Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Де Никола, Р. Феделе, М. А. Манько, В. И. Манько, Томография Френеля: новый подход к восстановлению волновых функций, основанный на представлении Френеля для томограмм, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 384–393

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:55:23

© 2005 г.

С. Де Никола*, Р. Феделе[†],
М. А. Манько[‡], В. И. Манько[‡]

ТОМОГРАФИЯ ФРЕНЕЛЯ: НОВЫЙ ПОДХОД К ВОССТАНОВЛЕНИЮ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ ТОМОГРАММ

Представлен новый тип томографического распределения вероятностей, которое содержит полную информацию относительно матрицы плотности (волновой функции). Распределение связано с преобразованием Френеля комплексной волновой функции. Освещен вопрос о связи такого распределения с симплектическим томографическим распределением вероятностей. Представлено многомодовое обобщение томограммы Френеля. Приведен пример применения данного подхода.

Ключевые слова: томографическое отображение, фазовое пространство, функция Вигнера, конденсат Бозе–Эйнштейна, томограмма Френеля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Введенная в последнее время в квантовой оптике [1] и в анализе сигналов [2], [3] симплектическая томография была распространена на задачи построения солитонных решений некоторых нелинейных динамических уравнений, таких как нелинейное уравнение Шредингера [4], [5], включая исследование солитонов в конденсате Бозе–Эйнштейна [6], описываемых уравнением Гросса–Питаевского [7]. Название “симплектическая томография” связано с использованием в данном подходе обычной симплектической группы преобразований фазового пространства (линейного канонического преобразования координат и импульсов, сохраняющего скобку Пуассона в классическом случае и коммутатор — в квантовом). Симплектическое томографическое отображение связывает

*Istituto di Cibernetica “Eduardo Caianiello” del CNR Comprensorio “A. Olivetti” Fabbr. 70, Via Campi Flegrei, 34, I-80078 Pozzuoli (NA), Italy

[†]Dipartimento di Scienze Fisiche, Università “Federico II” di Napoli and Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Napoli, Complesso Universitario di Monte S. Angelo 91, Via Cintia, I-80126 Napoli, Italy

[‡]Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия.
E-mail: mmanko@sci.lebedev.ru

с некоторой функцией (аналитическим сигналом, солитонным решением и т.д.) определенную функцию распределения вероятностей (симплектическую томограмму), которая содержит ту же информацию о сигнале, что и исходная функция. В работах [4]–[6] было обнаружено, что структура симплектической томограммы, которая зависит от трех вещественных координат, позволяет построить другое распределение вероятностей (томограмму Френеля). Томограмма Френеля зависит от двух вещественных переменных, однако содержащейся в ней информации достаточно для восстановления той исходной функции, для которой эта томограмма известна. Формула обращения, позволяющая в явном виде осуществить восстановление исходной функции (сигнала, солитона и т.д.), до сих пор не была написана, и одной из целей настоящей работы является нахождение такой формулы восстановления. Другой целью работы является распространение томографии Френеля на двухчастичные (многочастичные) системы, чтобы получить возможность рассматривать, например, солитонные решения двумерных и трехмерных нелинейных уравнений в томографическом представлении.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 дан обзор схемы симплектической томографии как для одномерного, так и для многомерного случаев. В разделе 3 представлена основная концепция томографии Френеля для одномерного случая, а в разделе 4 – обобщение данного томографического подхода для многомерных задач. В разделе 5 мы применяем наш метод для случая одномерных chirpированных¹⁾ гауссовых волновых функций. Наконец, в разделе 6 подведены основные итоги.

