Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Хренников, С. В. Козырев, p -Адические псевдодифференциальные операторы и аналитическое продолжение репличных матриц, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 336–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1858>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:10:00

© 2005 г.

А. Ю. Хренников*, С. В. Козырев†

p -АДИЧЕСКИЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕПЛИЧНЫХ МАТРИЦ

Рассматривается процедура аналитического продолжения репличных матриц. Эта процедура формулируется в специальном виде, в котором аналитическое продолжение задается последовательностью отображений. С помощью этого определения описано репличное решение Паризи с нарушенной симметрией и найден соответствующий p -адический псевдодифференциальный оператор.

Ключевые слова: p -адические псевдодифференциальные операторы, метод реплик.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследование сложных, неупорядоченных и нелинейных явлений привлекает много внимания исследователей ввиду исключительного значения, приобретаемого этими явлениями в самых разных областях приложений. Одним из наиболее важных методов оказывается метод реплик [1]. В этом методе было обнаружено интересное явление ультраметричности пространства состояний, на котором задан параметр порядка. В работах [2] была доказана применимость p -адического анализа в методе реплик.

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в статьях [2], где обсуждалось соотношение между репличными матрицами Паризи и ультраметрическими псевдодифференциальными операторами (ПДО). В работе описывается процедура аналитического продолжения репличной матрицы и проводится исследование вопроса, какой именно p -адический ПДО отвечает решению с нарушенной репличной симметрией Паризи (НРС).

Решение с НРС ищется с помощью аналитического продолжения по размерности n репличной матрицы с последующим предельным переходом $n \rightarrow 0$. Такое решение [1]

*Department of Mathematics and Computer Science, Växjö University, S-35195, Växjö, Sweden.
E-mail: Andrei.Khrennikov@msi.vxu.se

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: kozyrev@mi.ras.ru

(взятое вблизи точки фазового перехода стеклования) после выполнения всех указанных процедур описывается следующей функцией $q(x)$ на отрезке $[0, 1]$:

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{3}x, & 0 \leq x \leq 3\tau, \\ q(x) &= \tau, & 3\tau \leq x \leq 1, \quad 0 < \tau \ll 1. \end{aligned} \quad (1)$$

До взятия предела (см. работы [2] и обсуждение в следующем разделе) матрица Паризи отвечает p -адическому ПДО. В данной работе показывается, что решение с НРС (1) отвечает некоторой последовательности $T^{(N)}$ p -адических ПДО. Чтобы построить эту последовательность, формулируется процедура аналитического продолжения репличной матрицы с использованием последовательности $\rho^{(N)}$ отображений множества положительных чисел в себя.

Выводы данной статьи относятся к области p -адической математической физики (см. [3]). В работе [4] был развит анализ псевдодифференциальных операторов на ультраметрических пространствах общего вида. Это позволяет распространить результаты p -адической математической физики на более общие ультраметрические пространства.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 описана p -адическая параметризация репличных матриц Паризи и их связь с p -адическими ПДО. В разделе 3 дана наша формулировка процедуры аналитического продолжения для репличных матриц и приведен вид p -адического ПДО, отвечающего решению Паризи с НРС. В разделе 4 изложены некоторые из ранее известных фактов, касающихся таких решений.

2. РЕПЛИЧНЫЕ МАТРИЦЫ И p -АДИЧЕСКИЕ ПДО

Рассмотрим репличную матрицу Паризи (Q_{ab}) . Эта $(n \times n)$ -матрица имеет следующий вид

$$\begin{aligned} Q_{aa} &= 0, \\ Q_{ab} &= q_i \quad \text{при} \quad I\left[\frac{a}{m_i}\right] \neq I\left[\frac{b}{m_i}\right], \quad I\left[\frac{a}{m_{i+1}}\right] = I\left[\frac{b}{m_{i+1}}\right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь q_i суть k вещественных параметров, $I[x]$ — функция от x , равная наименьшему целому числу, большему или равному x ; m_i представляют собой N целых чисел таких, что числа $p_i = m_{i+1}/m_i$ тоже целые и

$$1 = m_0 < m_1 < \dots < m_{N-1} < m_N = n. \quad (3)$$

В работах [2] было показано, что в частном случае, когда $m_i = p^i$ (т.е. все $p_i = p$ и $n = p^N$), формула (2) оказывается эквивалентной следующей формуле для p -адической параметризации: после соответствующей перенумерации индексов репличной матрицы Паризи ее матричные элементы могут быть представлены в виде

$$Q_{ij} = q(|i - j|_p), \quad (4)$$

где через $|\cdot|_p$ обозначено p -адическое расстояние, а функция $q(|x|_p)$ содержит в себе информацию о матричных элементах, закодированную в следующем виде: $q(p^k) = q_k$, $k = 1, \dots, N$, $q(0) = 0$.

