Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Олвер, И. В. Барашенков, Комплексное уравнение синус-Гордон-2: новый алгоритм получения многовихревых решений на плоскости, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 405–409

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1865>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:33:50

© 2005 г.

Н. Олвер*, И. В. Барашенков*

КОМПЛЕКСНОЕ УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОН-2: НОВЫЙ АЛГОРИТМ ПОЛУЧЕНИЯ МНОВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

Для второй интегрируемой комплексификации уравнения синус-Гордон на плоскости получено новое преобразование, повышающее вихревое число решения. Новое преобразование состоит из произведения всего четырех отображений Шлезингера пятого уравнения Пенлеве в себя и позволяет строить n -вихревые решения более эффективно, чем известное ранее преобразование, состоящее из произведения $2n$ таких отображений.

Ключевые слова: вихри, преобразования Беклунда, пятое уравнение Пенлеве, комплексное уравнение синус-Гордон.

1. Комплексное уравнение синус-Гордон, известное также как модель Редже–Лунда, возникает в ряде моделей теории поля [1]. В пространстве размерности $(2+0)$ уравнение принимает вид

$$\nabla^2 \psi + \frac{(\nabla \psi)^2 \bar{\psi}}{1 - |\psi|^2} + \psi(1 - |\psi|^2) = 0 \quad (1)$$

(здесь и далее $\nabla = \mathbf{i}\partial_x + \mathbf{j}\partial_y$.) Будем называть уравнение (1) комплексным уравнением синус-Гордон-1 с тем, чтобы отличать его от другой интегрируемой комплексификации уравнения синус-Гордон – так называемого комплексного уравнения синус-Гордон-2:

$$\nabla^2 \psi + \frac{(\nabla \psi)^2 \bar{\psi}}{2 - |\psi|^2} + \frac{1}{2} \psi(1 - |\psi|^2)(2 - |\psi|^2) = 0. \quad (2)$$

Эта модель также известна с конца 1970-х годов, когда она была введена в пространстве размерности $(1+1)$ [2]. Названия проистекают из того факта, что если считать ψ вещественным и подставить $\psi = \sin(\alpha/2)$ в уравнение (1) и $\psi = \sqrt{2} \sin(\alpha/4)$ в уравнение (2), то обе системы редуцируются к стандартному вещественному уравнению синус-Гордон

*Department of Mathematics, University of Cape Town, Rondebosch 7701, South Africa. E-mail: igor@maths.uct.ac.za

$\nabla^2 \alpha + \sin \alpha = 0$. В физической литературе эти две модели обычно определяются соответствующими функционалами действия

$$E_{\text{SG1}} = \int \left\{ \frac{|\nabla \psi|^2}{1 - |\psi|^2} + (1 - |\psi|^2) \right\} d^2 x$$

и

$$E_{\text{SG2}} = \int \left\{ \frac{|\nabla \psi|^2}{1 - |\psi|^2/2} + \frac{1}{2}(1 - |\psi|^2)^2 \right\} d^2 x.$$

Недавний подъем интереса к комплексным уравнениям синус-Гордон связан с тем, что они представляют собой интегрируемые массивные возмущения конформных теорий поля [3]. Имеется, однако, и еще одно основание для более детального рассмотрения этих систем. Среди всех уравнений для одного комплексного поля, обладающих вихревыми решениями, уравнения синус-Гордон-1 и -2 являются единственными двумя системами, в которых вихревые (в том числе и многовихревые) решения известны в явном виде [4], [5]. Тем самым они представляют собой уникальную лабораторию для анализа общих свойств топологических солитонов на плоскости. Последнее обстоятельство может оказаться существенным для целого ряда моделей, таких как уравнения Гросса-Питаевского и ферромагнетиков с анизотропией типа “легкая плоскость”, где вихри поддаются только численному анализу.

