Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. К. Нуччи, Найдем Ли: сказочно богатый улов, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 394–404

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1864>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:31:19

© 2005 г.

М. К. Нуччи*

НАЙДЕМ ЛИ: СКАЗОЧНО БОГАТЫЙ УЛОВ

В современной литературе некоторые виды уравнений были исследованы с использованием подходов, претендующих на новизну, так как авторы утверждали, что эти уравнения не поддавались точному рассмотрению с использованием известных методов. В данной работе, однако, показано, что все эти уравнения обладают достаточным количеством точечных симметрий Ли, чтобы сделать их интегрируемыми в квадратурах, если не линеаризовать. Если получен “сказочно богатый улов”, а именно, точные методы решения, первые интегралы и даже линеаризация, то непременно будут найдены и симметрии Ли. Анализ групп Ли рассматривался и должен по-прежнему рассматриваться как важнейший неотъемлемый инструмент для любого, кто хочет решить уравнения, имеющие отношения к физике и другим научным областям.

Ключевые слова: анализ групп Ли, последний множитель Якоби, первые интегралы.

1. ВВЕДЕНИЕ

В январе 2001 г. первая премия Уайтмена за выдающийся вклад в историю математики была присуждена Американским математическим обществом Томасу Хоукинсу. В опубликованной по этому случаю заметке [1] читаем, что Томас Хоукинс “. . . всесторонне осветил историю групп Ли. В частности, он проследил их источники до исследования Ли 1870-х годов по дифференциальным уравнениям . . . *idée fixe*, направляющей работу Ли, было развитие теории Галуа дифференциальных уравнений . . . книга Хоукинса [2] выдвигает на первый план восхитительное взаимодействие геометрии, анализа, математической физики, алгебры и топологии . . .”. Кроме того, Хоукинс установил “природу и степень влияния Якоби на Ли” [3], что заслуживает особого внимания, поскольку в 2004 г. исполнилось 200 лет со дня рождения Якоби.

Монументальные работы Ли по группам преобразований [4] и, в частности, по контактным преобразованиям [5], привели его к поставленной цели [6]. Данному предмету и его обобщениям посвящено большое количество книг [7].

*Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia, 06123 Perugia, Italy. E-mail: nucci@unipg.it

Анализ групп Ли действительно является наиболее мощным инструментом для нахождения общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно показать, что любой известный метод интегрирования¹⁾ является частным случаем некоторого общего метода, основанного на построении непрерывной группы симметрий, допускаемой данным дифференциальным уравнением, т.е. алгебры симметрий Ли, которая может быть легко выведена посредством прямой, хотя и длинной, процедуры. Так как программы для проведения алгебраических вычислений получают все большее распространение, выполнять интегрирование систем дифференциальных уравнений методом анализа групп Ли становится легче. Основной недостаток метода Ли состоит в том, что он бесполезен в случае систем n уравнений первого порядка²⁾, поскольку они допускают бесконечное число симметрий, и не существует систематического способа для нахождения даже одномерной алгебры симметрий Ли, отличной от тривиальных групп типа трансляций по времени, допускаемых автономными системами. Можно попытаться построить допустимую n -мерную разрешимую алгебру симметрий Ли, сконструировав анзац для вида ее генераторов, однако (редко имеющий место) успех такой попытки есть не более чем результат счастливой догадки.

Однако, как было отмечено нами в работе [9], любая система n уравнений первого порядка может быть преобразована в эквивалентную систему, по меньшей мере одно уравнение которой является уравнением второго порядка. В таком случае допустимая алгебра симметрий Ли уже не является бесконечномерной, и появляется возможность найти нетривиальные симметрии исходной системы. Эта идея была успешно применена в ряде случаев [9]–[12]. В работе [13] мы показали также, что первые интегралы системы могут быть получены с помощью анализа групп Ли, даже если происхождение изучаемой системы не связано с вариационной задачей, т.е. с применением теоремы Нётер [14]. Если рассматривается некоторая система уравнений первого порядка и посредством исключения одной из зависимых переменных получается эквивалентная система, имеющая в своем составе одно уравнение второго порядка, то анализ групп Ли, примененный к этой эквивалентной системе, дает один или несколько первых интегралов исходной системы, которые не содержат исключенную зависимую переменную. Для этого требуется, конечно, чтобы такие первые интегралы существовали. Для того чтобы найти все такие первые интегралы, следует повторять данную процедуру до тех пор, пока остаются зависимые переменные. Первые интегралы соответствуют характерис-

¹⁾ Имеются в виду методы, изучаемые в рамках большинства базовых университетских курсов по обыкновенным дифференциальным уравнениям.

