Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Мармо, Дж. Сcolariчи, А. Симони, Ф. Вентрилья, Классические и квантовые системы: альтернативные гамильтоновы описания, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 364–383

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1862>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 11:50:52

© 2005 г.

Дж. Мармо*, Дж. Сколарици[†],
А. Симони*, Ф. Вентрилья*,[‡]

КЛАССИЧЕСКИЕ И КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ: АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПИСАНИЯ

В полной аналогии с классической ситуацией (краткий обзор которой также приведен) разработано бигамильтоново описание квантовых систем. Также в полной аналогии с совместными пуассоновыми структурами проведен анализ совместных эрмитовых структур.

Ключевые слова: переход квантовая система – классическая система, квантовые бигамильтоновы системы, альтернативные эрмитовы структуры, биунитарные операторы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние тридцать лет было обнаружено, что большое число нелинейных эволюционных уравнений представляют собой интегрируемые системы [1]. В самом деле, почти во всех случаях интегрируемые системы допускают более чем одно гамильтоново описание (системы, допускающие альтернативные гамильтоновы описания, часто называются бигамильтоновыми) [2]. В квантовой механике исследования полной интегрируемости в квантовом случае были проведены в работах [3], [4].

С точки зрения Дирака [5], *“классическая механика должна представлять собой предельный случай квантовой механики. Нам следует тем самым ожидать, что важные понятия классической механики будут соответствовать важным понятиям квантовой механики, и, поняв общую природу соответствия между классической и квантовой механиками, мы можем надеяться получить законы и теоремы квантовой механики как простые обобщения результатов, хорошо известных в классической механике”*.

*Dipartimento di Scienze Fisiche, Universita' di Napoli Federico II, Complesso Universitario di Monte S. Angelo, Napoli, INFN, Sezione di Napoli, Italy. E-mail: marmo@na.infn.it, simoni@na.infn.it, ventriglia@na.infn.it

[†]Dipartimento di Fisica, Universita' di Lecce and INFN, Sezione di Lecce, Italy. E-mail: scolarici@le.infn.it

[‡]INFN, UdR di Napoli, Italy

Представляется естественным задать вопрос: какие альтернативные структуры в квантовой механике переходят в соответствующем пределе в альтернативные структуры в классической механике? В частности, можно ли установить аналог альтернативного гамильтонова описания в квантовом подходе?

Эта задача была исследована Вигнером в его двухстраничной статье в связи с коммутационными соотношениями для одномерного гармонического осциллятора [6] (см. также работы [7]–[10]).

Поскольку нам интересны сами структуры, а не их частные применения, здесь лучше рассмотреть самое простое описание без излишних технических деталей.

Чтобы ясно обозначить направления, которые необходимо исследовать в квантовом подходе, напомним вкратце, как осуществляется поиск альтернативных гамильтоновых описаний в классическом подходе, не касаясь проблемы существования совместных альтернативных скобок Пуассона, что могло бы привести к полной интегрируемости рассматриваемой системы.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 даются альтернативные гамильтоновы описания классических систем. Частный случай ньютоновских уравнений движения рассматривается в разделе 3, а содержательный пример рассматривается в деталях в разделе 4. Аналогичное квантовое описание приведено в разделе 5 с использованием подхода Вейля к переходу между классическими и квантовыми системами. Шредингеровская картина используется для исследования альтернативных описаний уравнений движения квантовых систем в конечномерном случае в разделе 6. Полученные при этом алгебраические результаты для инвариантных эрмитовых структур расширяются на случай бесконечномерных систем в конечной части работы. В частности, в разделе 7 приводятся некоторые из теорем Нады, задающие инвариантную эрмитову структуру, и группа биунитарных преобразований характеризуется исходя из двух эрмитовых структур, а простой пример, демонстрирующий возможности теории, приводится в разделе 8. Заключительные замечания содержатся в разделе 9.

2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПИСАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Почти во всех случаях полностью интегрируемые классические системы являются бигамильтоновыми. Динамическая система на многообразии M называется бигамильтоновой, если существуют две пуассоновы скобки, обозначаемые $\{.,.\}_{1,2}$, и соответствующие гамильтоновы функции $H_{1,2}$ такие, что

$$\frac{df}{dt} = \{H_1, f\}_1 = \{H_2, f\}_2 \quad \forall f \in \mathcal{F}(M). \quad (1)$$

С любой пуассоновой скобкой можно связать пуассонов тензор, задаваемый формулой

$$\{\xi_j, \xi_k\} = \Lambda_{jk}, \quad \Lambda = \Lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_k}. \quad (2)$$

Чтобы найти альтернативные гамильтоновы описания для данной динамической системы, связанной с векторным полем Γ на многообразии M с уравнениями движения

$$\frac{df}{dt} = L_{\Gamma} f, \quad (3)$$

необходимо решить следующее уравнение на пуассонов тензор Λ :

$$L_{\Gamma} \Lambda = 0. \quad (4)$$

Векторное поле Γ оказывается полностью интегрируемым, если можно найти два пуассоновых тензора Λ_1 и Λ_2 среди всех возможных альтернативных решений уравнения (4) такие, что произвольная линейная комбинация $\lambda_1 \Lambda_1 + \lambda_2 \Lambda_2$ удовлетворяет тождеству Якоби. В этом случае пуассоновы структуры называются совместными [11]. В частности, постоянные пуассоновы тензоры совместны.

Таким образом, если задано векторное поле Γ ,

$$\Gamma = \Gamma_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \quad (5)$$

то можно задаться целью найти пары (Λ, H) , позволяющие разложить Γ в произведение

$$\Gamma_j = \Lambda_{jk} \frac{\partial H}{\partial \xi_k}, \quad (6)$$

с наложенным дополнительным условием (тождеством Якоби)

$$\Lambda_{jk} \partial_k \Lambda_{lm} + \Lambda_{lk} \partial_k \Lambda_{mj} + \Lambda_{mk} \partial_k \Lambda_{jl} = 0. \quad (7)$$

Дальнейшие рассмотрения относятся к случаю, когда уравнения движения являются уравнениями второго порядка.

3. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПИСАНИЯ УРАВНЕНИЙ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА

Напомним, что, в соответствии с утверждением Дайсона [12], [13], Р. Фейнман интересовался сходной проблемой с наложенным дополнительным условием локализуемости, которое, будучи выражено в терминах координат и импульсов (x_j, p_j) , имеет вид

$$\{x_j, x_k\} = 0. \quad (8)$$

Задавшись целью найти гамильтоновы описания дифференциальных уравнений второго порядка, мы таким образом получим

$$\dot{x}_j = \{H, x_j\}, \quad (9)$$

$$\ddot{x}_j = \{H, \{H, x_j\}\} = f_j(x, \dot{x}). \quad (10)$$

Надо решить это уравнение для пары $(\{\cdot, \cdot\}, H)$; ясно, что такая задача весьма нетривиальна. Если наложить условие локализуемости

$$\{x_j, x_k\} = 0 \quad (11)$$

вместе с дополнительным требованием (инвариантностью относительно галилеевых бустов)

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} \{\cdot, \cdot\} = 0, \quad (12)$$

то задача существенно упростится.

