и

$$\text{ad}_J Q \equiv [J, Q] = 2a(Q_+ - Q_-), \quad (\text{ad}_J)^{-1} Q = \frac{1}{2a}(Q_+ - Q_-); \quad (12)$$

кроме того, $[E_{\alpha}, E_{\beta}] = 0$ для любой пары корней $\alpha, \beta \in \theta_+$. Это упрощает решение рекуррентных соотношений и явное вычисление рекурсионного оператора Λ .

3. МОДЕЛИ ТИПА МНУШ

3.1. Представление Лакса и общий вид НЭУ. Оператор (5) вместе с соответствующим оператором $M(\lambda)$:

$$M(\lambda)\psi \equiv \left(i \frac{d}{dt} - [Q, \text{ad}_J^{-1} Q] + 2i \text{ad}_J^{-1} Q_x + 2\lambda Q - 2\lambda^2 J \right) \psi(x, t, \lambda) = 0, \quad (13)$$

где $Q = Q(x, t)$, дают представление Лакса для систем типа МНУШ. Условие совместности $[L(\lambda), M(\lambda)] = 0$ уравнений (5) и (13) дает общий вид МНУШ на симметричном пространстве:

$$\frac{i}{2} \left[J, \frac{dQ}{dt} \right] + \frac{d^2 Q}{dx^2} - 2a^2 [\text{ad}_J^{-1} Q, [\text{ad}_J^{-1} Q, Q]] = 0. \quad (14)$$

Следуя работе [10], можно рассмотреть более общие M -операторы вида

$$M(\lambda)\Psi \equiv i \frac{d\Psi}{dt} + \left(\sum_{k=1}^N V_k(x, t) \lambda^k \right) \Psi(x, t, \lambda) = 0, \quad f(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} V(x, t, \lambda). \quad (15)$$

Представление Лакса $[L(\lambda), M(\lambda)] = 0$ приводит к рекуррентным соотношениям для $V_k(x, t) = V_k^f + V_k^d$, где V_k^d и V_k^f – блочно-диагональная и блочно-антидиагональная части $V_k(x, t)$, соответственно:

$$\begin{aligned} V_{k+1}^f(x, t) &\equiv \pi_J(V_{k+1}) = \Lambda_{\pm} V_k^f(x, t) - \text{ad}_J^{-1}[C_k, Q(x, t)], \\ V_k^d(x, t) &\equiv (\mathbf{1} - \pi_J)(V_k) = C_k + i \int_{\pm\infty}^x dy [Q(y, t), V_k^f(y, t)], \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\pi_J = \text{ad}_J^{-1} \circ \text{ad}_J$ и $C_k = (\mathbf{1} - \pi_J)C_k$ – блочно-диагональные постоянные интегрирования (подробности см., например, в работах [5], [10]). Эти соотношения разрешаются посредством рекурсионных операторов

$$\Lambda_{\pm} Z = \frac{\text{ad}_J}{4a^2} \left(i \frac{dZ}{dx} + i \left[Q(x), \int_{\pm\infty}^x dy [Q(y), Z(y)] \right] \right), \quad (17)$$

где предполагается, что $Z \equiv \pi_J Z \in \mathcal{M}_J$. В результате мы получаем, что класс (в общем случае нелокальных) НЭУ, разрешимых с помощью МОЗ, имеет вид

$$i \text{ad}_J^{-1} \frac{dQ}{dt} + \sum_{k=0}^N \Lambda_{\pm}^{N-k} [C_k, \text{ad}_J^{-1} Q(x, t)] = 0, \quad f(\lambda) = \begin{pmatrix} f^+(\lambda) & 0 \\ 0 & f^-(\lambda) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где $f(\lambda) = \sum_{k=0}^N C_k \lambda^{N-k}$ определяет закон дисперсии этих уравнений. НЭУ (18) становятся локальными в случае $f(\lambda) = f_0(\lambda)J$, где $f_0(\lambda)$ – скалярная функция. В частности, если $f(\lambda) = -2\lambda^2 J$, мы получаем МНУШ (14).