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ ТОМОГРАММЫ

Ниже представлены симплектические томограммы, которые ставятся в соответствие комплексной функции $\psi(x)$, описывающей либо нормированное квантовое состояние, либо аналитический сигнал или солитонное решение нелинейного уравнения. Томограмма задается формулой [2]

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{2\pi|\nu|} \left| \int \psi(y) \exp\left(\frac{i\mu}{2\nu}y^2 - \frac{iX}{\nu}y\right) dy \right|^2. \quad (1)$$

Можно видеть, что зависящая от трех вещественных переменных томограмма обладает свойством однородности:

$$w(\lambda X, \lambda\mu, \lambda\nu) = \frac{1}{|\lambda|} w(X, \mu, \nu). \quad (2)$$

Обратное преобразование, которое связывает томограмму с комплексной функцией (матрицей плотности), имеет вид [9]

$$\psi(X)\psi^*(X') = \frac{1}{2\pi} \int w(Y, \mu, X - X') \exp\left[i\left(Y - \mu \frac{X + X'}{2}\right)\right] d\mu dY. \quad (3)$$

¹⁾Принятый в квантовой электронике и анализе сигналов термин: от английского *chirping*, т.е. зависимость частоты от времени (см., например, с. 24 в книге [8]).

Поскольку матрица плотности может быть восстановлена по известной симплектической томограмме, все другие характеристики типа функции Вигнера–Вилле [10] также могут быть выражены в терминах симплектической томограммы [11]:

$$W_\psi(q, p) = \int w(X, \mu, \nu) \exp[i(X - \mu q - \nu p)] \frac{dX d\mu d\nu}{(2\pi)^2}, \quad (4)$$

где

$$W_\psi(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int \psi\left(q + \frac{u}{2}\right) \psi^*\left(q - \frac{u}{2}\right) e^{-ipu} du.$$

Функция Вигнера является нормированной: $\int W_\psi(q, p) dq dp = 1$. Симплектическая томограмма дает возможность найти оптическую томограмму, для чего нужно просто взять параметры томограммы в виде $\mu = \cos \theta$, $\nu = \sin \theta$. При этом мы приходим к следующей формуле для оптической томограммы:

$$w(X, \theta) = \frac{1}{2\pi |\sin \theta|} \left| \int \psi(y) \exp\left(\frac{i \operatorname{ctg} \theta}{2} y^2 - \frac{iX}{\sin \theta} y\right) dy \right|^2. \quad (5)$$

Эта оптическая томограмма может быть использована для восстановления функции Вигнера [12] с помощью преобразования Радона [13].

Симплектическая томограмма прямо обобщается на многомерный случай. Чтобы получить это обобщение, введем следующие обозначения. Пусть

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N), \quad \vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N), \quad \vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_N)$$

— три вещественных вектора, все компоненты которых меняются от $-\infty$ до ∞ . Томограмма $w(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu})$, сопоставляемая комплексной функции $\psi(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, имеет вид

$$w(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \left(\prod_{k=1}^N \frac{1}{2\pi |\nu_k|} \right) \left| \int \psi(\vec{y}) \prod_{j=1}^N \exp\left(\frac{i\mu_j}{2\nu_j} y_j^2 - \frac{iX_j}{\nu_j} y_j\right) d\vec{y} \right|^2. \quad (6)$$

Формула обращения имеет вид

$$\psi(\vec{X}) \psi^*(\vec{X}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^N \int w(\vec{Y}, \vec{\mu}, \vec{X} - \vec{X}') \left\{ \prod_{k=1}^N \exp\left[i\left(Y_k - \mu_k \frac{X_k + X'_k}{2}\right)\right] \right\} d\vec{\mu} d\vec{Y}. \quad (7)$$

3. ТОМОГРАФИЯ ФРЕНЕЛЯ В ОДНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Томограмма Френеля $w_F(X, \nu)$ была введена в работе [4]:

$$w_F(X, \nu) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi i \nu}} \int \exp\left(\frac{i(X-y)^2}{2\nu}\right) \psi(y) dy \right|^2. \quad (8)$$

Другой вариант томографии Френеля, основанный на использовании интеграла Френеля для восстановления функции Вигнера квантового состояния, был предложен в работах [14].