В самом деле, если начать с уравнения

$$\dot{x}_j = \{H, x_j\} \quad (13)$$

и вычислить производную по $\dot{x}_k$, то получим

$$\delta_{jk} = \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{x}_k \partial \dot{x}_m} \{\dot{x}_m, x_k\}. \quad (14)$$

Видно, что скобка невырождена и гессиан гамильтониана H также невырожден. Теперь можно использовать преобразование лежандровского типа, для того чтобы перейти от гамильтонова описания в терминах H к лагранжеву описанию в терминах $\mathcal{L}$. Соответствующая задача, выраженная в терминах функций Лагранжа, линейризуется, и мы приходим к следующему уравнению на $\mathcal{L}$:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j \partial \dot{x}_m} f_m(x, \dot{x}) + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j \partial x_m} \dot{x}_m - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = 0. \quad (15)$$

Формулировка задачи в данной форме восходит к работам Гельмгольца [14].

4. ПРИМЕР ПАРАДИГМЫ

Рассмотрим простой пример, оказывающийся полезным также и при описании соответствующей квантовой задачи [15].

Рассмотрим на многообразии $M = \mathbb{R}^{2n}$ поле

$$\Gamma = \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(p_k \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial p_k} \right), \quad \lambda_k \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Поле Γ представляет собой динамическое векторное поле анизотропного гармонического осциллятора с собственными частотами λ_k . Поскольку форма $\frac{\partial}{\partial p_k} \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}$ инвариантна относительно потока, ассоциированного с полем Γ , то для любой константы движения $F(x, p)$ 2-форма

$$\omega_F = \sum_{k=1}^n \mu_k d \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \right) \wedge d \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \right), \quad \mu_k \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

оказывается инвариантом:

$$L_{\Gamma}\omega_F = 0. \quad (18)$$

В случае одномерного гармонического осциллятора функция

$$F(q, p) = (p^2 + q^2)(1 + f(p^2 + q^2))^2 \quad (19)$$

задает наиболее общую инвариантную 2-форму, параметризуемую выражением $f(p^2 + q^2)$. Например,

$$F(q, p) = \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(p^2 + q^2)\right\} \quad (20)$$

приводит к форме

$$\omega_F = dP \wedge dQ, \quad P = \lambda p F, \quad Q = \lambda q F, \quad (21)$$

в которой соотношение

$$\{P, Q\} = \lambda^2 F^2(q, p) [1 + \lambda(p^2 + q^2)] \{p, q\} \quad (22)$$

задает пуассонову скобку для новых переменных, выраженных через исходные переменные, а это показывает, что преобразование не каноническое. Подчеркнем, что уравнения движения линейны по новым переменным:

$$\frac{d}{dt}P = -Q, \quad \frac{d}{dt}Q = P, \quad (23)$$

равно как и по исходным переменным.

Тем самым мы получили, что уравнения линейны в двух различных координатных системах, связанных нелинейным преобразованием координат. Заметим, что в каждой из координатных систем, например в системах (p, q) и (P, Q) , тензорные поля

$$\begin{aligned} \omega &= dp \wedge dq, \\ g &= dp \otimes dp + dq \otimes dq, \quad \Delta = p \frac{\partial}{\partial p} + q \frac{\partial}{\partial q} \end{aligned} \quad (24)$$

и

$$\begin{aligned} \omega' &= dP \wedge dQ, \\ g' &= dP \otimes dP + dQ \otimes dQ, \quad \Delta' = P \frac{\partial}{\partial P} + Q \frac{\partial}{\partial Q} \end{aligned} \quad (25)$$

сохраняются в процессе динамической эволюции.

В каждой системе координат имеются альтернативные реализации как линейной не-однородной симплектической группы, сохраняющей соответствующую симплектическую структуру, так и линейной группы вращений. Их пересечения задают альтернативные реализации унитарной группы. Все эти линейные реализации связаны нелинейными преобразованиями.

Как сформулировать аналогичную картину в квантовом случае?

На классическом уровне динамическое векторное поле Γ дифференцирует произведение в ассоциативной алгебре $\mathcal{F}(M)$ и бинарное произведение, задаваемое скобкой Пуассона.

Возможно ли задать альтернативные “скобки Ли” и рассмотреть сходный подход в квантовой теории?

К сожалению, такой простой подход не работает, когда алгебра ассоциативна и максимально некоммутативна – скобка Ли, согласованная с ассоциативным произведением, с необходимостью пропорциональна коммутатору, т.е. имеет вид $\lambda(AB - BA)$ [5], [16].

Чтобы видоизменить скобку Ли, нужно изменить также ассоциативное произведение [3], [17], [18].

Чтобы понять, как искать альтернативные описания квантовых систем, удобно рассмотреть подход Вейля к квантованию, так как в этом подходе симплектическая структура играет хорошо понимаемую роль.

5. КВАНТОВЫЕ СИСТЕМЫ В ПОДХОДЕ ВЕЙЛЯ

Пусть задано симплектическое векторное пространство (E, ω) . Тогда система Вейля [19], [20], [4] определяется как сильно непрерывное отображение из E во множество унитарных преобразований некоторого гильбертова пространства $\mathbb{H}$:

$$W: E \rightarrow U(\mathbb{H}), \quad (26)$$

при этом

$$W(e_1)W(e_2)W^\dagger(e_1)W^\dagger(e_2) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\omega(e_1, e_2)\right\}\mathbb{I}, \quad (27)$$

где $\mathbb{I}$ – оператор тождественного преобразования.

Таким образом, система Вейля задает проективное унитарное представление абелевой векторной группы E , коцикл которой задается симплектической структурой.

Существование систем Вейля для конечномерных симплектических векторных пространств можно легко доказать, и оно связано со знаменитой теоремой фон Неймана о единственности канонических коммутационных соотношений [21], [22].

Рассмотрим лагранжево подпространство L и ассоциированный изоморфизм

$$E \rightleftharpoons L \oplus L^* = T^*L. \quad (28)$$

Рассмотрим на L функции, квадратично интегрируемые по трансляционно-инвариантной мере Лебега на L . Расщепляя E , можно определить $e = (\alpha, x)$, и если положить

$$W((0, x)\Psi)(y) = \Psi(x + y), \quad (29)$$

$$W((\alpha, 0)\Psi)(y) = e^{i\alpha(y)}\Psi(y), \quad (30)$$

$$x, y \in L, \quad \alpha \in L^*, \quad \Psi \in L^2(L, d^n y), \quad (31)$$

то становится очевидным, что $W(e)$ – унитарные операторы и, более того, они удовлетворяют условию (27), в котором ω представляет собой каноническую форму на T^*L .

