Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Яворский, Экспоненциально сужающийся джозефсоновский контакт: некоторые аналитические результаты, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 348–353

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1860>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:42:58

© 2005 г.

М. Яворский*

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СУЖАЮЩИЙСЯ ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ КОНТАКТ: НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Динамические свойства экспоненциально сужающегося джозефсоновского контакта исследуются на основе простой одномерной модели, описывающей возмущенное (почти интегрируемое) уравнение синус-Гордон. Приближенное аналитическое решение основано на линеаризации вблизи быстроосциллирующего фона. Аналитические результаты сравниваются с прямым численным моделированием распределения магнитного поля в контакте.

Ключевые слова: джозефсоновский контакт, уравнение синус-Гордон.

1. ВВЕДЕНИЕ

Экспоненциально сужающиеся джозефсоновские контакты в последнее время привлекают к себе значительное внимание ввиду возможных применений в мпм-волновой сверхпроводящей электронике [1]. Такая неравномерная структура позволяет добиться некоторых преимуществ по сравнению со стандартным прямоугольным контактом, а именно, получить меньшую ширину линии, большую выходную мощность и лучшее согласование сопротивлений.

До сих пор джозефсоновские контакты экспоненциальной формы исследовались численно и экспериментально. Целью данной работы является представить приближенное аналитическое решение соответствующего возмущенного уравнения синус-Гордон.

Вещественная двумерная структура сначала редуцируется к одномерной модели, а затем приближенное решение находится в форме малых гармонических колебаний, наложенных на сильно нелинейный, быстроосциллирующий фон. Определив решение, удовлетворяющее подходящим граничным условиям, мы можем найти некоторые физические адекватные величины, например, распределение магнитного поля в контакте.

*Institute of Physics, Polish Academy of Sciences, Al. Lotników, 32/46, 02-668, Warszawa, Poland. E-mail: jawor@ifpan.edu.pl

2. ДВУМЕРНЫЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО СУЖАЮЩИЙСЯ КОНТАКТ И ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ

Двумерный экспоненциально сужающийся джозефсоновский контакт, помещенный во внешнее однородное магнитное поле, показан на рис. 1. Контакт можно описать двумерным модифицированным уравнением синус-Гордон

$$\Delta\phi - \phi_{tt} - \alpha\phi_t = \sin\phi, \quad (1)$$

где ϕ – джозефсоновская фаза, а α – множитель, описывающий затухание из-за нормальных электронов. Уравнение (1) записано в безразмерных единицах, т.е. пространственные координаты нормированы на джозефсоновскую глубину проникновения λ_J , а временная координата – на обратную плазменную частоту ω_0^{-1} .

Рис. 1. Экспоненциально сужающийся джозефсоновский контакт. W – ширина контакта, L – длина контакта, h – внешнее магнитное поле, j – постоянный ток смещения.

Будем предполагать, что ширина контакта экспоненциально зависит от x , т.е. $W(x) = W_0 \exp(-\lambda x)$. Если контакт является узким ($W(x) \ll 1$) и его ширина медленно меняется (величина λ мала), то можно редуцировать двумерное уравнение синус-Гордон (1) к одномерному почти интегрируемому уравнению [1]:

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - \alpha\phi_t = \sin\phi + \lambda\phi_x - \lambda h. \quad (2)$$

Согласно уравнениям Джозефсона [2] функция ϕ_t пропорциональна электрическому полю, а ϕ_x – магнитному полю в контакте. Таким образом, для тока смещения j , приложенного к левому концу контакта, граничные условия можно записать в виде

$$\phi_x(-L/2) = h - j, \quad \phi_x(L/2) = h, \quad (3)$$

где h – внешнее однородное магнитное поле, а L – длина контакта.

Поскольку наша цель состоит в том, чтобы дать аналитическое описание реальной экспериментальной ситуации, мы ограничимся строго периодическими по времени решениями для стационарных состояний, в которых омические потери сбалансированы энергией, доставляемой через края контакта.

3. ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

Для длинного контакта ($L \gg 1$) и достаточно сильного внешнего поля h мы ищем решение в виде “flux-flow” моды, т.е. в виде плотного пакета солитонов, движущихся в одном направлении на быстровращающемся фоне [3], [4],

$$\phi = \phi_0 + \psi, \quad (4)$$

где $\phi_0 = \theta(x) + \Omega t$ – фоновый член, а ψ – солитонный пакет, как правило, малый по величине и гармонический по Ωt .