²⁾ Любой неискушенный студент, изучающий естественные или технические науки, знает, что обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка может быть преобразовано в эквивалентную систему из n уравнений первого порядка. Менее известно студентам, но хорошо известно специалистам в области анализа групп Ли драматическое последствие для размерности допустимой алгебры симметрий Ли, к которому приводит это преобразование. Действительно, в то время как максимальная алгебра симметрий Ли, допускаемая одним уравнением n -го порядка, конечна, [8], размерность алгебры симметрий Ли, допускаемой системой n -уравнений первого порядка, является бесконечной.

тикам определяющих уравнений параболического типа, которые строятся методом анализа групп Ли. Такой метод нахождения первых интегралов был использован нами в работах [11]. В настоящей работе мы даем примеры использования анализа групп Ли в связи с последним множителем Якоби (т.е. первыми интегралами) после применения метода редукции. Наша цель состоит в том, чтобы откинуть скрывающую симметрии Ли “сказочную завесу” из точных методов решения, первых интегралов и линеаризации. Если получен такой “сказочно богатый улов”, то непременно будут найдены и симметрии Ли. Как прекрасно сказал Ибрагимов [15], “*cherchez le groupe*”.

Отметим в заключение, что интерактивные (диалоговые) программы вычисления симметрий Ли такие, как указанные в работе [16], подходят для нахождения этих симметрий в наибольшей степени.

2. СИММЕТРИИ ЛИ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Рассмотрим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$u'' = -(\alpha + \beta u^2)u' + \gamma u - u^3. \quad (1)$$

Это уравнение называется либо осциллятором Дюффинга–Ван дер Поля [17], либо осциллятором Холмса–Рэнда [18]. Хорошо известно [19], что если $\alpha = 4/\beta$, $\gamma = -3/\beta^2$, то уравнение (1) допускает двумерную алгебру симметрий Ли, порождаемую следующими операторами:

$$\Gamma_1 = \frac{1}{\beta} e^{2t/\beta} (\beta \partial_t - u \partial_u), \quad \Gamma_2 = \partial_t. \quad (2)$$

Менее известно, что эта алгебра симметрий Ли является неабелевой и транзитивной, т.е. относится к типу III по классификации Ли. Существуют четыре типа двумерных алгебр симметрий Ли [6], которые могут являться допустимыми для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (табл. 1). Для того чтобы проинтегрировать уравнение (1), нужно преобразовать его к каноническому виду, каковым может быть вид, определенный Ли, так же как и один из нескольких других эквивалентных видов (табл. 2).

ТАБЛИЦА 1. Двумерная алгебра симметрий Ли, реализация и соответствующее уравнение второго порядка.

Тип	Структура L_2	Реализация	Уравнение
I	$[X_1, X_2] = 0, X_1 \vee X_2 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = f(y')$
II	$[X_1, X_2] = 0, X_1 \vee X_2 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = f(x)$
III	$[X_1, X_2] \neq 0, X_1 \vee X_2 \neq 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{1}{x} f(y')$
IV	$[X_1, X_2] \neq 0, X_1 \vee X_2 = 0$	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = f(x)y'$

ТАБЛИЦА 2. Три эквивалентные реализации алгебры симметрий Ли типа III и соответствующие уравнения второго порядка.