Многовихревые (в частности, коаксиальные) решения комплексного уравнения синус-Гордон-2 были получены посредством преобразований Шлезингера пятого уравнения Пенлеве [4]. Процедура весьма непростая: для построения n -вихревого решения отображение Шлезингера приходится применять $2n$ раз, причем тот факт, что $(n - 1)$ -вихревое решение уже известно, никаких преимуществ для построения n -вихревого не дает. Напротив, для комплексного уравнения синус-Гордон-1 имеется одношаговая рекурсивная процедура, позволяющая построить n -вихревое решение по известному $(n - 1)$ -вихревому. Цель данной работы – сформулировать аналогичную рекурсивную процедуру для комплексного уравнения синус-Гордон-2.

2. Коаксиальная n -вихревая конфигурация имеет вид $\psi(r, \theta) = Q_n^{1/2}(r)e^{in\theta}$. Подстановка этого анзаца в уравнение (2) приводит к уравнению для радиальной “амплитуды” Q_n , которое мы запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Q_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dQ_n}{dr} + \frac{1 - Q_n}{Q_n(Q_n - 2)} \left(\frac{dQ_n}{dr} \right)^2 + Q_n(1 - Q_n)(2 - Q_n) + \\ + \frac{(a^2 - b^2)Q_n}{r^2(2 - Q_n)} + \frac{4a^2(1 - Q_n)}{r^2 Q_n(2 - Q_n)} + \frac{\gamma Q_n(2 - Q_n)}{2r} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $a = \gamma = 0$ и $b = -2n$. Поскольку два последних слагаемых в уравнении (3) тождественно равны нулю, такая форма записи может показаться несколько искусственной. Причина, по которой мы рассматриваем уравнение (3) с произвольными a , b , и γ , состоит

в наличии преобразований, связывающих решения с различными наборами параметров. Действительно, замена переменных [4]

$$Q_n = \frac{2}{1-W} \quad (4)$$

переводит уравнение (3) в пятое уравнение Пенлеве:

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} - \frac{3W-1}{2W(W-1)} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 = \frac{(W-1)^2}{r^2} \left(\alpha W + \frac{\beta}{W} \right) + \frac{\gamma W}{r} + \delta \frac{W(W+1)}{W-1}, \quad (5)$$

где $\alpha = a^2/2$, $\beta = -b^2/2$ и $\delta = 2$. Пятое уравнение Пенлеве является ковариантным относительно преобразования Шлезингера [6], которое переводит решение W со значениями параметров a, b, γ и δ в решение $\widehat{W}$ того же уравнения со значениями параметров

$$\hat{a} = \frac{1}{2} \left(a + b - 1 - \frac{\gamma}{c} \right), \quad \hat{b} = \frac{1}{2} \left(a + b - 1 + \frac{\gamma}{c} \right), \quad \hat{\gamma} = c(b-a)$$

и $\hat{\delta} = \delta$. Здесь c — одно из двух значений, для которых $c^2 = -2\delta$; в нашем случае можно без потери общности положить $c = 2i$. В терминах Q и $\widehat{Q} = 2(1 - \widehat{W})^{-1}$ прямое и обратное преобразования Шлезингера имеют вид

$$\widehat{Q} = 1 - \frac{i}{Q(Q-2)} \left[\frac{dQ}{dr} + \frac{Q(a+b)-2a}{r} \right], \quad (6a)$$

$$Q = 1 + \frac{i}{\widehat{Q}(\widehat{Q}-2)} \left[\frac{d\widehat{Q}}{dr} - \frac{(\widehat{Q}-1)(a+b-1)}{r} + \frac{i\gamma}{2r} \right]. \quad (6b)$$