Аналогично действие матрицы (2) связано с действием p -адических ПДО вида

$$Tf(x) = \int_{Q_p} q(|x-y|_p)(f(x) - f(y)) d\mu(y),$$

где μ – мера Хаара на множестве Q_p , и в соответствии с вышесказанным функция q задается соотношениями

$$\begin{aligned} q(|x|_p) &= 0, & |x|_p &\leq 1, \\ q(p^k) &= q_k, & k &= 1, \dots, N, \\ q(|x|_p) &= 0, & |x|_p &> p^N. \end{aligned} \quad (5)$$

В данной работе обсуждается аналитическое продолжение репличных матриц и предел $n \rightarrow 0$ для этих матриц с точки зрения соответствующих p -адических ПДО.

3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕПЛИЧНЫХ МАТРИЦ

Опишем теперь аналитическое продолжение репличных матриц и взятие предела $n \rightarrow 0$ по размерности этих матриц, для чего перейдем к более абстрактной формулировке этих процедур. В стандартной методологии аналитическое продолжение и взятие предела $n \rightarrow 0$ для репличных матриц обычно понимаются как просто различные описания одной и той же процедуры. Здесь же нам удобно рассматривать их как два разных процесса.

Стандартное [1] определение аналитического продолжения репличной матрицы формулируется следующим образом. Имеются целые числа (3), $1 = m_0 < m_1 < \dots < m_{N-1} < m_N = n$, которые преобразуются в положительные числа, упорядоченные в обратном порядке:

$$1 = m_0 > m_1 > \dots > m_{N-1} > m_N = n > 0.$$

После аналитического продолжения семейство чисел m_i переходит в функцию $m(x)$, $x \in [0, 1]$, где $m(x) = m_i$ при $m_{i+1} < x \leq m_i$. Аналогично после аналитического продолжения семейство чисел q_i переходит в функцию $q(x)$, $x \in [0, 1]$, где $q(x) = q_i$ при $m_{i+1} < x \leq m_i$.

Теперь взятие предела $n \rightarrow 0$ понимается как одновременное взятие пределов $N \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow 0$, т.е. рассматривается последовательность $m_i^{(k)}$, $i = 1, \dots, N_k$, где положительные числа $m_i^{(k)}$ упорядочены как указано выше и $N_k \rightarrow \infty$ и $m_{N_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. При этом соответствующие функции $m^{(k)}(x)$ и $q^{(k)}(x)$ должны иметь пределы в смысле мер, а предельное выражение для функции $m^{(k)}(x)$ есть просто $m(x) = x$.

По некоторым причинам, связанным с попытками обобщить решение Паризи с НРС, удобно рассмотреть по отдельности определения аналитического продолжения репличной матрицы и взятия предела $n \rightarrow 0$ с тем, чтобы иметь возможность привязать конкретные аналитически продолженные репличные матрицы к соответствующим p -адическим ПДО.

Для этого примем за основу следующую точку зрения на аналитическое продолжение для репличных матриц. Введем аналитическое продолжение репличных матриц с

использованием последовательности отображений $\rho^{(N)}$ (занумерованных индексом N), где каждое $\rho^{(N)}$ представляет собой отображение множества положительных чисел в себя вида

$$\rho^{(N)}(x) = 1 - \frac{\ln x}{N \ln p}. \quad (6)$$

По определению после аналитического продолжения получается следующее уравнение для параметров m_i :

$$m_i = \rho^{(N)}(p^i) = 1 - \frac{i}{N}, \quad i = 0, \dots, N.$$

Применим теперь это явное выражение для аналитического продолжения репличных матрицы к решению Паризи с НРС. Это решение [1] в пределе $n \rightarrow 0$ имеет вид (1).

До выполнения этого предельного перехода указанное решение (после N шагов процедуры НРС) имеет вид

$$\begin{aligned} q^{(N)}(p^i) &= q_i = \tau, & 0 \leq i < N(1 - \tau), \\ q^{(N)}(p^i) &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{i}{N} \right), & N(1 - \tau) \leq i \leq N, \end{aligned}$$

и в соответствии с выражением (5) может быть задано следующим образом:

$$\begin{aligned} q^{(N)}(|x|_p) &= 0, \quad |x|_p \leq 1, & q^{(N)}(|x|_p) &= \tau, \quad 1 < |x|_p < p^{N(1-\tau)}, \\ q^{(N)}(|x|_p) &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\ln |x|_p}{N \ln p} \right), & p^{N(1-\tau)} \leq |x|_p \leq p^N, & q^{(N)}(|x|_p) &= 0, \quad |x|_p > p^N. \end{aligned} \quad (7)$$

Эта функция отвечает ПДО

$$T^{(N)} f(x) = \int q^{(N)}(|x - y|_p) (f(x) - f(y)) d\mu(y) \quad (8)$$

с функцией $q(|x|_p)$, заданной выражением (7).