Поскольку симплектическая томограмма $w(X, \mu, \nu)$ является однородной функцией, имеет место соотношение

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{|\mu|} w_F\left(\frac{X}{\mu}, \frac{\nu}{\mu}\right). \quad (9)$$

Это означает, что если известна томограмма Френеля $w_F(X', \nu')$, то симплектическая томограмма может быть получена с помощью замены переменных в соответствующей функции

$$X' \rightarrow \frac{X}{\mu}, \quad \nu' \rightarrow \frac{\nu}{\mu}$$

и умножения полученной функции на множитель $|\mu|^{-1}$. Выписанные соотношения дают формулу обращения для восстановления матрицы плотности, которая выражается в терминах томограммы Френеля:

$$\psi(\vec{X})\psi^*(\vec{X}') = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{|\mu|} w_F\left(\frac{Y}{\mu}, \frac{X - X'}{\mu}\right) \exp\left[i\left(Y - \mu \frac{X + X'}{2}\right)\right] d\mu dY. \quad (10)$$

Можно также восстановить функцию Вигнера, выражая ее в терминах томограммы Френеля:

$$W(q, p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{|\mu|} w_F\left(\frac{X}{\mu}, \frac{\nu}{\mu}\right) \exp[-i(\mu q + \nu p - X)] d\mu d\nu dX. \quad (11)$$

Полученная формула обращения дает возможность найти функцию Вигнера и матрицу плотности в координатном представлении по известному френелевскому томографическому распределению вероятностей $w_F(X, \nu) \geq 0$, которое удовлетворяет условию нормировки

$$\int w_F(X, \nu) dX = 1. \quad (12)$$

4. ТОМОГРАММА ФРЕНЕЛЯ ДЛЯ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СИСТЕМ

Введем томограмму Френеля для функции $\psi(\vec{x})$, зависящей от нескольких переменных. Эта томограмма может быть определена на основе симплектической томограммы, т. е.

$$w_F(\vec{X}, \vec{\nu}) = w(\vec{X}, \vec{\mu} = \vec{1}, \vec{\nu}), \quad (13)$$

где запись $\vec{\mu} = \vec{1}$ означает, что вектор $\vec{\mu}$ выбран таким образом, что все его компоненты равны единице. Соответственно томограмма Френеля выражается через комплексную функцию $\psi(\vec{x})$ следующим образом:

$$w_F(\vec{X}, \vec{\nu}) = \left| \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi i \nu_k}} \int \psi(\vec{y}) \left(\prod_{j=1}^N \exp \frac{i(X_j - y_j)^2}{2\nu_j} \right) d\vec{y} \right|^2. \quad (14)$$

Чтобы получить обращение этого преобразования, мы должны использовать многомерный аналог соотношения (9), имеющий вид

$$w(\vec{X}, \vec{\mu}, \vec{\nu}) = \frac{1}{|\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N|} w_F(\vec{X}_{\vec{\mu}}, \vec{\nu}_{\vec{\mu}}), \quad (15)$$

где векторы в аргументах томограммы Френеля имеют компоненты

$$\vec{X}_{\vec{\mu}} = \left(\frac{X_1}{\mu_1}, \frac{X_2}{\mu_2}, \dots, \frac{X_N}{\mu_N} \right), \quad \vec{\nu}_{\vec{\mu}} = \left(\frac{\nu_1}{\mu_1}, \frac{\nu_2}{\mu_2}, \dots, \frac{\nu_N}{\mu_N} \right).$$

Используя соотношение (15), можно построить выражение для матрицы плотности в терминах томограммы Френеля, аналогичное одномерному выражению (10):

$$\psi(\vec{X})\psi^*(\vec{X}') = \int \frac{d\vec{\mu} d\vec{Y}}{(2\pi)^N} w_F(\vec{Y}_{\vec{\mu}}, \vec{X}_{\vec{\mu}} - \vec{X}'_{\vec{\mu}}) \prod_{j=1}^N \frac{1}{|\mu_j|} \exp\left(iY_j - \mu_j \frac{X_j + X'_j}{2}\right). \quad (16)$$

5. ЧИРПИРОВАННЫЙ ГАУССОВ СЛУЧАЙ

Для того чтобы удостовериться в применимости метода, мы численно промоделировали восстановление одномерного чирпированного гауссова поля (ЧГП), заданного в следующем нормированном виде:

$$\psi(x) = \left(\frac{2}{\pi\sigma^2} \right)^{1/4} \exp\left[-\frac{x^2}{\sigma^2} + i\alpha x^2\right], \quad (17)$$

