Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Конно, Х. Какухата, Новый тип решений с растяжением локального индукционного уравнения, возбужденных первоначально растянутыми вихревыми нитями, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 354–363

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1861>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 06:23:29

© 2005 г.

К. Конно*, Х. Какухата†

НОВЫЙ ТИП РЕШЕНИЙ С РАСТЯЖЕНИЕМ ЛОКАЛЬНОГО ИНДУКЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ, ВОЗБУЖДЕННЫХ ПЕРВОНАЧАЛЬНО РАСТЯНУТЫМИ ВИХРЕВЫМИ НИТЯМИ

Решается задача Коши для локального индукционного уравнения; начальные данные представляют собой растянутую вихревую нить. Новый тип решений с растяжением, возникающих при численном моделировании, получен аналитически.

Ключевые слова: локальное индукционное уравнение, вихревые нити, растянутые нити.

1. ВВЕДЕНИЕ

Динамика эластичной струны (нити), демонстрирующей растяжение и/или стягивание, является очень интересной задачей. Нерастянутая струна не описывается линейным уравнением, а подчиняется нелинейному уравнению [1]. С другой стороны, растянутая струна также описывается нелинейным уравнением [2], которое обладает интересными уединенными решениями. В своих недавних работах авторы исследовали движение растяжимых струн в трехмерном пространстве с точки зрения того, как ведет себя растянутая струна. В работе [3] был проведен численный анализ движения вихревой нити в случае, когда нить подчиняется локальному индукционному уравнению (ЛИУ) с поправками, порождающими ее растяжение. В работе [4] было рассмотрено интегрируемое уравнение, учитывающее два нелинейных эффекта, растяжение и стягивание. Это уравнение обладает солитонным решением, имеющим форму растяжимой петли. Было показано, что первопричиной устойчивости солитона является конкуренция двух упомянутых эффектов.

В настоящей работе рассматривается (численно и аналитически) движение растянутых вихревых нитей, описываемых ЛИУ

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{r}_s \times \mathbf{r}_{ss}, \quad (1)$$

*Department of Physics, College of Science and Technology, Nihon University, Tokyo 101-8308, Japan. E-mail: konno@phys.cst.nihon-u.ac.jp

†Toyama University, Toyama 930-8555, Japan

где t – время, s – параметр вдоль нити и $\mathbf{r}$ – радиус-вектор,

$$\mathbf{r} = (X, Y, Z). \quad (2)$$

ЛИУ часто переписывают с использованием репера Френе в виде

$$\mathbf{r}_t = \kappa \mathbf{b}, \quad (3)$$

где $\mathbf{b}$ – вектор бинормали, κ – кривизна. Заметим, что при использовании этого репера касательный вектор должен удовлетворять условию $|\mathbf{t}| = 1$. Однако уравнение (1), как видно, дает $(\mathbf{r}_s^2)_t = 0$, поэтому мы имеем условие

$$\mathbf{r}_s^2 = f(s). \quad (4)$$

Следовательно, величина $f(s)$ не обязана быть константой, но может быть функцией переменной s . Если $f(s)$ зависит от s , то (3) не эквивалентно (1).

Нас интересует проблема временной эволюции вихря, движение которого задается ЛИУ (1), в случае, когда в качестве начального условия выбирается локально растянутый вихрь, т.е. $|\mathbf{r}_s|$ есть функция от s . Одной из причин, побудивших нас провести численное моделирование, является желание исследовать различие между уравнениями (1) и (3). Мы рассматриваем три вида начальных условий: 1) растянутый вихревой солитон в трехмерном пространстве, 2) вихревая нить петлевого типа в двумерном пространстве и 3) вихревая нить кускового типа в двумерном пространстве.

Используя определенное в разделе 2 локальное растяжение, мы наблюдаем следующее. В случае начальных условий первого вида, после того как вихревой солитон удалится на большое расстояние, возникает растянутая нить нового типа, которая создает растяжение в той же области пространства, где оно было локализовано первоначально. В случае начальных условий второго вида вихревая нить петлевого типа вращается без распространения в пространстве, так что растяжение нити с течением времени остается локализованным в одной и той же области. В случае начальных условий третьего вида кусок нити быстро исчезает и вместо нее возникает растянутая нить нового типа, отвечающая первому случаю.

Для того чтобы объяснить результаты численного моделирования, мы ищем некоторый класс решений ЛИУ с помощью метода разделения переменных. Мы получаем зависящее от времени решение, вращающееся в определенной области пространства, а также решение, не зависящее от времени. Последнее решение описывает динамику нити, у которой координаты X и Y в (2) принимают постоянные значения, а величина $Z - s$ имеет форму кинка, что и создает растяжение нити.

