Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Козырев, Оснащенное гильбертово пространство свободных когерентных состояний и p -адические числа, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 229–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 16:50:45

ОСНАЩЕННОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО СВОБОДНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ И p -АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Исследовано оснащенное гильбертово пространство свободных когерентных состояний. Доказано, что это оснащенное гильбертово пространство изоморфно пространству обобщенных функций на p -адическом диске. Обсуждается связь описанного изоморфизма оснащенных гильбертовых пространств и некоммутативной геометрии. Показано, что обсуждаемый пример реализует изоморфизм между некоммутативной прямой и p -адическим диском.

Ключевые слова: p -адические числа, некоммутативная геометрия.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе, продолжая исследования [1], [2], мы рассматриваем свободные когерентные состояния (СКС), являющиеся (неограниченными) собственными векторами линейной комбинации операторов уничтожения в свободном фоковском пространстве. В работах [1], [2] было показано, что пространство СКС сильно вырожденно для фиксированного собственного значения λ (вырождение бесконечномерно) и это вырождение естественно описывается пространством $D'(\mathbb{Z}_p)$ обобщенных функций на p -адическом диске (здесь p — количество независимых операторов рождения в свободном фоковском пространстве). В настоящей работе мы переформулируем результаты [1], [2], используя язык оснащенных гильбертовых пространств, и предлагаем интерпретацию связи между СКС и p -адическими числами на языке некоммутативной геометрии. На этом языке изоморфизм между пространством СКС и пространством обобщенных функций на p -адическом диске сводится к изоморфизму между некоммутативной (или квантовой) прямой и p -адическим диском.

p -Адическая математическая физика изучает проблемы математической физики при помощи p -адического анализа [3]–[10]. В частности, в книге [3] был развит анализ p -ади-

*Институт химической физики РАН им. Н. Н. Семенова, Москва, Россия.
E-mail: kozyrev@mi.ras.ru

ческих псевдодифференциальных операторов. В работе [4] был предложен p -адический подход в теории струн. В [6] была развита теория p -адичнозначных обобщенных функций. В работах [8] было показано, что матрица Паризи, используемая в методе реплик, в простейшем случае эквивалентна p -адическому псевдодифференциальному оператору. В [9] показано, что базис всплесков (или вейвлетов) в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ после p -адической замены переменной (непрерывного отображения p -адических чисел на вещественные числа, сохраняющего меру) становится базисом собственных векторов оператора Владимирова p -адического дробного дифференцирования. В работе [10] была предложена процедура, порождающая ультраметрическое пространство состояний, используемое в методе реплик.

Свободное (или квантовое бoльцмановское) фоковское пространство рассматривалось в работах по квантовой хромодинамике [11] и некоммутативной вероятности [12].

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разделе 2 вводятся СКС. В разделе 3 обсуждается изоморфизм между СКС и обобщенными функциями на p -адическом диске. В разделе 4 на пространстве СКС вводится структура оснащенного гильбертова пространства и изоморфизм, обсуждаемый в разделе 3, обобщается на случай оснащенных гильбертовых пространств.

2. СВОБОДНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Свободное фоковское пространство $\mathcal{F}$ над гильбертовым пространством $\mathcal{H}$ есть пополнение тензорной алгебры

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes n}.$$

Операторы рождения и уничтожения действуют следующим образом:

$$\begin{aligned} A^\dagger(f)f_1 \otimes \cdots \otimes f_n &= f \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_n, \quad f, f_i \in \mathcal{H}, \\ A(f)f_1 \otimes \cdots \otimes f_n &= \langle f, f_1 \rangle f_2 \otimes \cdots \otimes f_n, \quad f, f_i \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ есть скалярное произведение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Скалярное произведение в свободном фоковском пространстве (которое мы также обозначаем $\langle \cdot, \cdot \rangle$) определяется стандартным способом.