с параметром осцилляции α и шириной, определяемой параметром σ . Данное состояние известно также как коррелированное когерентное состояние [15]. В соответствии с преобразованием (3) заданное формулой (17) комплексное поле может быть восстановлено по его томографическому представлению $w(X, \mu, x)$ с помощью обратного интегрального преобразования

$$\psi(x)\psi^*(0) = \frac{1}{2\pi} \iint w(X, \mu, x) \exp\left[i\left(X - \frac{\mu x}{2}\right)\right] dX d\mu. \quad (18)$$

Томограмма ЧГП может быть вычислена из формул (1) и (17). В случае гауссова распределения интегрирование можно осуществить, и томограмма может быть записана в виде

$$w(X, \mu, \nu) = \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi[4\nu^2 + \sigma^4(\mu + 2\alpha\nu)^2]}} \exp\left\{-\frac{2\sigma^2 X^2}{4\nu^2 + \sigma^4(\mu + 2\alpha\nu)^2}\right\}, \quad (19)$$

где в соответствии с принятой в предыдущих разделах формой записи вместо x использовано обозначение ν . Выражение (19) показывает, что томограмма ЧГП по-прежнему характеризуется гауссовым законом распределения, но его ширина ω , вообще говоря,

отличается от ширины исходного ЧГП и может быть выражена в терминах переменных фазового пространства μ и ν , параметра чирпинга α и ширины σ следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{(\mu + 2\alpha\nu)^2 \sigma^4 + 4\nu^2}{2\sigma^2}. \quad (20)$$

Нетрудно проверить, что томограмма $w(X, \mu, \nu)$ в выражении (19) совпадает с томограммой гауссова поля в отсутствие чирпинга ($\alpha = 0$), вычисленной для значений переменных фазового пространства $\mu' = \mu + 2\alpha\nu$ и $\nu' = \nu$. Можно принять другое преобразование фазового пространства, учитывая, что томографическое представление для ЧГП также может быть получено из томографического представления для гауссового поля без чирпинга с $\mu' = \mu$ и $\nu' = \nu\mu/(\mu + 2\alpha\nu)$. В обоих случаях эффект чирпинга выражается в сдвиге одного из двух значений фазовых переменных, в то время как другая переменная остается неизменной. Чтобы продемонстрировать поведение томограммы ЧГП, на рис. 1 мы представили трехмерное распределение томограммы $w(X/\mu, 1, \nu/\mu)$ чирпированной гауссовой волновой функции с шириной $\sigma = 1$ для возрастающих значений параметра чирпинга. Такое представление томограммы в зависимости от двух параметров X/μ и ν/μ вместо трех очень удобно, поскольку оно позволяет наглядно изобразить томограмму в двумерной плоскости фазового пространства $(X/\mu, \nu/\mu)$. Действительно, вспоминая об общем свойстве однородности томограммы, в силу равенства (9) можно получить полную зависимость томограммы от всех трех пространственных переменных:

$$w(X, \mu, \nu) = \frac{1}{|\mu|} w\left(\frac{X}{\mu}, 1, \frac{\nu}{\mu}\right). \quad (21)$$

Согласно френелевской интерпретации оптической томограммы, рассмотренной в предыдущем разделе, величина $w(X/\mu, 1, \nu/\mu)$ представляет интенсивность ЧГП на расстоянии ν . Равенство (21) означает, что общая зависимость томограммы от трех ее вещественных переменных X , μ и ν может быть восстановлена по набору измерений распределений интенсивности распространяющегося ЧГП, осуществляемых на различных расстояниях с изменяющимся масштабным множителем $1/|\mu|$. Соотношение (21) может быть немедленно проверено на основе определяющего выражения для томограммы ЧГП, которое дается формулой (19). Рис. 1 ясно показывает, что с увеличением параметра чирпинга гауссова поля томографические распределения сжимаются в фазовом пространстве. Численные результаты были получены для ЧГП с шириной $\sigma = 1$. На рис. 2 представлены изображения томограмм с тем же набором параметров, что и на рис. 1, за исключением ширины ЧГП, значение которой теперь $\sigma = 0.5$. Сравнение рис. 1 и 2 показывает, что при уменьшении ширины ЧГП эффект сжатия трехмерного томографического распределения в фазовом пространстве с увеличением параметра чирпинга выражен менее ярко. Эффективным вычислительным методом восстановления волновой функции становится прямое использование обратного интегрального преобразования, заданного формулой (18), которое позволяет определить функцию $\psi(x)$ с точностью до комплексной постоянной величины $\psi(0)^*$. Метод использует алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) для вычисления двумерного преобразования Фурье $\hat{w}(\omega_X, \omega_\mu, \nu)$ томограммы, т.е.

