Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Иоанниду, А. Куйрукидис, Н. Д. Вламос, Аналитический подход к Q -боллам, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 342–347

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1859>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 10:08:07

© 2005 г. Т. А. Иоанниду*, А. Куйрукидис†, Н. Д. Влахос†

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К Q -БОЛЛАМ

Представлен аналитический подход для построения решений вида Q -боллов в общем случае потенциала шестого порядка. В частности, показано, что симметризованная функция Вудса–Саксона описывает профиль Q -болла, а потому энергию и заряд можно вычислить явно.

Ключевые слова: нетопологические солитоны, заряд Нётер, механический аналог.

1. ВВЕДЕНИЕ

Q -боллы являются когерентными состояниями комплексного скалярного поля, несущими глобальный $U(1)$ -заряд, которые можно понимать как связанные состояния скалярных частиц, появляющиеся в виде устойчивых классических решений с вращающейся зависящей от времени внутренней фазой [1], [2]. Они характеризуются сохраняющимся нетопологическим зарядом Q (зарядом Нётер), что обеспечивает их существование и устойчивость [3]. В действительности Q -боллы естественным образом возникают в суперсимметричных теориях [4], и их устойчивость имеет значение для космологии, поскольку если устойчивые Q -боллы формируются в ранней Вселенной, то они могут давать вклад в темную материю [5].

Хотя Q -боллы существуют в разнообразных моделях теории поля, мы рассмотрим лагранжиан $U(1)$ модели Голдстоуна

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \bar{\phi} - U(|\phi|), \quad (1)$$

где ϕ — комплексное скалярное поле в трех пространственных измерениях, а потенциал $U(|\phi|)$ имеет единственный минимум при $\phi = 0$. Эквивалентным образом можно сказать, что имеется сектор скалярных частиц (мезонов) с массой $\sqrt{U''(0)/2}$, несущих $U(1)$ -заряд. Соответствующий функционал энергии имеет вид

$$E = \int \left(\frac{1}{2} |\dot{\phi}|^2 + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + U(|\phi|) \right) d^3x, \quad (2)$$

---

*Mathematics Division, School of Technology, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki 54124, Greece. E-mail: ti3@gen.auth.gr

†Physics Department, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki 54124, Greece. E-mail: kouirouki@astro.auth.gr, vlahos@physics.auth.gr

а сохраняющийся (из-за глобальной $U(1)$ -симметрии) ток Нётер есть

$$J_\mu = \frac{1}{2i}(\bar{\phi} \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \bar{\phi}), \quad (3)$$

причем заряд равен

$$Q = \frac{1}{2i} \int (\bar{\phi} \partial_t \phi - \phi \partial_t \bar{\phi}) d^3 x. \quad (4)$$

Стационарное решение вида Q -болла можно получить, полагая

$$\phi = e^{i\omega t} f(r), \quad (5)$$

где $f(r)$ – вещественная радиальная функция профиля, удовлетворяющая обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} = -\omega^2 f + U'(f) \quad (6)$$

с граничными условиями $f(\infty) = 0$ и $f'(0) = 0$. В каждом случае эффективный потенциал определяется как $U_{\text{eff}}(f) = \omega^2 f^2/2 - U(f)$, а существование решений вида Q -болла приводит к ограничениям на потенциал $U(f)$ и частоту ω : 1) эффективная масса решения f должна быть отрицательной, откуда, полагая $U(0) = U'(0) = 0$ и $U''(0) = \omega_+^2 > 0$, можно вывести, что $\omega < \omega_+$; 2) минимум функции $U(f)/f^2$ должен достигаться при некотором положительном значении f (скажем, $0 < f_0 < \infty$), и существование решения требует, чтобы $\omega > \omega_-$, где $\omega_-^2 = 2U(f_0)/f_0^2$. Поэтому Q -боллы существуют при всех ω в интервале $\omega_- < |\omega| < \omega_+$.