Из свойства сильной непрерывности следует возможность использования теоремы Стоуна для построения инфинитезимальных генераторов $R(e)$, таких что

$$W(e) = e^{iR(e)} \quad \forall e \in E \quad (32)$$

и $R(\lambda e) = \lambda R(e)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Выбирая комплексную структуру J на E ,

$$J: E \rightarrow E, \quad J^2 = -1, \quad (33)$$

можно определить операторы рождения и уничтожения с помощью формул

$$a(e) = \frac{1}{\sqrt{2}}(R(e) + iR(Je)), \quad (34)$$

$$a^\dagger(e) = \frac{1}{\sqrt{2}}(R(e) - iR(Je)). \quad (35)$$

С использованием этой комплексной структуры на E можно ввести внутреннее произведение на E :

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \omega(Je_1, e_2) - i\omega(e_1, e_2). \quad (36)$$

Операторы рождения и уничтожения тем самым связаны с кэлеровой структурой на E [23]. Метод использования операторов рождения и уничтожения особенно удобен для установления соотношений между альтернативными описаниями на гильбертовом пространстве (пространстве Фока) и альтернативными описаниями на пространстве наблюдаемых.

С помощью отображения Вейля можно установить соответствие между автоморфизмами на пространстве операторов и элементами S симплектической линейной группы, действующей на (E, ω) , с помощью формулы

$$\nu_S(W(e)) = W(Se) = U_S^\dagger W(e) U_S. \quad (37)$$

На уровне действия инфинитезимальных генераторов унитарной группы получим

$$U_S^\dagger R(e) U_S = R(Se). \quad (38)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку определяющее соотношение для U_S квадратично, на самом деле мы имеем здесь дело с метаплектической, а не с симплектической группой [24]. Это различие не играет роли в нашем случае.

Отображение Вейля расширяется до функций на $T^*L \rightleftharpoons E$. Для этого определим сначала симплектическое преобразование Фурье [24] от $f \in \mathcal{F}(E)$:

$$f(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \tilde{f}(\alpha, x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\alpha q - xp)\right\} d\alpha dx, \quad (39)$$

а затем сопоставим этому преобразованию оператор $\hat{A}_f$, задаваемый уравнением

$$\hat{A}_f = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \tilde{f}(\alpha, x) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}(\alpha\hat{Q} - x\hat{P})\right\} d\alpha dx. \quad (40)$$

Обратно, каждому оператору A , действующему на $\mathbb{H}$, можно поставить в соответствие функцию f_A на симплектическом пространстве E с помощью формулы

$$f_A(e) = \text{Tr } AW(e); \quad (41)$$

это отображение называется отображением Вигнера. Если A задает чистое состояние, т.е. проекционный оператор единичного ранга, то соответствующая функция есть функция Вигнера. На пространстве $\mathcal{F}(E)$ можно ввести новое произведение функций с помощью формулы

$$(f_A * f_B)(e) = \text{Tr } ABW(e). \quad (42)$$

Тем самым показано, что альтернативные симплектические структуры на пространстве E порождают альтернативные ассоциативные произведения на $\mathcal{F}(E)$, все они оказываются некоммутативными.

Динамику на $\mathcal{F}(E)$ можно задать в терминах такого некоммутативного произведения:

$$i\hbar \frac{df_A}{dt} = f_H * f_A - f_A * f_H. \quad (43)$$

В рамках этого подхода можно достаточно просто определить “подходящий предел” при переходе от квантового описания к классическому, если заметить, что предельный переход

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \left\{ -\frac{i}{\hbar} (f_A * f_B - f_B * f_A) \right\} = \{f_A, f_B\} \quad (44)$$

(когда таковой существует) задает пуассонову скобку на $\mathcal{F}(E)$.

Другое выражение для этого произведения в терминах пуассонова тензора Λ имеет вид

$$(f * g)(x, y) = f(x, y) \exp \left\{ i \frac{\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial y}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial y}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial x}} \right) \right\} g(x, y), \quad (45)$$

где, как обычно, $\overleftarrow{\partial}/\partial\xi$ и $\overrightarrow{\partial}/\partial\xi$ действуют соответственно слева и справа [25]–[28].

Теперь ясно, что, используя, например, альтернативные скобки Пуассона, полученные для одномерного гармонического осциллятора в разделе 4, можно записать

$$(f * g)(q, p) = f(q, p) \exp \left\{ i \frac{\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \right) \right\} g(q, p) \quad (46)$$

или

$$(f * g)(Q, P) = f(Q, P) \exp \left\{ i \frac{\hbar}{2} \left(\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial Q}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial P}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial P}} \overrightarrow{\frac{\partial}{\partial Q}} \right) \right\} g(Q, P). \quad (47)$$

Таким способом можно получить два альтернативных ассоциативных произведения на $\mathcal{F}(E)$, причем оба они допускают динамическое векторное поле Γ гармонического осциллятора, действующее дифференцированием.

В картине Шредингера гильбертова пространства квадратично интегрируемых функций на прямой в том же смысле можно использовать или меру Лебега dq , инвариантную относительно сдвигов, порождаемых $\partial/\partial q$, или меру

$$dQ = \lambda d\left(q \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(p^2 + q^2)\right\}\right), \quad (48)$$

которая инвариантна относительно сдвигов, порождаемых оператором $\partial/\partial Q$.

Подводя итог, заметим, что с использованием подхода Вейля удастся показать, что поиск альтернативных гамильтоновых описаний квантовых систем можно свести к поиску альтернативных внутренних произведений на пространстве состояний или к поиску альтернативных ассоциативных произведений на пространстве наблюдаемых. В следующих разделах будет исследован вопрос о существовании альтернативных описаний в картине Шредингера.

Предварительные результаты относительно альтернативных описаний в картине Гейзенберга можно найти в работе [3].

6. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ И АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ОПИСАНИЯ

Уравнения движения в несущем пространстве состояний задаются уравнением Шредингера (мы полагаем $\hbar = 1$):

$$i \frac{d}{dt} \psi = H \psi. \quad (49)$$

Сначала ограничимся конечным n -мерным комплексным векторным пространством $\mathbb{H}$. Динамика задается линейным оператором H . Чтобы отыскать альтернативные описания, найдем все скалярные произведения на $\mathbb{H}$, инвариантные относительно динамической эволюции.

Если определить $\Gamma: \mathbb{H} \rightarrow T\mathbb{H}$ как отображение $\psi \rightarrow (\psi, -iH\psi)$, то следует разрешить условие $L_\Gamma h = 0$, где h — неизвестная эрмитова структура на $\mathbb{H}$.