Идея вращающегося фона следует непосредственно из “обратного” преобразования, примененного к точному периодическому решению стандартного уравнения синус-Гордон в пределе плотного пакета солитонов [5]. Аналогичный подход, основанный, однако, на других аргументах, был предложен в работах [3], [6].

Используя анзац (4), можно рассмотреть различные временные масштабы и найти по отдельности две части уравнения (2): не зависящую от времени и гармоническую по Ωt . Соответственно, граничные условия можно записать отдельно для ϕ_0 :

$$\phi_{0,x}(-L/2) = h - j, \quad \phi_{0,x}(L/2) = h, \quad (5)$$

и ψ :

$$\psi_x(-L/2) = 0, \quad \psi_x(L/2) = 0. \quad (6)$$

3.1. Не зависящие от времени члены. Подставляя уравнение (4) в уравнение (2) и собирая не зависящие от времени члены, получаем уравнение

$$\theta_{xx} - \alpha\Omega = \lambda\theta_x - \lambda h. \quad (7)$$

Строго говоря, член $\psi \cos \phi_0$ также дает вклад в не зависящую от времени часть уравнения. Однако эта поправка обычно мала и будет учтена в дальнейшем в серии последовательных приближений.

Используя стандартные методы, из уравнения (7) находим

$$\theta = \left(h - \frac{\alpha\Omega}{\lambda} \right) x + \frac{\alpha\Omega}{\lambda^2} e^{\lambda(x-L/2)}, \quad (8)$$

причем граничные условия дают

$$j = \frac{\alpha\Omega}{\lambda} (1 - e^{-\lambda L}). \quad (9)$$

Заметим, что усредненное по времени значение ϕ_t равняется Ω и пропорционально постоянному напряжению на контакте. Таким образом, уравнение (9) можно интерпретировать как омическую цепь, что хорошо согласуется с экспериментальными результатами [3].

3.2. Линеаризованное уравнение. Для гармонических по Ωt членов получаем соотношение

$$\psi_{xx} - \psi_{tt} - \alpha\psi_t - \lambda\psi_x = \sin\phi_0, \quad (10)$$

где член $\psi \cos\phi_0$ опущен, поскольку он не дает вклада на частоте Ω .

Используя комплексные обозначения

$$\psi(x, t) = \text{Im}[\tilde{\psi}(x, t)] = \text{Im}[\hat{\psi}(x)e^{i\Omega t}], \quad (11)$$

можно преобразовать уравнение (10) к виду

$$\hat{\psi}_{xx} - \lambda\hat{\psi}_x + \beta^2\hat{\psi} = e^{i\theta}, \quad (12)$$

где $\beta^2 = \Omega^2 - i\alpha\Omega$.

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$\hat{\psi} = \frac{1}{2i\beta} [e^{r_1 x} F_1(x) - e^{r_2 x} F_2(x)] + Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}, \quad (13)$$

где $r_{1,2} = \lambda/2 \pm i\beta$ и

$$F_n(x) = \int_{-L/2}^x e^{i\theta - r_n \xi} d\xi, \quad n = 1, 2. \quad (14)$$

Первый член в уравнении (13) представляет собой “flux–flow” моду, т.е. плотный пакет солитонов, а два последних члена соответствуют плазменным волнам, распространяющимся в противоположных направлениях с критической скоростью $\Omega/\beta \simeq 1$.

Постоянные A и B можно определить из граничных условий (6):

$$\begin{aligned} A &= \frac{r_1 F_1(L/2)e^{i\beta L} - r_2 F_2(L/2)}{4r_1\beta \sin(\beta L)}, \\ B &= \frac{-r_1 F_1(L/2) + r_2 F_2(L/2)e^{-i\beta L}}{4r_2\beta \sin(\beta L)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя A и B в уравнение (13) и далее в уравнение (4), получаем приближенное решение уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям (3).

Определив решение $\hat{\psi}$, можно вернуться к не зависящей от времени части уравнения (2) и учесть поправку, возникающую в связи с наличием члена $\psi \cos\phi_0$. Легко проверить, что соответствующая поправка имеет вид $\text{Im}[\hat{\psi}e^{-i\theta}]/2$. Таким образом, снова решая уравнение (7) с добавлением указанной поправки в правую часть, получаем новое решение θ , которое, в свою очередь, порождает новое решение $\hat{\psi}$. Численные проверки показывают, что такой итерационный процесс быстро сходится, и при характерных параметрах контакта достаточно выполнить лишь несколько итераций для получения самосогласованного решения.