Работа организована следующим образом. Во втором разделе определяется локальное растяжение вихревой нити. В разделе 3 представлены результаты численного моделирования. В разделе 4 получены точные решения уравнения (1) с помощью метода разделения переменных. В последнем разделе обсуждаются основные результаты работы.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНОГО РАСТЯЖЕНИЯ

Локальная длина $dl(s)$ вихревой нити задается формулой

$$dl = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2 + (dZ)^2}. \quad (5)$$

Используя параметр вдоль нити s , можно переписать последнюю формулу в виде

$$dl(s) = \sqrt{(X_s)^2 + (Y_s)^2 + (Z_s)^2} ds. \quad (6)$$

Тогда локальное растяжение l_s определяется формулой

$$l_s = \frac{dl}{ds} = \sqrt{(X_s)^2 + (Y_s)^2 + (Z_s)^2}. \quad (7)$$

Нить без растяжения отвечает случаю $l_s = 1$, нить с растяжением – случаю $l_s > 1$, а нить со стягиванием – случаю $l_s < 1$. Условие (4) предполагает, что существуют растянутые или стянутые вихревые нити.

Как будет видно из дальнейших рассуждений, такая мера локального растяжения дает мощное средство поиска новых мод, в то время как поиск мод на основе наблюдения временной эволюции профилей нитей представляет собой очень трудную задачу.

3. ЗАДАЧА КОШИ

3.1. Растянутый вихревой солитон. Введем растянутый вихревой солитон, динамика которого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} X &= A \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \sin(2\Omega + \delta) \operatorname{sch}(2\Theta + \epsilon), \\ Y &= -A \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \cos(2\Omega + \delta) \operatorname{sch}(2\Theta + \epsilon), \\ Z &= s - \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \operatorname{th}(2\Theta + \epsilon), \end{aligned} \quad (8)$$

где A – коэффициент, характеризующий растяжение. Если $A = 1$, то солитон (8) есть просто точное решение уравнения (1) в отсутствие растяжения. Величины Ω , Θ и постоянные δ , ϵ задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega &= \lambda_R s - \omega_R t, & \Theta &= \lambda_I s - \omega_I t, \\ \operatorname{tg} \delta &= -\frac{2\lambda_R \lambda_I}{\lambda_R^2 - \lambda_I^2}, & \epsilon &= -\frac{1}{2} \ln \frac{|c_0|^2}{4\lambda_I^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где c_0 – константа. Волновое число $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ и частота $\omega = \omega_R + i\omega_I$ связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = 2\lambda^2. \quad (10)$$

Локальное растяжение дается выражением

$$l_s^2 = 1 + \frac{4\lambda_I^2}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} (A^2 - 1) \left[\operatorname{sch}^2(2\Theta + \epsilon) - \frac{\lambda_I^2}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \operatorname{sch}^4(2\Theta + \epsilon) \right]. \quad (11)$$

Рис. 1. Временная эволюция (слева) и соответствующее локальное растяжение (справа) растянутого вихревого солитона в моменты времени $t = 0, 6, 12$ при $A = 0.8$ и $\lambda = 1.5 + i$.

Если $A = 1$, то растяжение отсутствует, при $A > 1$ в (8) имеет место локальное растяжение, а при $A < 1$ – стягивание.

Вычисления производились для трех значений $A = 1, 0.8, 1.2$ при $\lambda = 1.5 + i$ и $c_0 = 1$. На рис. 1 представлены профили и соответствующие локальные растяжения вихрей в моменты времени $t = 0, 6, 12$ для случая $A = 0.8$. Мы видим, что если вихревая нить изначально растянута, то вихревой солитон движется вдоль луча, однако область растяжения остается на одном и том же месте, как “замороженная”. Чтобы провести подробный анализ растяжения нити, на рис. 2 представлено поведение каждой из ее координат X, Y, Z около точки $s = 0$ в случае $A = 0.8$ при больших временах. Видно, что после того как вихревой солитон покинул рассматриваемую область, можно наблюдать возбуждение моды с постоянными значениями координат X, Y и величиной $Z - s$, имеющей форму кинка в области первоначальной локализации растяжения. Этот не зависящий от времени кинк создает растяжение нити. Сходная ситуация имеет место и в случае $A = 1.2$.

3.2. Вихревая нить петлевого типа. В качестве начальных условий рассмотрим двумерную вихревую нить петлевого типа

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= A \operatorname{sch} ks, \\ Z &= s - \operatorname{th} ks. \end{aligned} \quad (12)$$

Коэффициент A задает параметр растяжения. Локальное растяжение дается выражением

$$l_s^2 = 1 + (A^2 k^2 - 2k) \operatorname{sch}^2 ks - k^2 (A^2 - 1) \operatorname{sch}^4 ks. \quad (13)$$

Рис. 2. Временная эволюция растянутого вихревого солитона в области $-20 < s < 20$ в моменты времени $t = 6, 18, 30$ при $A = 0.8$.