3.2. Основной пример: симметричное пространство D. III. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g} \equiv \mathbf{D}_4 \simeq so(8)$; она имеет четыре простых корня $\alpha_1 = e_1 - e_2$, $\alpha_2 = e_2 - e_3$, $\alpha_3 = e_3 - e_4$ и $\alpha_4 = e_3 + e_4$. Зафиксируем элемент Картана

$$J = \text{diag}(a, a, a, a, -a, -a, -a, -a), \quad J^2 = a^2 \mathbf{1}. \quad (19)$$

Это означает, что подмножество θ_+ имеет вид $\theta_+ = \{e_i + e_j\}$, $1 \leq i < j \leq 4$. В этом случае соответствующий потенциал $Q \in \mathbf{D. III}$ (11) принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & q_{14} & q_{13} & q_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{24} & q_{23} & 0 & q_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{34} & 0 & q_{23} & -q_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{34} & -q_{24} & q_{14} \\ p_{14} & p_{24} & p_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{13} & p_{23} & 0 & p_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{12} & 0 & p_{23} & -p_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} & -p_{13} & p_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Здесь через $q_{ij}(x, t)$ и $p_{ij}(x, t)$, где i, j принадлежат множеству индексов $\mathcal{J} = \{(ij) \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$, обозначены коэффициенты генераторов E_α и $E_{-\alpha}$ с $\alpha = e_i + e_j$. Тогда НЭУ (14) превращается в систему из 12 уравнений, которая описывается следующими гамильтонианом и симплектической формой:

$$H = H_{\text{kin}} + H_{\text{int}}, \quad H_{\text{kin}} = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{(ij) \in \mathcal{J}} \frac{\partial q_{ij}}{\partial x} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} = & \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\sum_{(ij) \in \mathcal{J}} p_{ij} q_{ij} \right)^2 - \\ & - \frac{2}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx (p_{12} p_{34} + p_{13} p_{24} - p_{14} p_{23}) (q_{13} q_{24} + q_{12} q_{34} - q_{14} q_{23}), \\ \Omega^{(0)} = & i \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{(ij) \in \mathcal{J}} \delta q_{ij}(x, t) \wedge \delta p_{ij}(x, t). \end{aligned} \quad (22)$$

4. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ ЭКСПОНЕНТЫ

Рекурсионный (порождающий) оператор впервые возник в подходе Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура [10] как инструмент для построения всех M -операторов, а также всех НЭУ, отвечающих данному оператору Лакса. Позднее Гельфанд и Дикий обнаружили [11], что класс этих M -операторов содержится в диагонали резольвенты оператора L . Ядро резольвенты оператора L может быть явно определено в терминах ФАР $\chi^\pm(x, \lambda)$ уравнения (5) (см. [7], [8], [12]).

Начнем с краткого описания прямой задачи рассеяния (5), (19), (20). В основе лежат решения Йоста [2], [3], которые определяются своими асимптотиками на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, t, \lambda) e^{i\lambda Jx} = \mathbf{1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x, t, \lambda) e^{i\lambda Jx} = \mathbf{1},$$

матрица рассеяния $T(t, \lambda) = (\psi(x, t, \lambda))^{-1} \phi(x, t, \lambda)$ и обратная к ней матрица $\hat{T}(\lambda, t)$:

$$T(t, \lambda) = \begin{pmatrix} a^+(t, \lambda) & -b^-(t, \lambda) \\ b^+(t, \lambda) & a^-(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \hat{T}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} c^-(t, \lambda) & d^-(t, \lambda) \\ -d^+(t, \lambda) & c^+(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где $a^\pm(t, \lambda)$, $b^\pm(t, \lambda)$, $c^\pm(t, \lambda)$ и $d^\pm(t, \lambda)$ – блочные матрицы 4×4 . ФАР $\chi^\pm(x, t, \lambda)$ для оператора $L(\lambda)$ суть аналитические функции по λ при $\text{Im } \lambda \gtrless 0$, которые связаны с решениями Йоста следующим образом:

$$\chi^\pm(x, t, \lambda) = \phi(x, t, \lambda) S_J^\pm(t, \lambda) = \psi(x, t, \lambda) T_J^\mp(t, \lambda). \quad (24)$$