В случае, когда $\mathcal{H}$ является p -мерным комплексным пространством, имеются по p операторов рождения и уничтожения $A_i^\dagger, A_i, i = 0, \dots, p-1$, удовлетворяющих соотношениям

$$A_i A_j^\dagger = \delta_{ij}, \quad (1)$$

и вакуумный вектор Ω в свободном фоковском пространстве: $A_i \Omega = 0$.

СКС были введены в работах [1], [2] как формальные собственные векторы оператора уничтожения $A = \sum_{i=0}^{p-1} A_i$ в свободном фоковском пространстве $\mathcal{F}$ для некоторого собственного значения λ ,

$$A\Psi = \lambda\Psi. \quad (2)$$

Формальное решение уравнения (2) имеет вид

$$\Psi = \sum_I \lambda^{|I|} \Psi_I A_I^\dagger \Omega. \quad (3)$$

Здесь мультииндекс есть $I = i_0 \dots i_{k-1}$, $i_j \in \{0, \dots, p-1\}$, и

$$A_I^\dagger = A_{i_{k-1}}^\dagger \dots A_{i_0}^\dagger. \quad (4)$$

Коэффициенты Ψ_I суть комплексные числа, удовлетворяющие

$$\Psi_I = \sum_{i=0}^{p-1} \Psi_{Ii}. \quad (5)$$

Суммирование в формуле (3) производится по всем последовательностям I конечной длины. Длина последовательности I обозначается $|I|$ (в частности, в формуле (4) $|I| = k$). Формальный ряд (3) определяет функционал с плотной областью определения в свободном фоковском пространстве. В частности, область определения каждого СКС для $\lambda \in (0, \sqrt{p})$ содержит плотное (в свободном фоковском пространстве) подпространство X , введенное ниже.

Введем СКС X_I вида

$$X_I = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i^\dagger \right)^k \lambda^{|I|} A_I^\dagger \Omega + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{-l} \left(\sum_{i=0}^{p-1} A_i \right)^l \lambda^{|I|} A_I^\dagger \Omega. \quad (6)$$

Сумма по l фактически содержит $|I|$ членов. Для $\lambda \in (0, \sqrt{p})$ СКС X_I лежит в гильбертовом пространстве (соответствующий функционал ограничен).

Обозначим через X линейную оболочку СКС вида (6), а через X' — пространство всех СКС (заданных в (3)).

Определение 1 было предложено, а леммы 1, 2 и 4, следствие 1 и пример (см. ниже) были доказаны в работах [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Определим перенормированное спаривание пространств X и X' следующим образом:

$$(\Psi, \Phi) = \lim_{\lambda \rightarrow \sqrt{p}-0} \left(1 - \frac{\lambda^2}{p} \right) \langle \Psi, \Phi \rangle, \quad (7)$$

где $\Psi \in X'$, $\Phi \in X$.

Отметим, что когерентные состояния Ψ, Φ , определенные формулами (3), (6), зависят от λ , а произведение (Ψ, Φ) от λ не зависит.

Корректность определения 1 доказывается следующей леммой.

ЛЕММА 1. Векторы $X_I \in X$ принадлежат области определения функционала Ψ для $\lambda \in (0, \sqrt{p})$ и для произвольного СКС Ψ , определенного формулой (3). Более того, следующий предел существует и равен

$$(\Psi, X_I) = \lim_{\lambda \rightarrow \sqrt{p}-0} \left(1 - \frac{\lambda^2}{p}\right) \langle \Psi, X_I \rangle = p^{|I|} \Psi_I. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Спаривание функционала $\Psi \in X'$, заданного в (3), и состояния (6) задается следующим рядом:

$$\langle \Psi, X_I \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{2k} \langle \Psi^k, X_I^k \rangle. \quad (9)$$

Здесь Ψ^k и X_I^k — коэффициенты при λ^k в рядах для Ψ и X_I . Вектор Ψ^k задан формулой

$$\Psi^k = \sum_{|J|=k} \Psi_J A_J^\dagger \Omega,$$

и X_I^k для $k > |I|$ имеет вид

$$X_I^k = \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i^\dagger \right)^{k-|I|} A_I^\dagger \Omega.$$