Здесь следует упомянуть, что член $\psi \cos\phi_0$ порождает также вторую гармонику по Ωt . Однако спектральный анализ численных данных, как и некоторые теоретические оценки, показывают, что высшие гармоники пренебрежимо малы и практически не влияют на решение при характерных значениях параметров контакта.

Рис. 2. Распределение магнитного поля в длинном контакте в два различных момента времени, полученное аналитически (сплошная линия) и численно (полые окружности) при $L = 10$, $h = 6$, $\alpha = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $j = 4$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

В данном разделе приведенные выше аналитические результаты сравниваются с прямым численным моделированием, основанным на неявной конечно-разностной схеме. Примеры распределения магнитного поля в длинном контакте ($L = 10$) в два произвольно выбранных момента времени приведены на рис. 2. Для тока смещения выбрано значение $j = 4$, соответствующее $\Omega \simeq 6.29$. Для остальных параметров предполагаются характерные экспериментальные значения: $h = 6$, $\alpha = 0.1$, $\lambda = 0.1$. Сплошная линия представляет собой приближенное аналитическое решение уравнения (2), изображенное как $\phi_x(x)$ при фиксированном t . Полые окружности показывают результаты численного моделирования для дискретного набора значений x .

На обоих рисунках легко видеть, что солитонный пакет в самом деле является плот-

ным, формируя в действительности колебания с малой амплитудой, сильно модулированные за счет интерференции с плазменными волнами (см. два последних члена в уравнении (13)). Осциллирующая часть решения наложена на фон ϕ_0 , производная которого по x не зависит от времени, но растет экспоненциально вместе с x (см. уравнение (8)), что позволяет удовлетворить асимметричные граничные условия (3). Согласие между аналитическими и численными результатами оказывается превосходным, и это означает, что выведенное выше приближенное аналитическое решение, несмотря на свою простоту, правильно воспроизводит все детали точного решения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлена простая модель, позволяющая вывести приближенное аналитическое решение для случая двумерного экспоненциально сужающегося джозефсоновского контакта. Решение дано в виде быстровращающегося зависящего от x фонов члена, сопровождаемого периодическими по времени квазилинейными членами.

Сравнение аналитических результатов и численных данных показывает, что данная модель удовлетворительно описывает динамические свойства джозефсоновских контактов экспоненциальной формы. В частности, правильно воспроизводятся все детали распределения магнитного поля в контакте.

Как отмечено выше, представленный здесь метод позволяет также определить некоторые макроскопические, непосредственно измеряемые величины, такие как полный ток смещения и постоянное напряжение на контакте. Такие более экспериментально-ориентированные результаты, равно как и другие физические аспекты джозефсоновских контактов экспоненциальной формы, не укладываются в рамки данной статьи и будут рассмотрены отдельно.

Благодарности. Работа была поддержана со стороны KBN, грант № 2P03B 09722.

Список литературы

- [1] *S. Pagano, C. Nappi, R. Cristiano et al.* A long Josephson function-based device for particle detection. In: Proc. of Conf. on Nonlinear Superconducting Devices and High T_c Materials (Capri, Italy, 8–13 October, 1994). Eds. R. D. Parmentier, R. F. Pedersen. Singapore: World Scientific, 1995. P. 437; *A. Benabdallah, J. G. Caputo, A. C. Scott.* Phys. Rev. B. 1996. V. 54. P. 16139; *G. Carapella, N. Martucciello, G. Costabile.* Phys. Rev. B. 2002. V. 66. P. 134531.
- [2] *A. Barone, G. Paterno.* Physics and Applications of the Josephson Effect. N.Y.: Wiley, 1982.
- [3] *M. Cirillo, N. Grønbech-Jensen, M. R. Samuelsen, M. Salerno, G. Verona Rinati.* Phys. Rev. B. 1998. V. 58. P. 12377.
- [4] *M. Jaworski.* Phys. Rev. B. 1999. V. 60. P. 7484; *M. Jaworski.* Supercond. Sci. Technol. 2004. V. 17. P. 327.
- [5] *M. Jaworski.* Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 97.
- [6] *M. Salerno, M. Samuelsen.* Phys. Rev. B. 1999. V. 59. P. 14653.