Здесь $S_J^\pm, T_J^\pm$ – верхняя и нижняя блочно-треугольные матрицы

$$S_J^+(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & d^-(t, \lambda) \\ 0 & c^+(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad S_J^-(t, \lambda) = \begin{pmatrix} c^-(t, \lambda) & 0 \\ -d^+(t, \lambda) & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$T_J^+(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -b^-(t, \lambda) \\ 0 & a^-(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad T_J^-(t, \lambda) = \begin{pmatrix} a^+(t, \lambda) & 0 \\ b^+(t, \lambda) & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

которые удовлетворяют соотношению $T_J^\pm(t, \lambda) \hat{S}_J^\pm(t, \lambda) = T(t, \lambda)$ и могут рассматриваться как факторы обобщенных разложений Гаусса матрицы $T(t, \lambda)$ [8]. Если потенциал $Q(x, t)$ эволюционирует в соответствии с уравнением (18), то

$$i \frac{db^\pm}{dt} + f^\mp(\lambda) b^\pm(t, \lambda) - b^\pm(t, \lambda) f^\pm(\lambda) = 0, \quad i \frac{da^\pm}{dt} + [f^\pm(\lambda), a^\pm(t, \lambda)] = 0. \quad (27)$$

Отображение потенциала оператора Лакса в данных рассеяния основано на соотношениях вронскиана [13]. В качестве примера выпишем одно из соотношений:

$$b_\alpha^+(t, \lambda) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle [Q(x, t), J] \chi^+(x, t, \lambda) E_\alpha(\chi^+(x, t, \lambda))^{-1} \rangle,$$

где E_α – корневой вектор, соответствующий корню $\alpha \in \theta_+$. Таким образом, “квадраты” решений, впервые появившиеся в работах [10], [14], были позднее обобщены в работах [7], [8] для операторов Лакса вида (5) следующим образом:

$$e_\alpha^\pm(x, t, \lambda) = \pi_J(\chi^\pm(x, t, \lambda) E_\alpha(\chi^\pm(x, t, \lambda))^{-1}). \quad (28)$$

Эти решения могут также рассматриваться как естественное обобщение обычных экспонент, и их полнота в пространстве $\mathcal{M}_J$ [7], [8] обеспечивает спектральные разложения рекурсионных операторов $\Lambda_\pm$, для которых $e_{\pm\alpha}^\pm(x, \lambda)$ являются собственными функциями:

$$\Lambda_+ e_{\mp\alpha}^\pm(x, \lambda) = \lambda e_{\mp\alpha}^\pm(x, \lambda), \quad \Lambda_- e_{\pm\alpha}^\pm(x, \lambda) = \lambda e_{\pm\alpha}^\pm(x, \lambda), \quad \alpha \in \theta_+. \quad (29)$$

5. ГАМИЛЬТОНОВЫ СВОЙСТВА МОДЕЛЕЙ МНУШ

Хорошо известно, что МНУШ обладают иерархиями гамильтоновых структур. Фазовое пространство $\mathcal{M}_J$ МНУШ есть коприсоединенная орбита алгебры $\mathfrak{g} \simeq \mathbf{D}_r$, определяемая элементом J ; будем дополнительно предполагать, что матричные элементы потенциала $Q(x, t)$ являются гладкими функциями, которые достаточно быстро стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

На симметричных пространствах типа **D. III** гамильтониан уравнения (14) дается выражением

$$H_{\text{МНУШ}}^{(0), \text{symm}} = a \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 2 \langle \text{ad}_J^{-1} Q_x, \text{ad}_J^{-1} Q_x \rangle + \frac{1}{2} \langle [\text{ad}_J^{-1} Q, Q], [\text{ad}_J^{-1} Q, Q] \rangle \right\}.$$