Для $k > 0$ мы получим

$$\begin{aligned} \langle \Psi^{|I|+k}, X_I^{|I|+k} \rangle &= \langle X_I^{|I|+k}, \Psi^{|I|+k} \rangle^* = \left\langle X_I^{|I|+k-1}, \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i \Psi^{|I|+k} \right\rangle^* = \\ &= \left\langle X_I^{|I|+k-1}, \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i \sum_{|J|=|I|+k} \Psi_J A_J^\dagger \Omega \right\rangle^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i \sum_{|J|=|I|+k} \Psi_J A_J^\dagger \Omega = \sum_{|J|=|I|+k-1} \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \Psi_{Ji} A_I^\dagger \Omega = \frac{1}{p} \Psi^{|I|+k-1}.$$

Следовательно,

$$\langle \Psi^{|I|+k}, X_I^{|I|+k} \rangle = \frac{1}{p} \langle \Psi^{|I|+k-1}, X_I^{|I|+k-1} \rangle = p^{-k} \langle \Psi^{|I|}, X_I^{|I|} \rangle = p^{-k} \Psi_I, \quad (10)$$

откуда получаем, что ряд (9) принимает вид

$$\langle \Psi, X_I \rangle = \sum_{k=0}^{|I|} \lambda^{2k} \langle \Psi^k, X_I^k \rangle + \sum_{k=|I|+1}^{\infty} \lambda^{2k} p^{|I|-k} \Psi_I.$$

Поскольку для $\lambda^2/p < 1$ вышеприведенный ряд мажорируется геометрической прогрессией, ряд (9) сходится и соответствующее перенормированное спаривание принимает вид

$$(\Psi, X_I) = p^{|I|} \Psi_I. \quad (11)$$

Это завершает доказательство леммы.

3. СВЯЗЬ С p -АДИЧЕСКИМИ ЧИСЛАМИ

Определим характеристическую функцию p -адического диска

$$\theta_k(x - x_0) = \theta(p^k |x - x_0|_p), \quad \theta(t) = \begin{cases} 0, & t > 1, \\ 1, & t \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь $x, x_0 \in \mathbb{Z}_p$, т.е. принадлежат кольцу целых p -адических чисел, и функция $\theta_k(x - x_0)$ равна единице на диске $D(x_0, p^{-k})$ радиуса p^{-k} с центром в x_0 и равна нулю вне этого диска.

Отождествим мультииндекс $I = i_0 \dots i_k$ с p -адическим числом $I = \sum_{j=0}^k i_j p^j$.

Следующая лемма описывает отношение между перенормированным спариванием СКС и скалярным произведением квадратично-интегрируемых функций на p -адическом диске.

ЛЕММА 2. *Пространство X с перенормированным скалярным произведением изоморфно, как евклидово пространство, пространству $D(\mathbb{Z}_p)$ основных функций на p -адическом диске со скалярным произведением в L^2 , причем изоморфизм задан как*

$$\phi: X \rightarrow D(\mathbb{Z}_p), \quad (13)$$

$$\phi: X_I \mapsto p^{|I|} \theta_{|I|}(x - I). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство X есть фильтрованное пространство с фильтрацией

$$X = \bigcup_k X^{(k)}, \quad X^{(k+1)} \supset X^{(k)},$$

где $X^{(k)}$ порождено векторами X_I с $|I| = k$. Пространства $X^{(k)}$ конечномерны. Аналогично для $D(\mathbb{Z}_p)$ имеет место фильтрация конечномерными подпространствами

$$D(\mathbb{Z}_p) = \bigcup_k D_k(\mathbb{Z}_p), \quad D_{k+1}(\mathbb{Z}_p) \supset D_k(\mathbb{Z}_p),$$