Таким образом, оказывается, что предел $n \rightarrow 0$, который превращается в предел $N \rightarrow \infty$ в случае формулы (7), не задается никаким сколько-нибудь регулярным p -адическим ПДО.

4. РЕШЕНИЕ ПАРИЗИ С НРС

Здесь приводится стандартный материал [1], касающийся метода реплик в модели Шеррингтона–Киркпатрика (ШК). В приближении малых репличных матриц для решения Паризи с НРС свободная энергия модели ШК имеет вид

$$F(q_i, m_i) = \sum_{i=0}^N (m_i - m_{i+1}) \left[-\tau q_i^2 - \frac{1}{4} q_i^4 + \frac{1}{3} (2m_i - m_{i+1}) q_i^3 + \sum_{j=i+1}^N (m_j - m_{j+1}) q_i q_j^2 \right],$$

где $0 < \tau \ll 1$.

Анзац реплик представляет собой решение вариационной задачи для свободной энергии относительно переменных q_i при фиксированных m_i . При этом вариационная задача сводится к условию

$$- \tau 2q_i - q_i^3 + (2m_i - m_{i+1})q_i^2 + \sum_{j=i+1}^N (m_j - m_{j+1})q_j^2 + 2q_i \sum_{j=0}^{i-1} (m_j - m_{j+1})q_j = 0. \quad (9)$$

Частными решениями задачи (9) являются постоянное решение $q_i = q$, которое при малых τ имеет вид

$$q = 0, \quad q = \pm \tau,$$

и решение, удовлетворяющее системе уравнений

$$-(q_{i+1} - q_{i-1})(q_{i+1} + q_i + q_{i-1}) + m_{i+1}(q_{i+1} - q_i) + m_i(q_i - q_{i-1}) = 0. \quad (10)$$

Эта система приводит к квадратичному рекуррентному условию для величин q_i .

Стандартное рассуждение НРС гласит, что в пределе $n \rightarrow 0$ вышеприведенное уравнение превращается в уравнение

$$-6q(x) dq(x) + 2m(x) dq(x) = 0,$$

допускающее два решения:

$$q(x) = \text{const}, \quad q(x) = \frac{1}{3}m(x). \quad (11)$$

Решение Паризи с НРС задается комбинацией двух указанных решений вида (1). До взятия непрерывного предела это решение имеет вид

$$q_i = \frac{1}{3}m_i, \quad 0 \leq m_i \leq 3\tau, \\ q_i = \tau, \quad 3\tau \leq m_i \leq 1.$$

Благодарности. Авторы благодарны И. В. Воловичу, Г. Паризи и В. А. Аветисову за плодотворные обсуждения и ценные замечания. А. Хренников благодарен С. Альбеверию за ценное обсуждение и за поддержку p -адических исследований. Работа была частично поддержана EU-Network “Quantum Probability and Applications”. Работа С. Козырева была поддержана РФФИ (грант № 05-01-00884а), Президентским грантом поддержки ведущих научных школ (НШ 1542.2003.1), Программой Отделения математических наук РАН (Современные проблемы теоретической математики) и грантом Королевской Академии Наук Швеции по научному сотрудничеству с учеными бывшего Советского Союза.

Список литературы

- [1] *M. Mezard, G. Parisi, M. Virasoro.* Spin-Glass Theory and Beyond. Singapore: World Scientific, 1987.
- [2] *V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 8785–8791; cond-mat/9904360; *G. Parisi, N. Sourlas.* Eur. J. Phys. B. 2000. V. 14. P. 535–542; cond-mat/9906095.
- [3] *C. B. Козырев.* Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 149–158; math-ph/0012019; ТМФ. 2004. Т. 138. № 3. С. 322–332; math-ph/0303045; *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов.* p -Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994; *I. V. Volovich.* Class. Q. Grav. 1987. V. 4. P. L83–L87; *A. Khrennikov.* p -Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994; Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht: Kluwer, 1997; *V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 177–189; cond-mat/0106506.
- [4] *A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev.* Pseudodifferential operators on ultrametric spaces and ultrametric wavelets, Preprint of MSI № 02143. Växjö, Sweden: MSI, Växjö Univ., 2002.