Заметим, что любая структура h на $\mathbb{H}$ задает евклидову метрику g , симплектическую форму ω и комплексную структуру J на вещественной реализации $\mathbb{H}^R$ комплексного пространства $\mathbb{H}$:

$$h(., .) =: g(., .) + ig(J., .). \quad (50)$$

Мнимая часть h представляет собой симплектическую структуру ω на вещественном векторном пространстве $\mathbb{H}^R$:

$$\omega(., .) := g(J., .). \quad (51)$$

Таким образом, любые две из предшествующих структур будут определять третью структуру, тем самым задавая *допустимую* тройку (g, J, ω) .

Ясно, что условие $L_\Gamma h = 0$ эквивалентно условиям $L_\Gamma \omega = 0$, $L_\Gamma g = 0$ и $L_\Gamma J = 0$, так что условие $L_\Gamma h = 0$ можно разрешить, начиная с условия $L_\Gamma \omega = 0$.

Чтобы решить последнее уравнение, введем бивекторное поле Λ , связанное с пуассоновыми скобками, определяемыми формой ω стандартным образом [29], [30]. Векторное поле Γ тогда факторизуется:

$$\Gamma = \Lambda^{lk} \frac{\partial f_H}{\partial \xi^k} \frac{\partial}{\partial \xi^l}. \quad (52)$$

Матрица Λ^{lk} удовлетворяет условиям

$$\Lambda^{lk} = -\Lambda^{kl}, \quad \Lambda^{lk} \partial_k \Lambda^{rs} + \Lambda^{rk} \partial_k \Lambda^{sl} + \Lambda^{sk} \partial_k \Lambda^{lr} = 0. \quad (53)$$

Так как Γ линейно и Λ^{lk} — постоянные величины, величина f_H должна быть квадратичной, $f_H = (1/2) \xi^k H_{km} \xi^m$, и, используя представление $\Gamma = A_l^k \xi^k \partial / \partial \xi^l$, получим, что необходимое и достаточное условие для гамильтоновости поля Γ имеет вид

$$A = \Lambda H. \quad (54)$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Все альтернативные гамильтоновы описания поля Γ задаются всеми возможными факторизациями A в произведение антисимметричной матрицы Λ и симметричной матрицы H . Более того, легко показать, что имеют место следующие эквивалентности:*

$$\begin{aligned} A\Lambda + \Lambda A^{\text{tr}} &= 0 \Leftrightarrow L_\Gamma \Gamma = 0, \\ H A + A^{\text{tr}} H &= 0 \Leftrightarrow L_\Gamma H = 0, \\ \omega A + A^{\text{tr}} \omega &= 0 \Leftrightarrow L_\Gamma \omega = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

где ω — матрица, задающая симплектическую структуру.

В работе [31] было показано, что необходимым условием существования такой факторизации (уравнение (54)) для A является $\text{Tr } A^{2k+1} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Используя $(1-1)$ -тензорное поле $T = A_k^l d\xi^k \otimes \partial / \partial \xi^l$, можно получить попарно коммутирующие гамильтоновы векторные поля $T^{2k}(\Gamma)$ с $[T^{2k}(\Gamma), T^{2r}(\Gamma)] = 0$.

Предполагая, что найдена факторизация для A , например $A_m^l = \Lambda^{ls} H_{sm}$, можно исследовать проблему существования инвариантной эрмитовой структуры h на $\mathbb{H}$. В случае, когда $\det A \neq 0$, если матрица H_{sm} положительно определена, ее можно использовать в качестве метрического тензора g , для того чтобы задать (евклидово) произведение на $\mathbb{H}^R$. Тогда можно выписать полярное разложение оператора A : $A = J|A|$, где, как обычно, $|A|$ определено как $\sqrt{A^\dagger A}$. Поскольку $\text{Ker } A = \emptyset$, структура J однозначно определена и g -ортогональна: $J^\dagger J = J J^\dagger = 1$.

Структура J обладает следующими свойствами:

а) J коммутирует с A и $|A|$. Это следует из того, что $J = A \frac{1}{\sqrt{A^\dagger A}} = A \frac{1}{\sqrt{-A^2}}$ представляет собой функцию только от A ;

б) $J^2 = -1$. Это следует из того, что $A = J|A| = A = |A|J$, в то время как $-A = -J|A| = A^\dagger = J^\dagger|A|$; умножение на J при этом дает $|A| = -J^2|A|$, и искомый результат следует из соотношения $\text{Ker } A = \emptyset$.

Вырожденный случай $\det A = 0$ требует дополнительной работы, которая была проделана в [32].

Если задана инвариантная комплексная структура J , то становится возможным определить инвариантную эрмитову структуру с помощью инвариантной положительно-определенной симметричной матрицы H_{st} и комплексной структуры J . Тем самым доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Всякое векторное поле Γ , допускающее гамильтонову факторизацию вида ΛH , сохраняет эрмитову структуру, если только гамильтонова функция f_H положительно определена.*

Таким образом, на конечномерных комплексных векторных пространствах квантовые эволюции задаются гамильтоновыми векторными полями, ассоциированными с квадратичными гамильтоновыми функциями, которые положительно определены. Поскольку всякая гамильтонова функция задает евклидово произведение, понятно, что поле Γ одновременно порождает как симплектическое, так и ортогональное преобразование, тем самым порождая унитарное преобразование.

Далее, с помощью способа, позволяющего построить J из A , можно показать [32], что $(1 - 1)$ -тензорное поле, ассоциированное с матрицей J , удовлетворяет свойству $J(\Gamma) = -\Delta$, где Δ – векторное поле Лиувилля, $\Delta = \xi^k \partial / \partial \xi^k$. С использованием дилатации Δ можно записать квадратичную гамильтонову функцию в бескоординатной форме:

$$\frac{1}{2}h(\Delta, \Delta) = \frac{1}{2}g(\Delta, \Delta) =: g. \quad (56)$$

В этом месте, в полной аналогии с совместными пуассоновыми структурами [33]–[35], можно ввести и проанализировать понятие “совместных эрмитовых структур”, или, более точно, совместных троек (g_a, J_a, ω_a) , $a = 1, 2$.

Рассмотрим две допустимые тройки (g_a, J_a, ω_a) , $a = 1, 2$, на $\mathbb{H}^R$ и соответствующие эрмитовы структуры $h_a = g_a + i\omega_a$. Подчеркнем, что h_a есть эрмитова форма на пространстве $\mathbb{H}_a$, которое представляет собой комплексификацию $\mathbb{H}^R$ с помощью J_a , так что в общем случае h_1 и h_2 не являются эрмитовыми структурами на *одном и том же* комплексном векторном пространстве.