где $D_k(\mathbb{Z}_p)$ порождено функциями $\theta_k(x - I)$ с $|I| = k$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что ϕ есть изоморфизм для отображений $\phi: X^{(k)} \rightarrow D_k(\mathbb{Z}_p)$. По определению $D_k(\mathbb{Z}_p)$ является конечномерным евклидовым пространством, порожденным функциями $\theta_{|I|}(x - I)$ с $|I| = k$. Функции $\theta_{|I|}(x - I)$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i=0}^{p-1} \theta_{|I|}(x - Ii) = \theta_{|I|}(x - I) \quad (15)$$

и имеют скалярные произведения

$$(\theta_k(x - I), \theta_k(x - J)) = p^{-|I|} \delta_{IJ}. \quad (16)$$

Пространство $X^{(k)}$ порождено X_I с $|I| = k$. Векторы X_I удовлетворяют соотношению

$$X_I = p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} X_{Ij}, \quad (17)$$

которое мы выводим из (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} X_I &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i^\dagger \right)^k \lambda^{|I|} A_I^\dagger \Omega + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{-l} \left(\sum_{i=0}^{p-1} A_i \right)^l \lambda^{|I|} A_I^\dagger \Omega = \\ &= p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i^\dagger \right)^k \lambda^{|Ij|} A_{Ij}^\dagger \Omega + \lambda^{|I|} A_I^\dagger \Omega + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{-l} \left(\sum_{i=0}^{p-1} A_i \right)^l \lambda^{|I|} A_I^\dagger \Omega = \\ &= p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \left(\frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} A_i^\dagger \right)^k \lambda^{|Ij|} A_{Ij}^\dagger \Omega + p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{l=1}^{\infty} \lambda^{-l} \left(\sum_{i=0}^{p-1} A_i \right)^l \lambda^{|Ij|} A_{Ij}^\dagger \Omega = \\ &= p^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} X_{Ij}. \end{aligned}$$

Векторы X_I имеют следующие скалярные произведения для $|I| = |J|$:

$$(X_I, X_J) = p^{|I|} \delta_{IJ}. \quad (18)$$

Сравнивая (15), (16) и (17), (18), мы получаем утверждение леммы.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Перенормированное скалярное произведение (X_I, X_J) СКС $X_I, X_J \in X$ равно интегралу по p -адическому диску по мере Хаара μ :*

$$\begin{aligned} (X_I, X_J) &= p^{|I|+|J|} \int_{\mathbb{Z}_p} \theta_{|I|}(x - I) \theta_{|J|}(x - J) \mu(dx) = \\ &= \left(\frac{\theta_{|I|}(x - I)}{\|\theta_{|I|}(x - I)\|^2}, \frac{\theta_{|J|}(x - J)}{\|\theta_{|J|}(x - J)\|^2} \right)_{L^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

ЛЕММА 3. *Изоморфизм ϕ порождает вложение ϕ' пространства СКС X' в пространство обобщенных функций на p -адическом диске $D'(\mathbb{Z}_p)$:*

$$\phi'(\Psi) = \Psi \circ \phi^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны проверить, что для произвольного ненулевого СКС Ψ функционал $\Psi \circ \phi^{-1}$ является ненулевым непрерывным линейным функционалом над $D(\mathbb{Z}_p)$.

Согласно (8) и (14) имеем

$$(\Psi \circ \phi^{-1}, \theta|_I(x - I)) = \Psi_I. \quad (20)$$

Поскольку для любого ненулевого СКС Ψ по крайней мере один коэффициент Ψ_I является ненулевым, это доказывает, что функционал $\Psi \circ \phi^{-1}$ ненулевой.

Топология в $D(\mathbb{Z}_p)$ определяется следующим образом (см. [3]). Пространство $D(\mathbb{Z}_p)$ есть

$$D(\mathbb{Z}_p) = \bigcup_k D_k(\mathbb{Z}_p),$$

где $D_k(\mathbb{Z}_p)$ – линейная оболочка $\theta_j(x - I)$, $j \leq k$, и последовательность $\{\phi_j\}$ в $D(\mathbb{Z}_p)$ сходится, если все $\phi_j \in D_k(\mathbb{Z}_p)$ для любого j и некоторого k и функции $\phi_j \rightarrow 0$ однородно. Каждое из пространств $D_k(\mathbb{Z}_p)$ есть нормированное пространство (с C -нормой, равной верхней грани по p -адическому диску от модуля функции).