Тип III	Реализация	Уравнение
IIIa	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{1}{x} f(y')$
IIIб	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{1}{y} f(y')$
IIIв	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = y^5 f\left(\frac{y'}{y^3}\right)$

Если рассмотреть реализацию IIIв, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}, \quad 2\tilde{t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} - \tilde{u} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}}, \quad (3)$$

с новыми независимой и зависимой переменными $\tilde{t}$ и $\tilde{u}$, соответственно, то нетрудно вывести, что $\tilde{u} = -ue^{t/\beta}$, $\tilde{t} = e^{-2t/\beta}$, и уравнение (1) превращается в уравнение

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{d\tilde{t}^2} = \frac{1}{2} \beta^2 \tilde{u}^2 \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}}, \quad (4)$$

которое может быть легко проинтегрировано, как показано в работе [17]. В указанной работе была получена “процедура для построения преобразования, которое устраняет зависящую от времени часть из первого интеграла и дает общее решение”. Авторы утверждали, что уравнение (1) не может быть проинтегрировано явно. Они использовали свою процедуру, для того чтобы преобразовать уравнение (1) в уравнение (4). Мы уже показали, что этого легко достичь, если следовать методу Ли [6]. В работе [20] показано, что все примеры, приведенные в работе [17], обладают достаточным количеством точечных симметрий Ли и поэтому могут быть проинтегрированы методом Ли.

3. СИММЕТРИИ ЛИ И ПОСЛЕДНИЙ МНОЖИТЕЛЬ ЯКОБИ

Метод последнего множителя Якоби [21] дает средство нахождения интегрирующего множителя для дифференциального уравнения в частных производных

$$Af = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (5)$$

или связанной с ним эквивалентной системы Лагранжа

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n}. \quad (6)$$

Последний множитель M дается выражением

$$\frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = M A f, \quad (7)$$

где

$$\frac{\partial(f, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \omega_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

и $\omega_1, \dots, \omega_{n-1} - (n-1)$ решение уравнения (5), или, что эквивалентно, $(n-1)$ первый интеграл системы (6). Можно доказать, что каждый множитель является решением линейного уравнения в частных производных, а именно,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial(M a_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (9)$$

Вообще говоря, другой выбор интегралов дает и другой множитель M' . Важное свойство последних множителей состоит в том, что их отношение M/M' является решением уравнения (5) (первым интегралом системы (6)). Это отношение, естественно, может оказаться вполне тривиальным.

В своей исходной формулировке метод последнего множителя Якоби требовал знания почти полной информации относительно рассматриваемой системы (5) или (6). Так как существование решения (первого интеграла) является следствием существования симметрии, Ли [6] дал альтернативную формулировку метода на основе симметрий. Ясная трактовка данной формулировки в терминах решений (первых интегралов) и симметрий была дана Бианки [22]. Если известны $(n-1)$ симметрия уравнений (5) или (6), скажем,

$$\Gamma_i = \xi_{ij} \partial_{x_j}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (10)$$

то последний множитель Якоби дается выражением $M = \Delta^{-1}$, при условии, что $\Delta \neq 0$, где

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n-1,1} & \dots & \xi_{n-1,n} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Упомянутые результаты Якоби имеют очевидное следствие. В том случае, если существует постоянный последний множитель, детерминант является первым интегралом. Этот результат может оказаться очень полезным для поиска первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Решаемое с помощью последнего множителя Якоби дифференциальное уравнение имеет вид

$$0 = \frac{d \ln(M)}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W_i}{\partial w_i}, \quad (12)$$

где M – последний множитель, а компоненты уравнения движения суть $\dot{w}_i = W_i$. Следовательно, если каждая компонента векторного поля уравнения движения не содержит зависимости от переменной, соответствующей этой компоненте, т.е. $\partial W_i / \partial w_i = 0$ (здесь нет суммирования), то последний множитель есть постоянная.

В работе [23] был предложен некоторый метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, представляющий собой, как утверждали авторы в резюме, “попытку алгоритмической адресации их решений”. Авторы представили четыре уравнения и с помощью своего метода нашли первый интеграл для каждого из них. В работе [20] показано, что все четыре уравнения обладают достаточным количеством точечных симметрий Ли, для того чтобы сделать их интегрируемыми в квадратурах, если не линеаризовать. Более того, метод последнего множителя Якоби легко применим для построения первых интегралов, причем в огромном количестве, если уравнение допускает 8-мерную алгебру симметрий Ли. Приведем здесь один из примеров.