Иерархии определенных на пространстве $\mathcal{M}_J$ симплектических структур порождаются соответствующими рекурсионными операторами и задаются следующими семействами совместных два-форм:

$$\Omega_{\text{МНУШ}}^{(k)} = -2ia \int_{-\infty}^{\infty} dx \langle \delta Q(x, t) \wedge \Lambda^k \text{ad}_J^{-1} \delta Q(x, t) \rangle.$$

При $f(\lambda) = -2\lambda^2 J$ формулы (27) дают $da^\pm/dt = 0$, и величины $a^\pm(\lambda)$ могут рассматриваться как порождающие функционалы для интегралов движения, число которых,

равное r^2 , превышает ранг r алгебры $\mathfrak{g}$. Это, очевидно, имеет место благодаря вырожденности закона дисперсии. Для функции $f(\lambda)$ общего вида из (27) следует, что будут сохраняться только собственные значения матриц $a^\pm(\lambda)$. Таким образом, для МНУШ мы имеем дополнительные интегралы движения, однако, как можно убедиться, не все они находятся в инволюции. Действительно, из классического R -матричного подхода [2] следует, что

$$\{T(\lambda, t) \otimes T(\mu, t)\}_\rho = [R(\lambda - \mu), T(\lambda, t) \otimes T(\mu, t)],$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ – скобки Пуассона и, согласно [5],

$$R(\lambda - \mu) = \frac{1}{\lambda - \mu} \left(\sum_{k=1}^r h_k \otimes h_k + \sum_{\alpha \in \Delta} \frac{E_\alpha \otimes E_{-\alpha}}{\langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle} \right),$$

а h_k введены формулами (6), $\langle h_i, h_k \rangle = \delta_{ik}$.

6. НОВЫЕ РЕДУКЦИИ МНУШ

6.1. Группа редукций. Введенная Михайловым [9] группа редукций G_R дает мощный инструмент для построения новых интегрируемых уравнений [15]–[18] исходя из уже известных. Эта группа является конечной группой, которая сохраняет представление Лакса, т.е. обеспечивает автоматическую совместность редукционных связей с эволюцией. Основная идея группы редукций заключается в том, чтобы наложить условие инвариантности на операторы Лакса (5) и (13). Это означает, в частности, что закон дисперсии $f_{\text{МНУШ}}(\lambda) = -2\lambda^2 J$ также должен быть совместим с действием группы редукций.

Мы рассмотрим здесь два типа редукций $G_R \simeq \mathbb{Z}_4$; подобно тому, как это было сделано в работе [19], введем их как подгруппу в $W_{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{aligned} \text{тип I: } B^{-1}U^\dagger(x, t, \lambda^*)B &= U(x, t, \lambda), & B^{-1}JB &= J, \\ B^{-1}V^\dagger(x, t, \lambda^*)B &= V(x, t, \lambda), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{тип II: } C^{-1}U^*(x, t, \lambda^*)C &= -U(x, t, \lambda), & C^{-1}JC &= -J, \\ C^{-1}V^*(x, t, \lambda^*)C &= -V(x, t, \lambda), \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} U(x, t, \lambda) &= Q(x, t) - \lambda J, \\ V(x, t, \lambda) &= -[Q, \text{ad}_J^{-1} Q] + 2i \text{ad}_J^{-1} Q_x(x, t) + 2\lambda Q(x, t) - 2\lambda^2 J \end{aligned}$$

и автоморфизмы C и B должны быть четного порядка.

6.2. Примеры $\mathbb{Z}_4$ -редукций.