Рис. 1. Трехмерные изображения томографических распределений $w(X/\mu, 1, \nu/\mu)$ chirпированной гауссовой волновой функции с гауссовой шириной $\sigma = 1$ для возрастающих значений параметра chirпнга $\alpha = 0.5, 1, 2, 3$.

$$\widehat{w}(\omega_X, \omega_\mu, \nu) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w(X, \mu, \nu) \exp[i(\omega_X X + \omega_\mu \mu)] dX d\mu, \quad (22)$$

где ω_X и ω_μ – пространственные частоты, соответствующие переменным X и μ фазового пространства томограммы. Обратное интегральное преобразование представляет собой частный случай двумерного преобразования Фурье томограммы, заданного формулой (22). Действительно, мы имеем

$$\psi(\nu)\psi(0)^* = \widehat{w}\left(1, -\frac{\nu}{2}, \nu\right). \quad (23)$$

Равенство (23) показывает, что комплексная величина $\psi(\nu)\psi(0)^*$ может быть определена по значениям двумерного преобразования Фурье томограммы на частотах ω_X и ω_μ ,

Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для $\sigma = 0.5$.

причем аргумент ν изменяется во всем диапазоне, где производятся томографические измерения. В принципе данная процедура хорошо восстанавливает волновое поле при наличии достаточного количества измерений томограммы $w(X, \mu, \nu)$, т.е. в том случае, если частота измерений по меньшей мере вдвое превышает частоту Найквиста. В этом случае дискретное двумерное преобразование Фурье $\hat{w}(r\Delta\omega_X, s\Delta\omega_\mu)$, соответствующее непрерывному интегралу Фурье, заданному формулой (22), может быть записано в следующем виде:

$$\hat{w}(r\Delta\omega_X, s\Delta\omega_\mu) = \Delta X \Delta \mu \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w(n\Delta X, m\Delta \mu, \nu) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{rn}{N} + \frac{sm}{M} \right) \right], \quad (24)$$

где r, s и n, m — целые, ΔX и $\Delta \mu$ — интервалы дискретизации в фазовом пространстве (X, μ) , а $\Delta\omega_X$ и $\Delta\omega_\mu$ — соответствующие интервалы дискретизации в частотном пространстве. Равенство (24) позволяет по измерениям $w(n\Delta X, m\Delta \mu, \nu)$ томограммы волновой функции вычислить матрицу из N^2 комплексных чисел $\hat{w}(r\Delta\omega_X, s\Delta\omega_\mu)$ с помо-

шью дискретного двумерного алгоритма БПФ. Следует отметить, что для получения точно восстановленной волновой функции $\psi(\nu)$ двумерный алгоритм БПФ должен повторно применяться к каждой двумерной томограмме, соответствующей каждому значению ν в рассматриваемом диапазоне, и если требуется высокая точность, то даже такой БПФ-ориентированный метод восстановления становится трудоемким с вычислительной точки зрения. Однако во многих представляющих интерес случаях симметричные соображения позволяют до некоторой степени упростить задачу посредством рассмотрения уменьшенного набора измерений томограммы. В случае ЧГП двумерное преобразование Фурье томограммы $\hat{w}(\omega_X, \omega_\mu, \nu)$ легко может быть получено в виде

$$\hat{w}(\omega_X, \omega_\mu, \nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2\omega_X^2}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{2}\left(\frac{\omega_X}{\sigma}\right)^2 - \frac{2}{\sigma^2}\left(\frac{\omega_\mu}{\omega_X}\right)^2 - 2i\alpha\omega_\mu\nu\right]. \quad (25)$$

Используя формулу (25), нетрудно удостовериться, что выражение (23) правильно дает $\psi(\nu)\psi(0)^*$ с волновой функцией $\psi(\nu)$, заданной формулой (17) как ЧГП.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты работы.