Заряд (4) и энергия (2) стационарного решения вида Q -болла (5) принимают простой вид:

$$Q = 4\pi\omega \int r^2 f^2(r) dr, \quad (7)$$

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 Q^2 + 4\pi \int \left(\frac{f'^2}{2} + U(f) \right) r^2 dr. \quad (8)$$

Выбор потенциала при этом неоднозначен, поскольку единственное требование состоит в том, чтобы отношение $U(f)/f^2$ имело локальный минимум при некотором ненулевом значении f . Однако мы рассмотрим случай, когда

$$U(f) = \frac{m_1^2}{2} f^2 - \lambda_1 f^4 + \mu_1 f^6, \quad (9)$$

при котором $\omega_+ = m_1$ и $\omega_- = \sqrt{(2m_1^2\mu_1 - \lambda_1^2)/(2\mu_1)}$. Устойчивые Q -боллы существуют при $\sqrt{(2m_1^2\mu_1 - \lambda_1^2)/(2\mu_1)} < \omega < m_1$. Тогда уравнение движения (6) принимает вид

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{df}{dr} = \alpha^2 f - 4\lambda_1 f^3 + 6\mu_1 f^5, \quad (10)$$

где $\alpha^2 = m_1^2 - \omega^2$. Если интерпретировать f как положение частицы, а r как время, то уравнение (10) можно воспринимать как ньютоновское уравнение движения частицы единичной массы, подчиненной вязкому трению и движущейся в эффективном потенциале $\omega^2 f^2/2 - U(f)$. Это приводит к ограничениям на потенциал и частоту ω , обеспечивающим существование решения вида Q -болла (см. обсуждение в разделе 2). По поводу дальнейших подробностей мы отсылаем читателя к работе Коулмена [1], где доказана фундаментальная теорема существования для этих Q -боллов и найдены их низшие возбуждения.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ ПОТЕНЦИАЛА

С точки зрения механики решение вида Q -болла описывает движение частицы с трением в потенциале

$$U_{\text{eff}}(f) = -\frac{1}{2}\alpha^2 f^2 + \lambda_1 f^4 - \mu_1 f^6, \quad \lambda_1, \mu_1 > 0. \quad (11)$$

Выполняя масштабное преобразование $r \rightarrow r/\alpha$ и полагая $f(r) = f(0)\psi(ar)$, где $\psi(0) = 1$, преобразуем уравнение (10) к виду

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\psi}{dr} = \psi - 4\lambda\psi^3 + 6\mu\psi^5, \quad (12)$$

где $\lambda = \lambda_1 f(0)^2/\alpha^2$ и $\mu = \mu_1 f(0)^4/\alpha^2$, а эффективный потенциал (11) принимает вид

$$U(\psi) = -\frac{1}{2}\psi^2 + \lambda\psi^4 - \mu\psi^6. \quad (13)$$

Интегрируя уравнение (12), получаем

$$\int_0^\infty r^{n-1} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 dr = \frac{2n}{4-n} \int_0^\infty r^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\psi^2 + \lambda\psi^4 - \mu\psi^6 \right) dr, \quad n \neq 0. \quad (14)$$

Специальные случаи $n = 3$ и $n = 0$ приводят соответственно к условиям

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty r^2 \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 dr = 3 \int_0^\infty r^2 \left(-\frac{1}{2}\psi^2 + \lambda\psi^4 - \mu\psi^6 \right) dr, \quad (15)$$

$$2 \int_0^\infty r^{-1} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 dr = -\frac{1}{2}\psi(0)^2 + \lambda\psi(0)^4 - \mu\psi(0)^6 \equiv U(1). \quad (16)$$

Первое условие является теоремой Деррика (или вириальной теоремой): в трехмерной модели кинетическая энергия в три раза превосходит потенциальную; второе же условие описывает диссипацию энергии в механической системе.

При рассмотрении механического аналога задачи на $U(1)$ налагаются определенные ограничения. Для частицы, исходно расположенной в точке $\psi(0) = 1$, начинающей соскальзывать с потенциальной стенки и в конце концов останавливающейся в точке

$\psi(\infty) = 0$, потенциальная энергия (13) в начале координат $U(1)$ должна быть поглощена за счет члена с трением $(2/r)d\psi/dr$ (здесь r соответствует временной переменной). Поэтому ограничения на $U(1)$ должны быть как снизу, так и сверху, поскольку при больших $U(1)$ частица перелетит через верхнюю точку, а при малых $U(1)$ она ее не достигнет.