В работе [23] авторы представили следующее уравнение второго порядка, первый интеграл которого “не является рациональной функцией” (пример 4)³⁾:

$$yuu'' + uu' + 2yuu'^2 + yu'^2 = 0. \quad (13)$$

Используя предложенный ими метод, Дуарте и др. получили следующий нерациональный первый интеграл:

$$I = y + \frac{1}{2} \ln(yuu'). \quad (14)$$

В работе [20] показано, что уравнение (13) допускает 8-мерную алгебру симметрий Ли, порождаемую следующими операторами:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{4} e^{2u} (2u - 1) y \partial_y, & X_2 &= \frac{1}{16u} e^{2u} (2u - 1) [4 \ln(y) y u \partial_y + (2u - 1) \partial_u], \\ X_3 &= \frac{1}{u} (2u - 1) \partial_u, & X_4 &= \frac{1}{u} \ln(y) [4 \ln(y) y u \partial_y + (2u - 1) \partial_u], \\ X_5 &= \frac{1}{u} e^{-2u} \partial_u, & X_6 &= \frac{1}{u} \ln(y) e^{-2u} \partial_u, & X_7 &= y \partial_y, & X_8 &= \ln(y) y \partial_y. \end{aligned} \quad (15)$$

Это означает, что уравнение (13) линеаризуется с помощью точечных преобразований [6]. В работе [20] также показано, как найти линеаризующие преобразование, таким образом, общее решение уравнения (13) легко может быть получено. Более того, для нахождения первых интегралов можно использовать метод последнего множителя Якоби. Для того чтобы применить этот метод, запишем уравнение (13) как систему двух неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$u' = u_x, \quad u'_x = -\frac{(2u_x y + 1)u + u_x y}{uy} u_x, \quad (16)$$

³⁾ Отметим, что мы изменили обозначения по сравнению с оригинальной работой.

где u_x — новая (очевидная) зависимая переменная. Нужно, разумеется, очевидным образом построить первые продолжения генераторов (15), для того чтобы каждый из них порождал симметрию Ли системы (16). Например, первое продолжение генератора X_1 есть

$$X_1 = \frac{1}{4}e^{2u}(2u-1)y\partial_y - \frac{1}{4}e^{2u}u_x(4uu_xy + 2u-1)\partial_{u_x}.$$

Заметим, что система (16) не является автономной; это означает, что соответствующие матрицы, входящие в формулу (11), имеют три столбца и, следовательно, существуют 28 возможных детерминантов, подлежащих вычислению. Например, матрица, получаемая при выборе генераторов X_1 и X_3 , имеет вид

$$C_{13} = \begin{bmatrix} 1 & u_x & -\frac{(2u_xy+1)u+u_xy}{uy}u_x \\ \frac{1}{4}e^{2u}(2u-1)y & 0 & -\frac{1}{4}e^{2u}u_x(4uu_xy + 2u-1) \\ 0 & \frac{2u-1}{u} & \frac{u_x}{u^2} \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Первые интегралы системы (16) теперь, очевидно, могут быть получены как отношения двух не обращающихся в нуль детерминантов. Используя пакет программ Maple 7, легко убедиться, что некоторые из не обращающихся в нуль детерминантов равны⁴⁾

$$\begin{aligned} \Delta_{14} &= -\frac{u_x}{4u}e^{2u}(-2u+1+4u_xyu\ln(y))^2, & \Delta_{15} &= u_x^2y, \\ \Delta_{16} &= \frac{u_x}{4u}(-2u+1+4u_xyu\ln(y)), & \Delta_{17} &= -y^2u_x^3ue^{2u} = -u_xyue^{2u}\Delta_{15}. \end{aligned}$$

В результате величины

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{15}} = -\frac{e^{2u}}{4u_xyu}(-2u+1+4u_xyu\ln(y))^2, \\ I_2 &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{16}} = -e^{2u}(-2u+1+4u_xyu\ln(y)), \\ I_3 &= \frac{\Delta_{14}}{\Delta_{17}} = -u_xyue^{2u}\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{15}} = -u_xyue^{2u}I_1 \implies I_4 = u_xyue^{2u} \end{aligned}$$

являются первыми интегралами⁵⁾ системы (16) и, как следствие, уравнения (13). Мы, естественно, опустили все другие возможные комбинации (общим числом 210), которые дают те же первые интегралы, что и выше, или константу. Отметим, наконец, что первый интеграл I_4 соответствует первому интегралу I (14), найденному в работе [23].