Тип I. Наложим на потенциал $U(x, t, \lambda)$ оператора Лакса следующую $\mathbb{Z}_4$ -редукцию:

$$B^{-1}(U^\dagger(x, t, \lambda^*))B = U(x, t, \lambda), \quad U(x, t, \lambda) = Q(x, t) - \lambda J, \\ B = w_{e_1 - e_2} \cdot w_{e_2 - e_3} \cdot w_{e_3 - e_4}, \quad B^4 = \mathbf{1}.$$

Это дает $B(J) = J$, и для матричных элементов $q(x, t)$ имеем

$$\begin{aligned} p_{14}(x, t) &= q_{12}^*(x, t), & p_{23}(x, t) &= -q_{12}^*(x, t), & q_{34}(x, t) &= q_{12}(x, t), \\ p_{34}(x, t) &= -q_{23}^*(x, t), & q_{14}(x, t) &= -q_{23}(x, t), & p_{12}(x, t) &= -q_{23}^*(x, t), \\ p_{24}(x, t) &= -q_{13}^*(x, t), & p_{13}(x, t) &= -q_{24}^*(x, t). \end{aligned} \quad (32)$$

Редуцированный матричный потенциал имеет четыре независимых поля $q_{12}(x, t)$, $q_{13}(x, t)$, $q_{23}(x, t)$ и $q_{24}(x, t)$. Данная редукция приводит к следующей 4-компонентной системе МНУШ, связанной с алгеброй $\mathbf{D}_4$:

$$\begin{aligned} ia \frac{\partial q_{12}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{12}}{\partial x^2} - 2q_{12}(q_{12}q_{23}^* + 2q_{23}q_{12}^* + q_{13}^*q_{24} + q_{13}q_{24}^*) + \\ + 2q_{23}^*(q_{23}^2 + q_{13}q_{24}) = 0, \\ ia \frac{\partial q_{13}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{13}}{\partial x^2} - 2q_{13}(2q_{23}^*q_{12} + 2q_{23}q_{12}^* + q_{13}q_{24}^*) + 2q_{13}^*(q_{23}^2 + q_{12}^2) = 0, \\ ia \frac{\partial q_{23}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{23}}{\partial x^2} - 2q_{23}(q_{23}q_{12}^* + 2q_{12}q_{23}^* + q_{24}q_{13}^* + q_{13}q_{24}^*) + \\ + 2q_{12}^*(q_{12}^2 + q_{13}q_{24}) = 0, \\ ia \frac{\partial q_{24}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{24}}{\partial x^2} - 2q_{24}(2q_{23}q_{12}^* + 2q_{12}q_{23}^* + q_{24}q_{13}^*) + 2q_{24}^*(q_{23}^2 + q_{12}^2) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Редуцированные гамильтониан и симплектическая форма этой системы суть

$$\begin{aligned} H_{\text{kin}}^{\text{red}} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial q_{13}}{\partial x} \frac{\partial q_{24}^*}{\partial x} + \frac{\partial q_{13}^*}{\partial x} \frac{\partial q_{24}}{\partial x} + 2 \frac{\partial q_{23}}{\partial x} \frac{\partial q_{12}^*}{\partial x} + 2 \frac{\partial q_{23}^*}{\partial x} \frac{\partial q_{12}}{\partial x} \right), \\ H_{\text{int}}^{\text{red}} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \{ (2q_{23}q_{12}^* + 2q_{23}^*q_{12} + q_{13}q_{24}^* + q_{13}^*q_{24})^2 - \\ &\quad - 2(q_{23}^2 + q_{12}^2 + q_{13}q_{24})(q_{23}^{*2} + q_{12}^{*2} + q_{13}^*q_{24}^*) \}, \\ \Omega^{(0), \text{red}} &= i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\delta q_{13} \wedge \delta q_{24}^* + \delta q_{13}^* \wedge \delta q_{24} + 2\delta q_{23} \wedge \delta q_{12}^* + 2\delta q_{23}^* \wedge \delta q_{12}). \end{aligned} \quad (34)$$

Тип II. Наложим другую $\mathbb{Z}_4$ -редукцию:

$$C^{-1}(U^*(x, t, -\lambda^*))C = -U(x, t, \lambda), \quad U(x, t, \lambda) = Q(x, t) - \lambda J, \\ C = w_{e_1 + e_2} \cdot w_{e_2 + e_3} \cdot w_{e_3 + e_4}, \quad C^4 = \mathbf{1},$$