Более того, рассмотрим ассоциированные квадратичные функции

$$g_1 = \frac{1}{2}g_1(\Delta, \Delta), \quad g_2 = \frac{1}{2}g_2(\Delta, \Delta), \quad (57)$$

которым отвечают векторные поля Γ_1 и Γ_2 , связанные с ними посредством соответствующих форм ω_1 и ω_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Две эрмитовы структуры h_1 и h_2 называются совместными, если

$$L_{\Gamma_1} h_2 = L_{\Gamma_2} h_1 = 0. \quad (58)$$

Эквивалентно:

$$L_{\Gamma_1} \omega_2 = L_{\Gamma_2} \omega_1 = 0, \quad L_{\Gamma_1} g_2 = L_{\Gamma_2} g_1 = 0. \quad (59)$$

Из условия

$$L_{\Gamma_2}(i_{\Gamma_1} \omega_1) = i_{[\Gamma_2, \Gamma_1]} \omega_1 = 0 \quad (60)$$

непосредственно следует, что $[\Gamma_2, \Gamma_1] = 0$. Более того, поскольку задание симплектической структуры ω определяет скобку Пуассона $\{f, g\} = \omega(X_g, X_f)$, такую что $i_{X_f} \omega = df$, мы также получим

$$\{g_1, g_2\}_1 = 0 \quad \text{и} \quad \{g_1, g_2\}_2 = 0, \quad (61)$$

где скобки $\{.,.\}_{1,2}$ ассоциированы с формами $\omega_{1,2}$.

Из двух совместных эрмитовых структур на вещественном пространстве $\mathbb{H}^R$ можно построить $(1-1)$ -тензорные поля $G = g_1^{-1} \circ g_2$, $T = \omega_1^{-1} \circ \omega_2$ и J_1, J_2 . Эти четыре $(1-1)$ -тензорных поля порождают абелеву алгебру и инвариантны относительно действия Γ_1 и Γ_2 . Можно также доказать, что $G = J_1 \circ T \circ J_2^{-1} = -J_1 \circ T \circ J_2$.

Легко вывести следующие свойства:

$$g_1(Gx, y) = g_1(x, Gy) = g_2(x, y),$$

$$g_2(Gx, y) = g_2(x, Gy) = g_1^{-1}(g_2(x, .), g_2(y, .)); \quad (62)$$

$$g_1(Tx, y) = g_1(x, Ty); \quad g_2(Tx, y) = g_2(x, Ty); \quad (63)$$

$$g_1(x, J_2 y) + g_1(J_2 x, y) = 0; \quad g_1(J_2 x, J_2 y) = g_1(x, y),$$

$$g_2(x, J_1 y) + g_2(J_1 x, y) = 0; \quad g_2(J_1 x, J_1 y) = g_2(x, y). \quad (64)$$

Поэтому приходим к следующему утверждению [32].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $(1-1)$ -тензорные поля G , T , J_1 и J_2 задают набор взаимно коммутирующих линейных операторов, среди которых G и T самосопряжены, а J_1 и J_2 антисамосопряжены относительно обоих метрических тензоров. Более того, имеют место ортогональные преобразования для обоих метрических тензоров.

Можно рассмотреть разложения на $2n$ -мерном векторном пространстве $\mathbb{H}^R$, следующие из существования двух совместных эрмитовых структур.

Пространство $\mathbb{H}^R$ раскладывается в прямую сумму собственных подпространств $\mathbb{H}^R = \bigoplus_k \mathbb{H}_{\lambda_k}^R$, где λ_k – различные собственные значения матрицы G .

В соответствии с вышесказанным сумма представляет собой ортогональную сумму по отношению к обоим метрикам, и в каждом подпространстве $\mathbb{H}_{\lambda_k}^R$ имеем $G = \lambda_k \mathbb{I}_k$, где

$\mathbb{I}_k$ — единичная матрица в подпространстве $\mathbb{H}_{\lambda_k}^R$. Помимо условия совместности, оператор T задает более мелкое ортогональное разложение каждого подпространства $\mathbb{H}_{\lambda_k}^R$ вида

$$\mathbb{H}_{\lambda_k}^R = \bigoplus_r W_{\lambda_k, \mu_{k,r}}, \quad (65)$$

где $\mu_{k,r}$ — различные собственные значения матрицы T в подпространстве $\mathbb{H}_{\lambda_k}^R$.

В свою очередь, комплексные структуры коммутируют как с G , так и с T , и каждая из этих структур тем самым оставляет инвариантным каждое подпространство $W_{\lambda_k, \mu_{k,r}}$. Теперь можно реконструировать с использованием g_α и J_α две симплектические структуры. Они имеют блочно-диагональный вид в разложении пространства $\mathbb{H}^R$, и на каждом из подпространств $W_{\lambda_k, \mu_{k,r}}$ они имеют вид

$$g_1 = \lambda_k g_2, \quad \omega_1 = \mu_{k,r} \omega_2. \quad (66)$$

Таким образом, в тех же подпространствах получим

$$J_1 = g_1^{-1} \omega_1 = \frac{\mu_{k,r}}{\lambda_k} J_2.$$

Из равенства $J_1^2 = J_2^2 = -1$ следует, что $(\mu_{k,r}/\lambda_k)^2 = 1$, а потому $\mu_{k,r} = \pm \lambda_k$ и $\lambda_k > 0$. При этом индекс r может принимать только два значения, отвечающие $\pm \lambda_k$. Тем самым доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если две эрмитовы структуры $h_1 = g_1 + i\omega_1$, $h_2 = g_2 + i\omega_2$ совместны, то векторное пространство $\mathbb{H}^R$ разлагается в двойную ортогональную сумму:*

$$\bigoplus_{k=1, \dots, r, \alpha=\pm 1} W_{\lambda_k, \alpha \lambda_k}, \quad (67)$$

где нижний индекс $k = 1, \dots, r \leq 2n$ маркирует собственные подпространства $(1-1)$ -тензора $G = g_1^{-1} \circ g_2$, отвечающие его различным собственным значениям $\lambda_k > 0$, в то время как тензор $T = \omega_1^{-1} \circ \omega_2$ диагонален и имеет собственные значения $\pm \lambda_k$ на подпространствах $W_{\lambda_k, \pm \lambda_k}$, на каждом из которых имеют место равенства

$$g_1 = \lambda_k g_2, \quad \omega_1 = \pm \lambda_k \omega_2, \quad J_1 = \pm J_2. \quad (68)$$

Поскольку ни одна из симплектических форм не вырождена, размерность каждого из подпространств $W_{\lambda_k, \pm \lambda_k}$ с необходимостью оказывается четной.