Из формулы (8) следует, что $\Psi \circ \phi^{-1}$ есть ограниченный функционал на $D_k(\mathbb{Z}_p)$ с нормой

$$\|\Psi \circ \phi^{-1}\|_{D_k(\mathbb{Z}_p)} = \max_{|I| \leq k} |\Psi_I|.$$

Следовательно, функционал $\Psi \circ \phi^{-1}$ непрерывен на $D(\mathbb{Z}_p)$, что завершает доказательство леммы.

Важным примером обобщенной функции является δ -функция. Введем когерентное состояние, отвечающее δ -функции. Рассмотрим бесконечную последовательность $I = i_0 \dots i_k \dots$, $i_j = 0, \dots, p-1$, и соответствующее p -адическое число $I = \sum_{k=0}^{\infty} i_k p^k$. Обозначим $I_k = i_0 \dots i_{k-1}$. Введем СКС δ_I вида

$$\delta_I = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A_{I_k}^{\dagger} \Omega.$$

ПРИМЕР. Отображение ϕ' переводит СКС δ_I в δ -функцию:

$$\phi'(\delta_I) = \delta(x - I).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формул (8) и (19).

ЛЕММА 4. Вложение пространства СКС X' в пространство обобщенных функций на p -адическом диске $D'(\mathbb{Z}_p)$, построенное в лемме 3, сюръективно (и, следовательно, является изоморфизмом линейных пространств).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства леммы достаточно построить СКС, которое при применении к обратному образу индикатора произвольного p -адического диска в $\mathbb{Z}_p$ даст произвольное (с учетом соотношения, следующего из линейности функционала и того факта, что индикатор диска равен сумме индикаторов поддисков) комплексное число. Это следует из формулы (20):

$$(\Psi, \phi^{-1}\theta_{|I|}(x - I)) = \Psi_I,$$

где Ψ_I есть произвольный набор комплексных чисел, удовлетворяющих соотношению (5), выражающему свойство линейности, примененное к индикаторам поддисков:

$$(\Psi, \phi^{-1}\theta_{|I|}(x - I)) = \sum_{i=0}^{p-1} (\Psi, \phi^{-1}\theta_{|Ii|}(x - Ii)).$$

Это завершает доказательство леммы.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Отображения ϕ, ϕ' (которые являются изоморфизмами линейных пространств) позволяют перенести топологию $D(\mathbb{Z}_p)$ и $D'(\mathbb{Z}_p)$ на пространства X и X' , соответственно. Эта процедура делает отображения ϕ и ϕ' изоморфизмами топологических векторных пространств.*

4. ОСНАЩЕННОЕ ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО СВОБОДНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Леммы 2–4 подсказывают следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Определим $\tilde{\mathcal{F}}$ как пополнение пространства СКС X по норме, определенной перенормированным скалярным произведением.

Пространство $\tilde{\mathcal{F}}$ есть гильбертово пространство по отношению к перенормированному скалярному произведению.

ЛЕММА 5. *Гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{F}}$ лежит в пространстве СКС X' : $\tilde{\mathcal{F}} \subset X'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\Psi \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\Psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^{(n)}$, $\Psi^{(n)} \in X$, рассмотрим произведение (11). Принимая во внимание (17), получим

$$(\Psi, X_I) = p^{-1} \sum_{i=0}^{p-1} (\Psi, X_{Ii}),$$

откуда следует, что Ψ_I , где $\Psi_I = (\Psi, X_I)p^{-|I|}$, удовлетворяет (5). Следовательно,

$$\tilde{\Psi} = \sum_I \lambda^{|I|} \Psi_I A_I^\dagger \Omega$$

есть СКС в X' , удовлетворяющее равенствам

$$(\tilde{\Psi}, X_I) = (\Psi, X_I) = p^{|I|} \Psi_I,$$

откуда следует, что $\tilde{\Psi} = \Psi$. Это завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 6. *Отображение $j: X \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ в (21) (см. ниже) есть непрерывное вложение с плотным образом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (8) следует, что ненулевое СКС в X имеет ненулевую норму в $\tilde{\mathcal{F}}$. Следовательно, j является вложением.