где $w_{e_i+e_j}$ – отражения Вейля относительно корней e_i+e_j алгебры $so(8)$. Тогда $C(J) = -J$, и для матричных элементов потенциала $Q(x, t)$ имеем

$$\begin{aligned} q_{34}(x, t) &= q_{12}(x, t), & p_{23}(x, t) &= q_{12}^*(x, t), & p_{14}(x, t) &= -q_{12}^*(x, t), \\ p_{34}(x, t) &= q_{23}^*(x, t), & q_{14}(x, t) &= -q_{23}(x, t), & p_{12}(x, t) &= q_{23}^*(x, t), \\ p_{24}(x, t) &= -q_{13}^*(x, t), & p_{13}(x, t) &= -q_{24}^*(x, t). \end{aligned} \quad (35)$$

Таким образом, мы получаем 4-компонентную систему МНУШ, связанную с алгеброй D_4 (независимыми полями в данном случае являются $q_{12}(x, t)$, $q_{13}(x, t)$, $q_{23}(x, t)$ и $q_{24}(x, t)$):

$$\begin{aligned} ia \frac{\partial q_{12}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{12}}{\partial x^2} + 2q_{12}(q_{12}q_{23}^* + 2q_{23}q_{12}^* - q_{13}^*q_{24} - q_{13}q_{24}^*) - \\ - 2q_{23}^*(q_{23}^2 + q_{13}q_{24}) = 0, \\ ia \frac{\partial q_{13}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{13}}{\partial x^2} + 2q_{13}(2q_{23}^*q_{12} + 2q_{23}q_{12}^* - q_{13}q_{24}^*) + 2q_{13}^*(q_{23}^2 + q_{12}^2) = 0, \\ ia \frac{\partial q_{23}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{23}}{\partial x^2} + 2q_{23}(q_{23}q_{12}^* + 2q_{12}q_{23}^* - q_{24}q_{13}^* - q_{13}q_{24}^*) - \\ - 2q_{12}^*(q_{12}^2 + q_{13}q_{24}) = 0, \\ ia \frac{\partial q_{24}}{\partial t} + \frac{\partial^2 q_{24}}{\partial x^2} + 2q_{24}(2q_{23}q_{12}^* + 2q_{12}q_{23}^* - q_{24}q_{13}^*) + 2q_{24}^*(q_{23}^2 + q_{12}^2) = 0, \end{aligned} \quad (36)$$

со следующими гамильтонианом и симплектической формой:

$$\begin{aligned} H_{\text{kin}}^{\text{red}} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\partial q_{13}}{\partial x} \frac{\partial q_{24}^*}{\partial x} + \frac{\partial q_{13}^*}{\partial x} \frac{\partial q_{24}}{\partial x} - 2 \frac{\partial q_{23}}{\partial x} \frac{\partial q_{12}^*}{\partial x} - 2 \frac{\partial q_{23}^*}{\partial x} \frac{\partial q_{12}}{\partial x} \right), \\ H_{\text{int}}^{\text{red}} &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \{ (2q_{23}q_{12}^* + 2q_{23}^*q_{12} - q_{13}q_{24}^* - q_{13}^*q_{24})^2 - \\ &\quad - 2(q_{23}^2 + q_{12}^2 + q_{13}q_{24})(q_{23}^2 + q_{12}^2 + q_{13}^*q_{24}^*) \}, \\ \Omega^{(0), \text{red}} &= i \int_{-\infty}^{\infty} dx (\delta q_{13} \wedge \delta q_{24}^* + \delta q_{13}^* \wedge \delta q_{24} - 2\delta q_{23} \wedge \delta q_{12}^* - 2\delta q_{23}^* \wedge \delta q_{12}). \end{aligned} \quad (37)$$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описаны две новые системы типа МНУШ, полученные как результат $\mathbb{Z}_4$ -редукций МНУШ, связанного с симметричным пространством **D. III**. Кратко рассмотрен гамильтонов формализм и теория Λ -операторов для МНУШ, связанных с простой алгеброй Ли. Эти результаты могут быть обобщены для изучения редукций уравнений типа МНУШ, связанных с другими симметричными и однородными пространствами. Показано, как метод, представленный в работах [16] для N -волновых уравнений и калибровочно-эквивалентных им систем, может быть распространен на системы типа МНУШ [17]. Метод является явно калибровочно-ковариантным и может быть применен также к калибровочно-эквивалентным системам типа ферромагнетика Гейзенберга.