⁴⁾Мы используем символ Δ_{ij} для обозначения детерминанта матрицы, во вторую и третью строки которой входят соответственно X_i и X_j . Выражения для большего числа детерминантов приведены в работе [20].

⁵⁾Напомним, что уравнение (13) обладает только двумя функционально независимыми первыми интегралами, и выписанные интегралы, естественно, являются функциями двух переменных, представляющих те интегралы, которым отдано предпочтение.

4. СИММЕТРИИ ЛИ И ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

В работе [24] Калоджеро получил разрешимую задачу многих тел,

$$\ddot{z}_n = 2 \sum_{m=1, m \neq n}^N \frac{\dot{z}_n \dot{z}_m}{z_n - z_m}, \quad n = 1, \dots, N, \quad (18)$$

путем рассмотрения следующего разрешимого нелинейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\varphi_t + \varphi_x + \varphi^2 = 0, \quad \varphi \equiv \varphi(x, t),$$

и наблюдения за поведением полюсов его решения. В работе [25] была представлена та же система (18), проведено дальнейшее изучение ее свойств и дано решение в терминах корней следующего алгебраического уравнения по z :

$$\sum_{m=1}^N \frac{\dot{z}_m(0)}{[z - z_m(0)]} = \frac{1}{t}. \quad (19)$$

В этой работе Калоджеро, следуя Захарову [26], назвал систему (18) “золотой рыбкой”. В работе [12] мы использовали предложенный в [9] метод редукции и анализ групп Ли, чтобы показать, что “золотая рыбка” Калоджеро (18) допускает линеаризацию и может быть преобразована в следующую тривиальную линейную систему из $(N-1)$ уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 \tilde{u}_j}{d\tilde{y}^2} = 0, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (20)$$

представляющую собой в действительности “косяк” свободных частиц. Рассмотрим здесь для примера случай $N = 3$. Если ввести шесть новых зависимых переменных $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$, так что

$$z_1 = w_1, \quad z_2 = w_2, \quad z_3 = w_3, \quad \dot{z}_1 = w_4, \quad \dot{z}_2 = w_5, \quad \dot{z}_3 = w_6, \quad (21)$$

то система (18) превратится в автономную систему шести уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_4, & \dot{w}_2 &= w_5, & \dot{w}_3 &= w_6, & \dot{w}_4 &= 2 \left(\frac{w_4 w_5}{w_1 - w_2} + \frac{w_4 w_6}{w_1 - w_3} \right), \\ \dot{w}_5 &= 2 \left(\frac{w_5 w_4}{w_2 - w_1} + \frac{w_5 w_6}{w_2 - w_3} \right), & \dot{w}_6 &= 2 \left(\frac{w_6 w_4}{w_3 - w_1} + \frac{w_6 w_5}{w_3 - w_2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Если следовать методу редукции и ввести новую независимую переменную, скажем⁶⁾, $y = w_1$, то эта система сведется к следующей неавтономной системе пяти уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} w'_2 &= \frac{w_5}{w_4}, & w'_3 &= \frac{w_6}{w_4}, & w'_4 &= 2 \left(\frac{w_5}{y - w_2} + \frac{w_6}{y - w_3} \right), \\ w'_5 &= 2 \left(\frac{w_5}{w_2 - y} + \frac{w_5 w_6}{w_4 (w_2 - w_3)} \right), & w'_6 &= 2 \left(\frac{w_6}{w_3 - y} + \frac{w_6 w_5}{w_4 (w_3 - w_2)} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $'$ обозначает производную по переменной y . Если выразить w_5 из первого, а w_6 из второго уравнения системы (23), т.е. положить $w_5 = w'_2 w_4$, $w_6 = w'_3 w_4$, то получится следующая система из трех уравнений:

$$w'_4 = 2w_4 \frac{w'_2(y - w_3) + w'_3(y - w_2)}{(w_2 - y)(w_3 - y)}, \quad (24)$$

$$w''_3 = 2w'_3 \frac{w'_2(w_3 - y)^2 + w'_3(w_2 - y)(w_3 - w_2) + (w_3 - w_2)(w_2 - y)}{(w_2 - y)(w_3 - y)(w_3 - w_2)}, \quad (25)$$

$$w''_2 = 2w'_2 \frac{w'_2(w_3 - y)(w_3 - w_2) - w'_3(w_2 - y)^2 + (w_3 - y)(w_3 - w_2)}{(w_2 - y)(w_3 - w_2)(w_3 - y)}. \quad (26)$$