Рис. 3. Временная эволюция (слева), вид сверху (в центре) и локальное растяжение (справа) вихря петлевого типа в моменты времени $t = 0, 6, 12$ при $A = 0.8$ и $k = 2$.

Вычисления производились при $A = 0.8, 1.2$ и $k = 2$; на рис. 3 представлены результаты для случая $A = 0.8$. В обоих случаях петля вращается в определенной области пространства с постоянной угловой скоростью как “пришпиленная”, так что область растяжения неподвижна (“заморожена”) в пространстве. Вид сверху показывает, что форма петли в случае $A = 0.8$ не испытывает деформаций.

3.3. Вихревая нить кускового типа. Двумерная вихревая нить кускового типа задается следующим образом:

$$\begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= A \operatorname{sch} ks, \\ Z &= s. \end{aligned} \quad (14)$$

Локальное растяжение дается выражением

$$l_s^2 = 1 + k^2 A^2 \operatorname{sch}^2 ks \operatorname{th}^2 ks. \quad (15)$$

На рис. 4 представлены результаты численного моделирования для случая $A = 1$, $k = 2$. С течением времени кусковая часть нити становится малой и наблюдается испускание малых вращающихся волн, которые распространяются в обоих направлениях. Отметим, что направления вращения испускаемых волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлении оси Z , противоположны, так что момент импульса сохраняется [5], при этом первоначально он равен нулю. На рис. 5 представлено поведение солитона около точки $s = 0$ при больших временах. Для величины $Z - s$ наблюдается небольшое плато в окрестности точки $s = 0$, которое дает два пика локального растяжения на рис. 4, “замороженные” в окрестности $s = 0$. Наблюдается также

Рис. 4. Временная эволюция (слева) и соответствующее локальное растяжение (справа) вихря кускового типа в моменты времени $t = 0, 6, 12$ при $A = 1$ и $k = 2$.

возбуждение моды с постоянными значениями координат X и Y . Эта мода с двумя кинками очень похожа на приведенную в п. 3.1 моду с одним кинком.

4. ТОЧНЫЕ РАСТЯНУТЫЕ РЕШЕНИЯ

Численные расчеты показывают, что существуют точные решения ЛИУ (1) нового типа. Используем метод разделения переменных: будем искать решения в виде

$$\begin{aligned} X(s, t) &= T_X(t)W_X(s), \\ Y(s, t) &= T_Y(t)W_Y(s), \\ Z(s, t) &= Z(s). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом, основываясь на результатах проведенного численного моделирования, мы предполагаем, что функция Z зависит только от переменной s . Подставляя (16) в (1), получаем следующие уравнения: для временной части решения

$$\begin{aligned} T_{X,t} &= c_1 T_Y, \\ T_{Y,t} &= c_2 T_X; \end{aligned} \quad (17)$$

для пространственной части решения

$$\begin{aligned} W_{Y,s}Z_{ss} - W_{Y,ss}Z_s &= c_1 W_X, \\ Z_s W_{X,ss} - Z_{ss}W_{X,s} &= c_2 W_Y, \\ W_{X,s}W_{Y,ss} - W_{X,ss}W_{Y,s} &= 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где c_1 и c_2 — константы.

Рис. 5. Временная эволюция вихря кускового типа в области $-20 < s < 20$ в моменты времени $t = 6, 18, 30$ при $A = 0.8$.

4.1. Вращающееся петлевое решение. Для того чтобы объяснить поведение вращающейся вихревой нити петлевого типа из раздела 3.2, будем искать решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} W_X(s) &= A_1 \operatorname{sch} ks, \\ W_Y(s) &= A_2 \operatorname{sch} ks, \end{aligned} \quad (19)$$

$$Z(s) = s - \operatorname{th} ks.$$

Подставляя эти равенства в уравнения (18), получаем

$$k = 2, \quad c_1 c_2 = -16, \quad A_2 = -\frac{c_1}{4} A_1. \quad (20)$$

Определим временную зависимость начальными условиями (12), так что при $t = 0$ решение совпадает с вихревой нитью петлевого типа в начальном положении. Тогда

$$\begin{aligned} X &= -A \sin 4t \operatorname{sch} 2s, \\ Y &= A \cos 4t \operatorname{sch} 2s, \\ Z(s) &= s - \operatorname{th} 2s, \end{aligned} \quad (21)$$

где A – константа. Поведение построенного точного решения идентично поведению вихревой нити петлевого типа: мы наблюдаем вращение в определенной области пространства, и область растяжения остается на одном месте.