В результате мы можем методично получать и классифицировать новые интегрируемые системы типа МНУШ. Такое исследование сопряжено с большим объемом вычислений; оно будет продолжено в последующих работах. Другие интересные редукции уравнений типа МНУШ были представлены в работах [19], и систематическое исследование проблемы продолжается.

Благодарности. В. С. Герджиков и Г. Г. Граховски благодарят организаторов конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. III” за финансовую поддержку и гостеприимство. Данная работа была поддержана National Science Foundation of Bulgaria, грант № F-1410. Г. Г. Граховски благодарен также экспертной комиссии молодых ученых Болгарской академии наук за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

- [1] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
- [2] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [3] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [4] *С. В. Манаков.* ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 543; *M. J. Ablowitz, B. Prinari, A. D. Trubatch.* Discrete and continuous nonlinear Schrodinger systems. London Math. Soc. Lecture Note. Ser. V. 302. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 2003.
- [5] *A. P. Fordy, P. P. Kulish.* Commun. Math. Phys. 1983. V. 89. P. 427.
- [6] *S. Helgason.* Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces (Pure Appl. Math. V. 80). N.Y.: Academic Press, 1978.
- [7] *V. S. Gerdjikov, P. P. Kulish.* Physica D. 1981. V. 3. P. 549; *V. S. Gerdjikov.* Inverse Problems. 1986. V. 2. P. 51.
- [8] *В. С. Герджиков.* ТМФ. 1994. Т. 99. С. 292.
- [9] *A. V. Mikhailov.* Physica D. 1981. V. 3. P. 73.
- [10] *M. Ablowitz, D. Kaup, A. Newell, H. Seegur.* Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249.
- [11] *И. М. Геллфанд, Л. А. Диккий.* УМН. 1975. Т. 30. С. 67; Функци. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. С. 11.
- [12] *V. S. Gerdjikov.* Lett. Math. Phys. 1982. V. 6. P. 315.
- [13] *F. Calogero, A. Degasperis.* Nuovo Cimento B. 1976. V. 32. P. 201; V. 39. P. 1.
- [14] *D. J. Kaup.* J. Math. Anal. Appl. 1976. V. 54. P. 849; *V. S. Gerdjikov, E. Kh. Khristov.* Bulg. J. Phys. 1980. V. 7. P. 28; P. 119.
- [15] *V. E. Zakharov, A. V. Mikhailov.* Commun. Math. Phys. 1980. V. 74. P. 21; *V. Drinfel'd, V. V. Sokolov.* J. Sov. Math. 1985. V. 30. P. 1975.
- [16] *V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, R. I. Ivanov, N. A. Kostov.* Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 999; *V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 9425.
- [17] *V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov.* Eur. Phys. J. B. 2002. V. 29. P. 243.
- [18] *S. Lombardo, A. V. Mikhailov.* J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 7727; nlin.SI/0404013; Commun. Math. Phys. 2005. V. 258. P. 179; math-ph/0407048.
- [19] *V. S. Gerdjikov, G. G. Grahovski, N. A. Kostov.* On the multi-component NLS type equations on symmetric spaces. Reductions and scattering data properties. In: Int. Conf. Contemporary Aspects of Astronomy, Theoretical and Gravitational Physics (Sofia, Bulgaria, May 20–22, 2004) (unpublished); On the multi-component NLS type equations on symmetric spaces. Z_2 -reductions and soliton solutions. In: Geometry, Integrability and Quantization. VI. Eds. I. M. Mladenov, A. C. Hirshfeld. Sofia: SOFTEX, 2005. P. 203.