Пусть $\{\Phi^{(n)}\}$ есть сходящаяся (в топологии, индуцированной из $D(\mathbb{Z}_p)$) последовательность в X . Чтобы проверить непрерывность вложения j , нужно показать, что последовательность $\{\Phi^{(n)}\}$ фундаментальна в $\tilde{\mathcal{F}}$. По определению топологии в $D(\mathbb{Z}_p)$ существует k такое, что $\{\Phi^{(n)}\} \subset X^{(k)}$. Следовательно, каждый вектор $\Phi^{(n)}$ есть конечная линейная комбинация векторов X_I , $|I| = k$, и сходимость последовательности $\{\Phi^{(n)}\}$ сводится к сходимости конечного числа коэффициентов в разложении по X_I . Согласно (8) получаем, что $\{\Phi^{(n)}\}$ есть фундаментальная последовательность в $\tilde{\mathcal{F}}$, что доказывает непрерывность j . Это завершает доказательство леммы.

Суммируя леммы 5 и 6, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Пространство СКС*

$$X \xrightarrow{i} \tilde{\mathcal{F}} \xrightarrow{j} X' \quad (21)$$

является оснащённым гильбертовым пространством.

Напомним, что оснащённое гильбертово пространство есть тройка пространств

$$A \xrightarrow{i} \mathcal{H} \xrightarrow{j} A^*,$$

где $\mathcal{H}$ есть гильбертово пространство, A и A^* являются взаимно сопряжёнными топологическими векторными пространствами, отображения $i: A \rightarrow \mathcal{H}$ и $j: \mathcal{H} \rightarrow A^*$ суть непрерывные вложения, образ i плотен в $\mathcal{H}$, отображения i и j взаимно сопряжены в следующем смысле:

$$(ia, h) = (a, jh), \quad a \in A, \quad h \in \mathcal{H}.$$

Сравним оснащённые гильбертовы пространства СКС (21) и обобщённых функций на p -адическом диске:

$$D(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{i'} L^2(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{j'} D'(\mathbb{Z}_p).$$

Получим следующую теорему, являющуюся расширением теоремы, доказанной в [2].

ТЕОРЕМА 2. *Отображение ϕ , определенное как*

$$\phi: X_I \mapsto p^{|I|} \theta|_I(x - I),$$

расширяется до изоморфизма ϕ оснащенных гильбертовых пространств

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & \tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{j} & X' \\ \downarrow \phi & & \downarrow \tilde{\phi} & & \downarrow \phi' \\ D(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{i'} & L^2(\mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{j'} & D'(\mathbb{Z}_p) \end{array}$$

между оснащённым гильбертовым пространством СКС (с перенормированным спариванием) и оснащённым гильбертовым пространством обобщенных функций на p -адическом диске.

Здесь $\tilde{\phi}$ есть ограничение ϕ' на $\tilde{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из лемм 2–4 и следствия 2. Изоморфизм между пространствами $\tilde{\mathcal{F}}$ и $L^2(\mathbb{Z}_p)$ следует из того факта, что эти пространства являются пополнениями изоморфных пространств по совпадающей норме.

ЗАМЕЧАНИЕ. Определение (2) пространства СКС

$$(A - \lambda)\Psi = 0, \quad A = \sum_{i=0}^{p-1} A_i,$$

можно интерпретировать как уравнение некоммутативной (или квантовой) плоскости $A = \lambda$ в некоммутативном пространстве с некоммутативными координатами A_i , $A_i^\dagger$. СКС Ψ в этой картине соответствует обобщенной функции на некоммутативном пространстве с носителем на некоммутативной плоскости $A = \lambda$.