4.2. Не зависящее от времени решение. Для того чтобы понять особенности мод, найденных в пп. 3.1 и 3.3, будем искать не зависящие от времени решения при $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ в уравнениях (17). Положим

$$\begin{aligned} W_X(s) &= A_1, \\ W_Y(s) &= A_2, \\ Z(s) &= s + Z_0 + \sum_{i=1}^n B_i \operatorname{th} k(s + s_{0i}), \end{aligned} \quad (22)$$

где A_1 , A_2 , Z_0 , B_i и s_{0i} – константы, n – число кинков для величины $Z - s$, найденное в ходе численного моделирования.

Рассмотрим сначала вихревое солитонное решение (8). Как показано на рис. 2, в случае $A = 0.8$ по мере увеличения времени значения координат X и Y стремятся к постоянным величинам, а величина $Z - s$ обнаруживает один кинк вблизи точки $s = 0$, который создает локальное растяжение l_s . Константы A_1 и A_2 соответствуют величинам X и Y , которые экстраполируются функцией $a_0 + a_1/t + a_2/t^2$. Получаем

$$\begin{aligned} X &= -0.00053, \\ Y &= -0.0031, \\ Z &= s + 0.31 - 0.10(1 + \operatorname{th} 1.7s). \end{aligned} \quad (23)$$

Аналогичным образом можно определить X , Y и Z в случае $A = 1.2$:

$$\begin{aligned} X &= -0.00086, \\ Y &= 0.0025, \\ Z &= s + 0.31 + 0.093(1 + \operatorname{th} 1.7s). \end{aligned} \quad (24)$$

Эти не зависящие от времени решения объясняют возникновение мод, возбуждаемых вихревыми солитонными решениями с растяжением.

Рис. 5 показывает, что для вихревой нити кускового типа из раздела 3.3 значения координат X и Y стремятся к постоянным величинам, а величина $Z - s$ имеет два кинка. В таком случае выражение для Z в (22) должно содержать два члена ($n = 2$). Предполагая, что асимптотическое поведение величин X и Y имеет прежний вид $a_0 + a_1/t + a_2/t^2$, получаем

$$\begin{aligned} X &= 0.016, \\ Y &= 0.016, \\ Z &= s + 0.15(\operatorname{th} 2.8(s - 0.5) + \operatorname{th} 2.8(s + 0.5)). \end{aligned} \quad (25)$$

Это решение хорошо описывает характерные особенности моды, возбуждаемой вихревой нитью кускового типа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, исходя из локальной длины нити, мы определили локальное растяжение. Далее, были рассмотрены результаты численного моделирования динамики солитона для трех начальных случаев, а именно, растянутого вихревого солитона в трехмерном пространстве, вихревой нити петлевого типа в двумерном пространстве и вихревой нити кускового типа в двумерном пространстве.

Мы обнаружили, что возбуждаются моды новых типов. Одна мода соответствует постоянным значениям координат X и Y и обладающей кинками величине $Z - s$, а другая отвечает вращающемуся в определенном месте пространства петлевому решению.

Для того чтобы объяснить такое поведение этих мод, с помощью метода разделения переменных были построены точные решения с растяжением. Были найдены не зависящие от времени моды (23)–(25). Эти решения описывают “замораживание” локального растяжения для случаев вихревого солитона и вихревой нити кускового типа. Найдено также точное решение (22), которое описывает фиксацию центра вращения и “замораживание” локального растяжения для случая вихревой нити петлевого типа. Полученные аналитические решения способствуют пониманию результатов численного эксперимента.

Указанные решения не могут иметь касательного вектора единичной длины, поскольку величина $|\partial \mathbf{r} / \partial s|$ не является постоянной, а зависит от s . В таком случае ЛИУ (1) не эквивалентно уравнению (3). Уравнение (1) должно обладать более широким классом решений, чем уравнение (3).

Список литературы

- [1] *L. J. F. Broer.* J. Eng. Math. 1970. V. 4. P. 195.
- [2] *V. Krylov, P. Rosenau.* Phys. Lett. A. 1996. V. 217. P. 31.
- [3] *K. Konno, H. Kakuwata.* Stretching of vortex filament with corrections. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II (Gallipoli, Lecce, Italy, 24 June – 3 July 2004). Eds. M. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. P. 273.
- [4] *К. Конно, Х. Какувата.* ТМФ. 2003. Т. 137. № 2. С. 201.
- [5] *Х. Какувата, К. Конно.* ТМФ. 2002. Т. 133. № 3. С. 419.