Если даны две допустимые тройки (g_a, J_a, ω_a) , $a = 1, 2$, на $\mathbb{H}^R$, то можно рассмотреть соответствующие эрмитовы структуры $h_a = g_a + i\omega_a$. Подчеркнем, что h_a представляет собой эрмитову форму на $\mathbb{H}_a$, которая есть комплексификация формы $\mathbb{H}^R$ посредством J_a , так что в общем случае h_1 и h_2 не являются эрмитовыми структурами на одном и том же комплексном векторном пространстве. Когда тройки совместны, имеет место разложение пространства в формуле (67), а пространство $\mathbb{H}^R$ может быть разложено в прямую сумму подпространств $\mathbb{H}_R^+$ и $\mathbb{H}_R^-$, на которых выполнены соответствующие равенства: $J_1 = +J_2$ и $J_1 = -J_2$. Чтобы сравнить h_1 и h_2 , необходимо

фиксировать комплексификацию пространства $\mathbb{H}^R$, например $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}_1^+ \oplus \mathbb{H}_1^-$. Тогда с использованием ортонормального базиса $\{e_{k+}\}$ и $\{e_{k-}\}$ можно записать

$$\begin{aligned} h_1(x, y) &= \sum_{k+} x_{k+}^* y_{k+} + \sum_{k-} x_{k-}^* y_{k-}, \\ h_2(x, y) &= \sum_{k+} \lambda_{k+} x_{k+}^* y_{k+} + \sum_{k-} \lambda_{k-} x_{k-}^* y_{k-}. \end{aligned} \quad (69)$$

Ясно, что h_2 не является эрмитовой структурой, поскольку она ни линейна, ни антилинейна на полном пространстве $\mathbb{H}_1$.

Теперь возможно рассмотреть случай поля Γ , которое оставляет инвариантными обе совместные тройки. В результате разложение в прямую сумму пространства в выражении (67) инвариантно относительно действия поля Γ . Более того, поле Γ задает как биортогональное, так и бисимплектическое преобразования на $\mathbb{H}^R$, а потому представляет собой генератор унитарных преобразований на $\mathbb{H}_a$, $a = 1, 2$.

7. ПОИСК ИНВАРИАНТНЫХ ЭРМИТОВЫХ СТРУКТУР

В этом разделе исследуется уравнение

$$L_\Gamma h = 0, \quad (70)$$

где пространство носителя представляет собой бесконечномерное гильбертово пространство.

Как обычно в физических проявлениях, динамическое векторное поле Γ , входящее в уравнение Шредингера, соответствует неограниченным операторам, откуда вытекает, что поиск решений условий $L_\Gamma h = 0$ сильно затруднен из-за серьезных проблем с определением области. Поэтому удобно искать решения для эрмитовых структур уравнения

$$\phi_t^* h = h \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (71)$$

т.е. эрмитовых структур, инвариантных относительно действия однопараметрической группы линейных преобразований, описывающих динамическую эволюцию.

Можно рассмотреть в более общих терминах задачу о том, каковы для данного обратимого преобразования $T: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ условия существования инвариантной эрмитовой структуры h такой, что

$$h(x, y) = h(Tx, Ty). \quad (72)$$

Как хорошо известно, в случае бесконечной размерности топология векторного пространства состояний представляет собой дополнительный ингредиент теории, который следует определять явно. Будем поэтому предполагать, что $\mathbb{H}$ представляет собой гильбертово пространство с некоторой базовой эрмитовой структурой h_0 , которая не обязана быть инвариантной относительно действия T . Мы требуем, чтобы преобразование T , равно как и обратное к нему, были непрерывными в топологии, задаваемой структурой h_0 или любой другой эрмитовой структурой, топологически эквивалентной h_0 , что позволяет рассматривать ограниченные состояния.

Поиск инвариантных эрмитовых структур на $\mathbb{H}$, топологически эквивалентных h_0 , дает предварительный результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если структуры h_1 и h_0 задают одну и ту же топологию на $\mathbb{H}$, то имеется самосопряженный положительно-определенный ограниченный оператор Q такой, что

$$h_1(x, y) = h_0(Qx, Qy). \quad (73)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы структуры h_1 и h_0 задавали одну и ту же топологию на пространстве $\mathbb{H}$, необходимо, чтобы существовали две вещественные положительные константы A, B такие, что

$$Ah_1(x, x) \leq h_0(x, x) \leq Bh_1(x, x) \quad \forall x \in \mathbb{H}.$$

Применяя теорему Риса об ограниченных линейных функционалах, непосредственно получим, что существует ограниченный самосопряженный (по отношению к обеим эрмитовым структурам) оператор, неявно задаваемый уравнением

$$h_1(x, y) = h_0(Gx, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Из положительной определенности оператора G вытекает, что $G = Q^2$, откуда сразу следует утверждение предложения.

Теперь можно сформулировать несколько результатов, полученных Надем [36], [37].

Обсудим сначала, когда поток $\Phi(t)$ оказывается унитарным по отношению к некоторой эрмитовой структуре h_Φ , которая представляет собой решение уравнения (71). Другими словами, установим условия существования решений уравнения (71) и попутно покажем, как найти некоторые из них при наложении подходящих ограничений.

Рассмотрим автоморфизм T гильбертова пространства $\mathbb{H}$ с эрмитовым скалярным произведением h_0 , построим его орбиты

$$\{T^k \psi\}, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (74)$$

и потребуем, чтобы все они были ограниченными множествами при любом ψ по отношению к норме, индуцированной структурой h_0 . Применение принципа равномерной ограниченности [38] показывает, что это требование эквивалентно требованию равномерной ограниченности отображения T .

Напомним, что автоморфизм T на $\mathbb{H}$ называется равномерно ограниченным, если существует верхняя грань $c < \infty$ такая, что

$$\|T^k\| < c, \quad k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (75)$$

Для такого оператора имеет место следующая теорема [36].

ТЕОРЕМА (Надь). Для равномерно ограниченного оператора T существует ограниченное самосопряженное преобразование Q такое, что

$$\frac{1}{c}I \leq Q \leq cI$$

и $QTQ^{-1} = U$ унитарен по отношению к базовой структуре h_0 . Отсюда следует, что $T = Q^{-1}UQ$ унитарен по отношению к структуре

$$h_T(\varphi, \psi) := h_0(Q\varphi, Q\psi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (набросок). Определим инвариантное скалярное произведение $h_T(\varphi, \psi)$ как предел при n , стремящемся к бесконечности, выражения

$$h_0(T^n\varphi, T^n\psi) =: h_n(\varphi, \psi).$$

Это предел ограниченной последовательности комплексных чисел, который не существует в общем случае, по крайней мере в обычном смысле. Поэтому мы используем обобщенное понятие предела ограниченной последовательности, введенное Банахом и Мазуром [39]. Этот обобщенный предел (обозначаемый как Lim) сводится к определению инвариантного скалярного произведения h_T как преобразованного скалярного произведения h_n “в бесконечности”, где T интерпретируется как генератор $\mathbb{Z}$ -действия на $\mathbb{H}$.