Примечательно, что оба уравнения второго порядка (25) и (26) не зависят от переменной w_4 , а уравнение (24) может быть легко проинтегрировано, коль скоро найдено общее решение системы (25), (26). Поэтому анализ групп Ли можно применить только к системе (25), (26). Используя интерактивные программы REDUCE [16], мы получаем 15-мерную алгебру симметрий Ли⁷⁾, порождаемую 15 операторами [12]; это означает, что система (25), (26) может быть линеаризована [28], [29]. Для того чтобы найти линеаризующее преобразование, мы ищем четырехмерную абелеву подалгебру $L_{4,2}$ ранга 1 и должны преобразовать ее к каноническому виду [29]

$$\partial_{\tilde{y}}, \quad \tilde{u}_1 \partial_{\tilde{y}}, \quad \tilde{u}_2 \partial_{\tilde{y}}, \quad \tilde{y} \partial_{\tilde{y}},$$

где $\tilde{y}$ и $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ — новые независимая и зависимые переменные, соответственно. Находим, что одной такой подалгеброй является подалгебра, порождаемая генераторами

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{y^2 \partial_y}{(y - w_3)(y - w_2)} + \frac{w_3^2 \partial_{w_3}}{(w_3 - w_2)(w_3 - y)} + \frac{w_2^2 \partial_{w_2}}{(w_2 - w_3)(w_2 - y)}, \\ X_2 &= (yw_3 + yw_2 + w_3w_2)X_1, \quad X_3 = yw_3w_2X_1, \quad X_4 = (y + w_3 + w_2)X_1. \end{aligned} \quad (27)$$

⁶⁾ В качестве новой независимой переменной можно выбрать любую другую зависимую переменную.

⁷⁾ Эта алгебра симметрий изоморфна алгебре $sl(4, \mathbb{R})$ [8], [27].

Теперь нетрудно получить, что линеаризующее преобразование имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{y} &= y + w_3 + w_2 = z_1 + z_2 + z_3, \\ \tilde{u}_1 &= yw_3 + yw_2 + w_3w_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3, \quad \tilde{u}_2 = yw_3w_2 = z_1z_2z_3,\end{aligned}\tag{28}$$

и система (25), (26) превращается в систему

$$\frac{d^2\tilde{u}_1}{d\tilde{y}^2} = 0, \quad \frac{d^2\tilde{u}_2}{d\tilde{y}^2} = 0,\tag{29}$$

которую можно интерпретировать как уравнения одномерного движения свободных частиц.