Исходная потенциальная энергия $U(1)$ должна быть положительной, $\mu \leq \lambda - 1/2$; $U'(1)$ также должна быть положительной (притягивающая “сила”): $\mu \leq (4\lambda - 1)/6$. Эти условия выполнены при $1/2 < \lambda < 1$ и $\lambda > 1$, соответственно. В зависимости от формы потенциала (т.е. от конкретных значений λ и μ) возможны следующие отличные друг от друга случаи.

I. Приближение тонких стенок. В этом случае $\psi(0)$ лежит вблизи максимума эффективного потенциала, являющегося глубоким. Тогда $U'(1) = -1 + 4\lambda - 6\mu \approx 0$ должна быть положительной и близкой к нулю (медленное скатывание), а $U''(1)$ — отрицательной (выпуклая область) и иметь порядок единицы. Решение вида Q -болла приближенно лежит на линии

$$\mu = \frac{1}{6}(4\lambda - 1), \quad (17)$$

и исходная потенциальная энергия линейно зависит от λ :

$$U(1) = \frac{1}{3}(\lambda - 1), \quad \lambda > 1. \quad (18)$$

II. Приближение толстых стенок. Здесь потенциал является мелким и максимумы расположены высоко, $U''(1)$ является положительной и большой (вогнутая область) и μ мало. Исходная потенциальная энергия $U(1)$ возрастает с λ и достигает своего максимального значения при $\mu \rightarrow 0$. Это значение можно определить численно, и результат равен $\lambda_{\max} \simeq 4.70137$. Однако реальная функциональная зависимость $U(1)$ от λ не известна, и ее следует определить.

В предположении степенного поведения потенциала в главном порядке вида

$$U(1) = \kappa \lambda^n \quad (19)$$

из уравнения (13) следует, что решение вида Q -болла лежит на линии

$$\mu = -\frac{1}{2} + \lambda - \kappa \lambda^n, \quad (20)$$

которая определяет κ через $\lambda_{\max}$ (поскольку $\mu(\lambda_{\max}) = 0$):

$$\kappa = \frac{2\lambda_{\max} - 1}{2\lambda_{\max}^n}. \quad (21)$$

При этом значение n в формуле (19) определяется исходя из требования, чтобы переход из области толстых стенок в область тонких был гладким, откуда, как доказано в работе [6], следует $n = 3$, а потому $\kappa = 1/24.75$.

3. СВОЙСТВА Q -БОЛЛОВ

Используя формулы масштабного преобразования из предыдущего раздела, можно аналитически определить зависимость функций E , Q и $f(0)$ от α . Исходное значение поля $f(0)$ в терминах преобразованных формул есть

$$f(0) = \alpha \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1}}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} \frac{\lambda_1}{\lambda}, \quad (22)$$

а соответствующие функционалы заряда (7) и энергии (8) принимают вид

$$Q = \frac{4\pi\omega}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_0^\infty \psi^2 r^2 dr, \quad (23)$$

$$E = \frac{\alpha^2 + 2\omega^2}{2\omega} Q + 4\pi\alpha \frac{\lambda}{\lambda_1} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \psi'^2 - \lambda \psi^4 + \mu \psi^6 \right) r^2 dr. \quad (24)$$

В работе [7] было показано, что пробная функция, удовлетворяющая граничным условиям и имеющая правильное асимптотическое поведение, является симметризованным профилем Вудса–Саксона:

$$\phi(r) = \frac{c}{\sqrt{1 + c_1 \operatorname{ch}(br)}}, \quad (25)$$

в терминах которого функционалы заряда (23) и энергии (24) можно явно вычислить как

$$Q = \frac{4\pi\omega}{\alpha} \frac{\lambda}{\lambda_1} \frac{c^2}{3b^3} i_0, \quad (26)$$

$$E = 4\pi \frac{c^2}{3b^3} \sqrt{\frac{\mu}{\mu_1}} \left\{ \left(\frac{(m^2 + \omega^2)}{2\alpha} \frac{\lambda}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu}} + \mu c^4 - \lambda c^2 - \frac{1}{8} b^2 c_1^2 \right) i_0 + \right. \\ \left. + \left(2\mu c^4 - \lambda c^2 - \frac{1}{4} b^2 c_1^2 \right) c_1 \frac{di_0}{dc_1} + \frac{1}{2} \left(\mu c^4 + \frac{1}{8} b^2 (1 - c_1^2) \right) c_1^2 \frac{d^2 i_0}{dc_1^2} \right\}. \quad (27)$$