Такой же подход можно применить [36] для определения $\mathbb{R}$ -действия вместо $\mathbb{Z}$ -действия, так что имеет место

ТЕОРЕМА. Когда однопараметрическая группа автоморфизмов $\Phi(t)$ равномерно ограничена, т.е.

$$\|\Phi(t)\| < c, \quad t \in (-\infty, \infty),$$

существует ограниченное самосопряженное преобразование Q такое, что $Q\Phi(t)Q^{-1} = U(t)$ представляет собой однопараметрическую группу унитарных преобразований, или же $\Phi(t)$ унитарно по отношению к

$$h_\Phi(., .) = h_0(Q., Q.).$$

ПРИМЕР. В качестве простого примера [40] рассмотрим группу трансляций на прямой, реализованную на функциях из $L_2(\mathbb{R})$ с мерой, которая трансляционно-неинвариантна, т.е.

$$(T_t\Phi)(x) := \Psi(x+t), \quad \Psi \in L_2(\mathbb{R}, \rho(x) dx), \quad (76)$$

где $\rho(x)$ — произвольная функция, $0 < \alpha < \rho(x) < \beta < \infty$. Через h_ρ обозначим соответствующее скалярное произведение. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x)$, например

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x) = a$, то банахов предел элементарно вычисляется, поскольку он совпадает с пределом в обычном смысле. На самом деле вследствие теоремы Лебега имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x+t) \Phi(x+t) \rho(x) dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x) \Phi(x) \rho(x-t) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi^*(x) \Phi(x) \rho(x-t) dx = a \int_{\mathbb{R}} \Psi^*(x) \Phi(x) dx = ah_0(\Psi, \Phi). \end{aligned} \quad (77)$$

Из него следует, что в банаховом пределе имеем $h_T(\Psi, \Phi) = ah_0(\Psi, \Phi)$, т.е. это не что иное, как произведение стандартных трансляционно-инвариантных скалярных произведений. Таким образом,

$$h_T(\Psi, \Phi) = h_\rho(Q^2 \Psi, \Phi) = h_\rho\left(\left(\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right)^2 \Psi, \Phi\right), \quad (78)$$

т.е. $Q = \sqrt{a/\rho}$ и оператор

$$(U_t \Phi)(x) = (Q T_t Q^{-1} \Phi)(x) = \sqrt{\frac{\rho(x+t)}{\rho(x)}} \Phi(x+t) \quad (79)$$

унитарен в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho(x) dx)$.

После обсуждения нескольких результатов, касающихся существования инвариантной эрмитовой структуры, перейдем к проблеме совместных эрмитовых структур.

8. ГРУППА БИУНИТАРНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ: СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

В квантовой механике гильбертово пространство $\mathbb{H}$ описывается как комплексное векторное пространство, так как комплексная структура непосредственно входит в шредингеровское уравнение движения. Поэтому естественно потребовать, чтобы две допустимые тройки (g_1, J_1, ω_1) и (g_2, J_2, ω_2) имели одну и ту же комплексную структуру: $J_1 = J_2 = J$. Как уже было показано, отсюда следует, что эти две тройки совместны, а соответствующие структуры h_1 и h_2 эрмитовы на одном и том же комплексном пространстве $\mathbb{H}$.

Эти эрмитовы структуры связаны с помощью ранее использованного оператора G , который самосопряжен по отношению к обеим структурам. Оператор G порождает слабокзамкнутое коммутативное кольцо и соответствующее разложение гильбертова пространства в прямой интеграл:

$$\mathbb{H} = \int_{\Delta} \mathbb{H}_\lambda d\sigma(\lambda), \quad (80)$$

где Δ — спектр положительно ограниченного и самосопряженного оператора G и $d\sigma$ — соответствующая мера [41].

Поскольку G действует как мультипликативный оператор на каждом компонентном пространстве $\mathbb{H}_\lambda$, то имеет место непосредственное обобщение результатов, полученных для случая конечномерного пространства (уравнения (69)): структуры h_1 и h_2 на $\mathbb{H}$ имеют вид

$$h_1(\varphi, \psi) = \int_{\Delta} \langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda} d\sigma(\lambda), \quad h_2(\varphi, \psi) = \int_{\Delta} \lambda \langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda} d\sigma(\lambda), \quad (81)$$

где $\langle \varphi, \psi \rangle_{\lambda}$ – внутреннее произведение на компоненте $\mathbb{H}_{\lambda}$.

В итоге биунитарные преобразования имеют вид

$$U\varphi = \int_{\Delta} U(\lambda) \varphi_{\lambda} d\sigma(\lambda), \quad (82)$$

где $U(\lambda)$ – унитарный оператор на компоненте $\mathbb{H}_{\lambda}$ [42].

В частности, в случае, когда поле G циклическое, каждое из подпространств $\mathbb{H}_{\lambda}$ одномерно, а $U(\lambda)$ становится оператором умножения на фазу [43]:

$$U\varphi = \int_{\Delta} e^{i\theta(\lambda)} \varphi_{\lambda} d\sigma(\lambda). \quad (83)$$

Поэтому в данном случае группа биунитарных преобразований параметризуется σ -измеримыми вещественными функциями θ на Δ . Отсюда следует, что биунитарная группа может быть представлена в виде

$$U_{\theta} = e^{i\theta(G)}. \quad (84)$$

ПРИМЕР. Частица в ящике, двойной случай. Рассмотрим оператор $G = 1 + X^2$, где X – оператор координаты, на пространстве $L_2([-\alpha, \alpha], dx)$. Этот оператор эрмитов, и его спектр имеет вид $\Delta = [1, 1 + \alpha^2]$. Спектральное семейство оператора X имеет вид

$$P(\lambda)f = \chi_{[-\alpha, \lambda]}f,$$

где $\chi_{[-\alpha, \lambda]}$ – характеристическая функция отрезка $[-\alpha, \lambda]$. Найдем отсюда спектральное семейство $P_G(\lambda)$ оператора G :

$$P_G(\lambda) = P(\sqrt{\lambda - 1}) - P(-\sqrt{\lambda - 1}).$$

Теперь G не имеет циклических векторов на всем пространстве $L_2([-\alpha, \alpha], dx)$, потому что для произвольного вектора f вектор $xf(-x)$ не обращается в нуль и ортогонален всем степеням $G^n f$. Это рассуждение неправомочно на пространстве $L_2([0, \alpha], dx)$, где вектор $\chi_{[0, \alpha]}$ оказывается циклическим. То же справедливо и для пространства $L_2([-\alpha, 0], dx)$, так что мы получаем расщепление на два G -циклических пространства:

$$L_2[-\alpha, \alpha] = L_2[-\alpha, 0] \oplus L_2[0, \alpha].$$

Из P_G и этих циклических векторов получим меру

$$d\sigma(\lambda) = d\sqrt{\lambda - 1}$$

для разложения гильбертова пространства:

$$\mathbb{H} = \int_{[1, 1+\alpha^2]} \mathbb{H}_{\lambda} d\sigma(\lambda),$$

где подпространство $\mathbb{H}_{\lambda}$ одномерно для частицы в ящике $[0, \alpha]$ и двумерно для частицы в ящике $[-\alpha, \alpha]$.

9. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе было показано, что аналогично классическому рассмотрению можно задать альтернативные эрмитовы описания квантовых уравнений движения. Мы не провели анализ того, как использовать совместные альтернативные эрмитовы структуры для исследования квантовых вполне интегрируемых систем, поскольку такой шаг потребует реализации наших операторных алгебр как алгебр дифференциальных операторов, действующих на подпространствах квадратично интегрируемых функций, заданных на вещественном спектре максимального набора коммутирующих операторов, в качестве которых можно выбрать операторы координат.

В переходе квантовая система – классическая система, упомянутом во введении, следует провести анализ того, почему комплексная структура, которая играет столь важную роль в квантовой механике, не проявляет себя в классическом пределе.

Эти вопросы будут рассмотрены в последующих публикациях, посвященных исследованию перехода квантовая система – классическая система.

Список литературы

- [1] *C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095; *Л. Д. Фаддеев, В. Е. Захаров.* Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 4. С. 18.
- [2] *J. F. Cariñena, J. Grabowski, G. Marmo.* Lie–Scheffers Systems: A Geometric Approach. Napoli: Bibliopolis, 2000.
- [3] *J. F. Cariñena, J. Grabowski, G. Marmo.* Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 4797.
- [4] *G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia.* Rep. Math. Phys. 2000. V. 46. P. 129.
- [5] *П. А. М. Дупак.* Принципы квантовой механики. М.: Физматлит, 1960.
- [6] *E. P. Wigner.* Phys. Rev. 1950. V. 77. P. 711.
- [7] *A. M. Bloch.* Phys. Lett. A. 1986. V. 116. P. 353; Trans. Am. Math. Soc. 1987. V. 302. P. 787.
- [8] *V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria.* Int. J. Mod. Phys. B. 1997. V. 11. P. 1281.
- [9] *B. A. Dubrovin, G. Marmo, A. Simoni.* Mod. Phys. Lett. A. 1990. V. 5. P. 1229.
- [10] *G. Marmo, G. Vilasi.* Mod. Phys. Lett. B. 1996. V. 10. P. 545.
- [11] *P. Antonini, G. Marmo, C. Rubano.* Nuovo Cimento. B. 1985. V. 86. P. 17.
- [12] *F. J. Dyson.* Am. J. Phys. 1990. V. 58. P. 209.
- [13] *J. F. Cariñena, L. A. Ibort, G. Marmo, A. Stern.* Phys. Rep. 1995. V. 263. P. 153.
- [14] *J. Douglas.* Trans. Am. Math. Soc. 1941. V. 50. P. 71; *G. Marmo, E. J. Saletan.* Nuovo Cimento. B. 1977. V. 40. P. 57; *G. Morandi, C. Ferrario, G. Lo Vecchio, G. Marmo, C. Rubano.* Phys. Rep. 1990. V. 188. P. 147; *A. P. Balachandran, T. R. Govindarajan, B. Vijayalakshmi.* Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 1950.
- [15] *G. Marmo.* Acta Appl. Math. 2002. V. 70. P. 161.
- [16] *J. Grabowski, G. Marmo.* Binary operations in classical and quantum mechanics. In: Classical and Quantum Integrability. Banach Center Publ. V. 59. Eds. J. Grabowski, G. Marmo, P. Urbanski. Warsaw: Acad. of Science. Inst. of Math., 2003. P. 163.
- [17] *A. Nijenhuis, R. W. Richardson.* J. Algebra. 1968. V. 9. P. 42.
- [18] *M. Gerstenhaber.* Ann. Math. 1964. V. 79. P. 59.
- [19] *Г. Вейль.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
- [20] *J. C. Baez, I. E. Segal, Z. F. Zhou.* Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1992.
- [21] *И. фон Нейман.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.

- [22] *G. W. Mackey*. Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics. N.Y.: Benjamin, 1968.
- [23] *A. Weil*. Introduction à l'Etudes des Variétés Kaehleriennes. Paris: Hermann, 1958.
- [24] *G. B. Folland*. Harmonic Analysis in Phase Space. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1989.
- [25] *M. Kontsevich*. Lett. Math. Phys. 2003. V. 66. P. 157; q-alg/9709040.
- [26] *C. Zachos*. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 5129.
- [27] *A. Simoni, E. C. G. Sudarshan, F. Zaccaria*. Nuovo Cimento. B. 1971. V. 5. P. 134.
- [28] *O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, G. Marmo*. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 699.
- [29] *G. Marmo, E. J. Saletan, A. Simoni, B. Vitale*. Dynamical Systems: A Differential Geometric Approach to Symmetry and Reduction. Chichester: Wiley, 1985.
- [30] *G. Esposito, G. Marmo, G. Sudarschan*. From Classical to Quantum Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.
- [31] *M. Giordano, G. Marmo, C. Rubano*. Inverse Prob. 1993. V. 9. P. 443.
- [32] *G. Marmo, G. Morandi, A. Simoni, F. Ventriglia*. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 8393.
- [33] *F. Magri*. J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 1156; A geometrical approach to the nonlinear solvable equations. In: Dynamical Systems. Lect. Notes Phys. V. 120. Eds. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani. Berlin: Springer, 1980. P. 233; *B. Fuchssteiner*. Progr. Theor. Phys. 1982. V. 68. P. 1082; *S. De Filippo, G. Marmo, G. Vilasi*. Nuovo Cimento. B. 1984. V. 83. P. 97.
- [34] *I. M. Gelfand, I. Zakharevich*. On local geometry of a bihamiltonian structure. In: The Gelfand Math. Seminars, 1990–1992. Eds. L. Corwin, I. M. Gelfand, J. Lepowski. Basel: Birkhauser, 1993. P. 51.
- [35] *A. Ibrat, F. Magri, G. Marmo*. J. Geom. Phys. 2000. V. 33. P. 210.
- [36] *Béla de Sz. Nagy*. Acta Sci. Math. 1945. V. 11. № 3. P. 152.
- [37] *А. Марков*. ДАН СССР. 1936. Т. 1. № 8. С. 299.
- [38] *М. Рид, Б. Саймон*. Методы современной математической физики. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [39] *С. Банах*. Теория линейных операций. Ижевск: РХД, 2001.
- [40] *G. Marmo, A. Simoni, F. Ventriglia*. Int. J. Mod. Phys. A. 2004. V. 19. P. 2561.
- [41] *М. А. Неймарк*. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.
- [42] *G. Marmo, G. Sclarici, A. Simoni, F. Ventriglia*. Note di Matematica. 2004. V. 23. P. 173.
- [43] *G. Marmo, G. Sclarici, A. Simoni, F. Ventriglia*. J. Phys. A. 2005. V. 38. P. 3813.