Теорема 2 означает, что пространство обобщенных функций на некоммутативной плоскости изоморфно, как оснащенное гильбертово пространство, пространству обобщенных функций на p -адическом диске, или, другими словами, некоммутативная плоскость эквивалентна p -адическому диску.

Отметим, что значение $\lambda = \sqrt{p}$ есть максимальное возможное значение λ . Для $\lambda > \sqrt{p}$ любой вектор (3) имеет бесконечную норму и, следовательно, не лежит в гильбертовом пространстве.

Благодарности. Автор благодарен И. В. Воловичу и О. Г. Смолянову за обсуждения и важные замечания. Эта работа была частично поддержана INTAS (грант № YSF-2002-160 F2), CRDF (грант № UM1-2421-KV-02), РФФИ (грант № 02-01-01084) и Президентским грантом поддержки научных школ (НШ 1542.2003.1).

Список литературы

- [1] *C. B. Козырев*. ТМФ. 1997. Т. 110. № 2. С. 334; q-alg/9701015.
- [2] *S. V. Kozzyrev*. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. 1998. V. 1. № 2. P. 349; q-alg/9706020.
- [3] *В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов*. *p*-Адитивный анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
- [4] *I. V. Volovich*. Class. Q. Grav. 1987. V. 4. P. L83.
- [5] *P. G. O. Freund, M. Olson*. Phys. Lett. B. 1987. V. 199. P. 186; *V. S. Vladimirov, I. V. Volovich*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 123. P. 659; *I. Ya. Aref'eva, B. Dragovic, P. Frampton, I. V. Volovich*. Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6. P. 4341; *В. С. Владимиров*. УМН. 1989. Т. 43. С. 17.
- [6] *A. Khrennikov*. *p*-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics. Dordrecht: Kluwer, 1994.
- [7] *S. Albeverio, A. Khrennikov*. Int. J. Mod. Phys. 1998. V. 10. № 13/14. P. 1665; *A. N. Kochubei*. Additive and multiplicative fractional differentiations over the field of *p*-adic numbers. In: *p*-Adic Functional Analysis. Proc. of the 4th Int. Conf. (Nijmegen, Netherlands, June 3–7, 1996). Lect. Notes Pure Appl. Math. V. 192. Eds. W.H. Schikhof, C. Perez-Garcia, J. Kakol. New York: Dekker, 1997. P. 275.
- [8] *V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozzyrev*. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 8785; cond-mat/9904360; *G. Parisi, N. Sourlas*. European Phys. J. B. 2000. V. 14. P. 535; cond-mat/9906095.
- [9] *C. B. Козырев*. Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 2. С. 149; math-ph/0012019.
- [10] *S. V. Kozzyrev*. The noncommutative replica approach. cond-mat/0110238.
- [11] *I. Ya. Aref'eva, I. V. Volovich*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 462. P. 600; *R. Gopakumar, D. Gross*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 451. P. 379; *M. R. Douglas, M. Li*. Phys. Lett. B. 1995. V. 348. P. 360.
- [12] *L. Accardi, Y. G. Lu*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 180. P. 605; *L. Accardi, Y. G. Lu, I. V. Volovich*. Quantum Theory and its Stochastic Limit. Berlin: Springer, 2002; Interacting Fock Spaces and Hilbert Module Extensions of the Heisenberg Commutation Relations. Kyoto: Publ. IAS, 1997; *Л. Аккарди, И. В. Волович, С. В. Козырев*. ТМФ. 1998. Т. 116. № 3. С. 401; *D. Voiculescu, K. J. Dykema, A. Nica*. Free Random Variables. CRM Monograph Series. V. 1. Providence, RI: AMS, 1992; *M. Bozejko, R. Speicher*. Commun. Math. Phys. 1991. V. 137. P. 519.

Поступила в редакцию 4.VII.2002 г.