Мы получили формулу обращения, которая позволяет в явном виде восстановить волновую функцию, матрицу плотности и функцию Вигнера по известной френелевской томографической функции распределения вероятностей. Томограмма Френеля может быть использована для измерения фазы излучения путем измерения его интенсивности.

Мы ввели томограмму Френеля для многомодовой системы и в этом случае также нашли формулу восстановления для волновой функции и матрицы плотности на основе томограммы. Модель солитонного решения, использующаяся также при анализе некоторых состояний конденсата Бозе–Эйнштейна, может исследоваться с точки зрения томографии Френеля [5], [6].

Симплектическая томография [1] содержит оптическую томографию в качестве частного случая. В этой работе мы ясно показали, что существует другой важный частный случай симплектической томографии, который называется томографией Френеля. Это означает, что существует связь томографии Френеля с хорошо разработанной схемой оптической томографии. Томографическая вероятность в схеме оптической томографии связана с томограммой Френеля соотношением

$$w(x, \cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{|\cos \theta|} w_F\left(\frac{X}{\sin \theta}, \operatorname{ctg} \theta\right).$$

Эту формулу можно обобщить на многомерный случай.

Благодарности. Работа была поддержана Università “Federico II” di Napoli и РФФИ, грант № 03-02-16408. М. А. Манько благодарит организаторов конференции “Нелинейная физика. Теория и эксперимент. III” за гостеприимство и РФФИ за финансовую поддержку (грант № 04-02-26662).

Список литературы

- [1] *S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Quantum Semiclass. Opt. 1995. V. 7. P. 615; Phys. Lett. A. 1996. V. 213. P. 1; Found. Phys. 1997. V. 27. P. 801.
- [2] *V. I. Man'ko, R. V. Mendes.* Phys. Lett. A. 1999. V. 263. P. 53.
- [3] *M. A. Man'ko.* J. Russ. Laser Res. 1999. V. 20. P. 226; 2000. V. 21. P. 411; 2001. V. 22. P. 168; P. 505; 2002. V. 23. P. 433.
- [4] *S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko.* J. Opt. B. 2003. V. 5. P. 95.
- [5] *S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko.* Wigner picture and tomographic representation of envelope solitons. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II. Proc. Int. Workshop (Gallipoli, Lecce, Italy, 27 June – 6 July, 2002). Eds. M.J. Ablowitz, M. Boiti, F. Pempinelli, B. Prinari. River Edge, NJ: World Scientific, 2003. P. 372.
- [6] *S. De Nicola, R. Fedele, M. A. Man'ko, V. I. Man'ko.* J. Russ. Laser Res. 2004. V. 25. P. 1; Eur. J. Phys. B. 2003. V. 36. P. 385.
- [7] *E. P. Gross.* Nuovo Cimento. 1961. V. 20. P. 454; *Л. П. Питаевский.* ЖЭТФ. 1961. Т. 40. С. 646.
- [8] *С. А. Ахманов, В. А. Вислоух, А. С. Чиркин.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988.
- [9] *V. I. Man'ko, L. Rosa, P. Vitale.* Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 3291.
- [10] *E. P. Wigner.* Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749; *J. Ville.* Cables et Transmission. 1948. V. 2. P. 61.
- [11] *G. M. D'Aiano, S. Mancini, V. I. Man'ko, P. Tombesi.* Quantum Semiclass. Opt. 1996. V. 8. P. 1017; *R. Fedele, V. I. Man'ko.* Phys. Rev. E. 1999. V. 60. P. 6042.
- [12] *J. Bertrand, P. Bertrand.* Found. Phys. 1987. V. 17. P. 397; *K. Vogel, H. Risken.* Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847.
- [13] *J. Radon.* Verh. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. 1917. V. 69. P. 262.
- [14] *P. Lougovski, E. Solano, Z. M. Zhang, H. Walther, H. Mack, W. P. Schleich.* Phys. Rev. Lett. 2003. V. 97. P. 010401; quant-ph/0206083; V. 91. P. 010401-1; *O. Crasser, H. Mack, W. P. Schleich.* Is Fresnel optics quantum mechanics in phase space? quant-ph/0402115.
- [15] *V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1980. V. 79. P. 150.