Здесь i_0 – функция от c_1 , задаваемая в виде

$$i_0(c_1) = \frac{1}{\sqrt{1 - c_1^2}} \operatorname{arccch} \left(\frac{1}{c_1} \right) \left[\pi^2 + \operatorname{arccch} \left(\frac{1}{c_1} \right)^2 \right], \quad c_1 < 1. \quad (28)$$

Заметим, что λ_1 , μ_1 , m – фиксированные внешние параметры, λ изменяется непрерывно от 1 до 4.70137, а μ – известная функция от λ , заданная одной из формул (17) или (20) в зависимости от режима. Поэтому имеется только два неопределенных параметра – параметры профиля b и c_1 .

Эти параметры можно определить, налагая условия (15) и (16) на $\phi(r)$, т.е.

$$\frac{1}{2} b^2 c_1^2 c^2 \int_0^\infty \frac{dr}{r} \frac{\operatorname{sh}^2 r}{(1 + c_1 \operatorname{ch} r)^3} = U(1), \quad (29)$$

$$\left(\frac{1}{2} - \lambda c^2 + \mu c^4 - \frac{b^2 c_1^2}{24} \right) i_0 + \left(2\mu c^4 - \frac{b^2 c_1^2}{12} - \lambda c^2 \right) c_1 \frac{di_0}{dc_1} + \\ + \frac{c_1^2}{2} \left(\mu c^4 + \frac{b^2}{24} (1 - c_1^2) \right) \frac{d^2 i_0}{dc_1^2} = 0. \quad (30)$$

Заметим, что получаемые таким образом значения c_1 и b являются универсальными, поскольку они не зависят от геометрических параметров потенциала. Тем не менее значения энергии и заряда зависят от конкретного вида потенциала, т.е. от значений λ_1 , μ_1 и m . Эти значения стремятся к бесконечности в каждом из пределов, поскольку в пределе тонких стенок $c_1 \rightarrow 0$, а в пределе толстых стенок $\alpha \rightarrow 0$. Интересно подчеркнуть, что область применимости приближения толстых стенок очень широка и дает удовлетворительные результаты даже в области тонких стенок. Представляется, что в этом классе теорий Q -боллы предпочитают быть “толстыми”.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы универсальным способом исследовали феноменологически существенные свойства Q -боллов. В частности, было показано, что, используя геометрические характеристики скалярного потенциала, можно вычислить как исходное значение поля, которое приводит к решению вида Q -болла, так и соответствующие заряд и энергию солитона. Мы нашли, что эта схема приводит к удовлетворительным результатам во всей области изменения параметров, так что нет необходимости полагаться на приближения типа тонких или толстых стенок. Энергию и заряд солитона можно далее вычислить аналитически и сравнить с результатами численных вычислений из работы [8].

Мы полагаем, что подобную же аргументацию можно применить к изучению функции профиля зависимости энергия–заряд в потенциалах всех типов.

Список литературы

- [1] *S. Coleman*. Nucl. Phys. B. 1985. V. 262. P. 263.
- [2] *T. D. Lee*. Particles Physics and Introduction to Field Theory. London: Harwood, 1981.
- [3] *J. K. Drohm, L. P. Yok, Y. A. Simonov, J. A. Tyon, V. I. Veselov*. Phys. Lett. B. 1981. V. 101. P. 204; *Т. И. Белова, А. Е. Кудрявцев*. ЖЭТФ. 1989. Т. 95. С. 13; *D. K. Hong*. J. Low Temp. Phys. B. 1998. V. 71. P. 483.
- [4] *A. Kusenko*. Phys. Lett. B. 1997. V. 405. P. 108.
- [5] *A. Kusenko, M. Shaposhnikov*. Phys. Lett. B. 1998. V. 418. P. 46; *K. Enqvist, J. McDonald*. Nucl. Phys. B. 1999. V. 538. P. 321.
- [6] *T. Ioannidou, A. Kouiroukidis, N. D. Vlachos*. Universality in a class of Q -balls solutions: an analytic approach. hep-th/0405209.
- [7] *T. Ioannidou, N. D. Vlachos*. J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 3562.
- [8] *T. Ioannidou, V. Kopeliovich, N. D. Vlachos*. Nucl. Phys. B. 2003. V. 660. P. 156.