Список литературы

- [1] Notices of AMS. 2001. V. 48. P. 416–417; <http://www.ams.org/notices/200104>.
- [2] *T. Hawkins*. The Emergence of the Theory of Lie Groups: An Essay in the History of Mathematics 1869–1926. Berlin: Springer, 2000.
- [3] *T. Hawkins*. Arch. Hist. Exact Sciences. 1991. V. 42. P. 187–278.
- [4] *S. Lie*. Theorie der Transformationsgruppen. Erster Abschnitt. Leipzig: Teubner, 1888; Zweiter Abschnitt. Leipzig: Teubner, 1890; Dritter und Letzter Abschnitt. Leipzig: Teubner, 1893.
- [5] *S. Lie*. Geometrie der Berührungstransformationen. Leipzig: Teubner, 1896.
- [6] *S. Lie*. Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig: Teubner, 1912.
- [7] *W. F. Ames*. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering. V. 2. N.Y.: Academic Press, 1972; *G. W. Bluman, J. D. Cole*. Similarity Methods for Differential Equations. Berlin: Springer, 1974; *Л. В. Овсянников*. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978; *П. Олвер*. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989; *G. W. Bluman, S. Kumei*. Symmetries and Differential Equations. Berlin: Springer, 1989; *C. Rogers, W. F. Ames*. Nonlinear Boundary Value Problems in Science and Engineering. N.Y.: Academic Press, 1989; *H. Stephani*. Differential Equations. Their Solution Using Symmetries. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989; *J. M. Hill*. Differential Equations and Group Methods for Scientists and Engineers. Boca Raton: CRC Press, 1992; *N. H. Ibragimov (ed.)*. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. I: Symmetries, Exact Solutions, and Conservation Laws. Boca Raton: CRC Press, 1994; V. II: Applications in Engineering and Physical Sciences. Boca Raton: CRC Press, 1995; *N. H. Ibragimov*. Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations. N.Y.: Wiley, 1999; *P. E. Hydon*. Symmetry Methods for Differential Equations: A Beginner's Guide. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [8] *F. González-Gascón, A. González-López*. J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 2006–2021.
- [9] *M. C. Nucci*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 1772–1775.
- [10] *V. Torrisi, M. C. Nucci*. Application of Lie group analysis to a mathematical model which describes HIV transmission. In: The Geometrical Study of Differential Equations. Eds. J. A. Leslie, T. P. Hobart. Providence: AMS, 2001. P. 31–40; *M. C. Nucci, P. G. L. Leach*. J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 746–764.
- [11] *M. C. Nucci*. J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 4107–4118; *P. G. L. Leach, M. C. Nucci*. J. Math. Phys. 2004. V. 45. P. 3590–3604.
- [12] *M. C. Nucci*. J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 11391–11400.

- [13] *M. Marcelli, M. C. Nucci.* J. Math. Phys. 2003. V. 44. P. 2111–2132.
- [14] *E. Noether.* Kgl. Ges. Wiss. Nach. Math-phys. Kl. 1918. Heft 2. P. 235–269.
- [15] *Н. Х. Ибрагимов.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Знание, 1991.
- [16] *M. C. Nucci.* Interactive REDUCE programs for calculating Lie point, non-classical, Lie-Bäcklund, and approximate symmetries of differential equations: manual and floppy disk. In: CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 3: New Trends. Ed. N. H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press, 1996. P. 415–481.
- [17] *V. K. Chandrasekar, M. Senthilvelan, M. Lakshmanan.* J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 4527–4534.
- [18] *M. Senthil Velan, M. Lakshmanan.* J. Phys A. 1995. V. 28. P. 1929–1942.
- [19] *L. Hsu, N. Kamran.* Lett. Math. Phys. 1988. V. 15. P. 91–99.
- [20] *M. C. Nucci.* Lie will out. Dipartimento di Matematica e Informatica. Università di Perugia, 06123 Perugia, Italy, 2004, in preparation.
- [21] *C. G. J. Jacobi.* Giornale Arcadico di Scienze, Lettere ed Arti. 1844. V. 99. P. 129–146; J. Reine Angew. Math. 1844. V. 27. P. 199–268; 1845. V. 29. P. 213–279 and 333–376; Vorlesungen über Dynamik. Berlin: Druck und Verlag von Georg Reimer, 1886.
- [22] *L. Bianchi.* Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Pisa: Enrico Spoerri, 1918.
- [23] *L. G. S. Duarte, S. E. S. Duarte, L. A. C. P. da Mota, J. E. F. Skea.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 3015–3024.
- [24] *F. Calogero.* Nuovo Cimento. B. 1978. V. 43. P. 177–241.
- [25] *F. Calogero.* Physica. D. 2001. V. 152–153. P. 78–84.
- [26] *V. E. Zakharov.* On the dressing method. In: Inverse Methods in Action. Proc. of Multicennials Meeting on Inverse Problems (Montpellier, 27 November–1 December, 1989). Ed. P. C. Sabatier. Berlin: Springer, 1990. P. 602–623.
- [27] *A. González-López.* J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 1097–1105.
- [28] *M. E. Fels.* Proc. Lond. Math. Soc. III. Ser. 1995. V. 71. P. 221–240.
- [29] *C. W. Soh, F. M. Mahomed.* Int. J. Nonlinear Mech. 2001. V. 36. P. 671–677.