Если $Q^{(0)} = Q_n$ — решение уравнения (3) с параметрами $a^{(0)} = \gamma^{(0)} = 0$ и $b^{(0)} = -2n$, то, применяя преобразование (6a), получаем решение $\widehat{Q} = Q^{(1)}$ с параметрами

$$a^{(1)} = \frac{1}{2} \left(a^{(0)} + b^{(0)} - 1 - \frac{\gamma^{(0)}}{c} \right) = -n - \frac{1}{2},$$

$$b^{(1)} = \frac{1}{2} \left(a^{(0)} + b^{(0)} - 1 + \frac{\gamma^{(0)}}{c} \right) = -n - \frac{1}{2},$$

$$\gamma^{(1)} = 2i(b^{(0)} - a^{(0)}) = -4in.$$

Поскольку $a^{(1)}$ и $\gamma^{(1)}$ ненулевые, а $b^{(1)}$ не является целым отрицательным четным числом, то $Q^{(1)}$ не представляет собой амплитуду никакого многовихревого решения. Далее, снова используя (6a), на этот раз при $Q = Q^{(1)}$ и $\widehat{Q} = Q^{(2)}$, получаем решение $Q^{(2)}$ с параметрами

$$a^{(2)} = \frac{1}{2} \left(a^{(1)} + b^{(1)} - 1 - \frac{\gamma^{(1)}}{c} \right) = -1,$$

$$b^{(2)} = \frac{1}{2} \left(a^{(1)} + b^{(1)} - 1 + \frac{\gamma^{(1)}}{c} \right) = -2n - 1,$$

$$\gamma^{(2)} = 2i(b^{(1)} - a^{(1)}) = 0.$$

Таким образом, произведение преобразований $Q^{(0)} \rightarrow Q^{(2)}$, являющееся произведением двух вышеупомянутых преобразований, уменьшает a и b на единицу. Заметим, что хотя γ теперь нулевое, $Q^{(2)}$ по-прежнему не является многовихревым решением (поскольку $a^{(2)}$ ненулевое). Ключевое наблюдение теперь состоит в том, что уравнение (3) содержит зависимость только от квадрата a , поэтому $Q^{(2)}$ является решением уравнения (3) не только при $a = -1$, $b = -2n - 1$, но и одновременно при $\tilde{a} = +1$, $\tilde{b} = -2n - 1$. Повторение двух приведенных выше преобразований уменьшает и $\tilde{a}$, и $\tilde{b}$ еще на одну единицу, и в результате получаем $a^{(4)} = 0$, $b^{(4)} = -2n - 2$. Соответствующим решением $Q^{(4)}$ поэтому будет Q_{n+1} – многовихревая конфигурация с вихревым числом $n + 1$. Таким образом, преобразование $Q^{(0)} \rightarrow Q^{(4)}$, состоящее из произведения четырех отображений Шлезингера, является не чем иным, как повышающим вихревое число преобразованием $Q_n \rightarrow Q_{n+1}$.

Начав с тривиального “вихря” $Q_0 = 1$ и рекуррентно применяя преобразование $Q_n \rightarrow Q_{n+1}$, можно построить многовихревые решения с любым наперед заданным вихревым числом. Из вида преобразования следует, что все Q_n будут рациональными функциями r . Одно-, двух- и трехвихревые амплитуды таковы:

$$Q_1 = \frac{r^2}{r^2 + 4}, \quad Q_2 = \frac{r^4(r^2 + 24)^2}{r^8 + 64r^6 + 1152r^4 + 9216r^2 + 36864},$$

$$Q_3 = \frac{r^6(r^6 + 144r^4 + 5760r^2 + 92160)^2}{D_3},$$

где

$$D_3 = r^{18} + 324r^{16} + 41472r^{14} + 2820096r^{12} + 114130944r^{10} + 2919628800r^8 + 50960793600r^6 + 61152952300r^4 + 4892236185600r^2 + 19568944742400.$$

Эти решения совпадают, разумеется, с построенными ранее [4], однако наш новый алгоритм намного проще.

3. Таким образом, мы построили преобразование, повышающее вихревое число (топологический заряд) для радиально-симметричных многовихревых решений комплексного уравнения синус-Гордон-2. Это преобразование позволяет строить коаксиальные многовихревые решения рекуррентным способом “от n к $n + 1$ ” и является намного более эффективным подходом, чем применявшаяся ранее процедура “от 0 к n ” [4]. В новом подходе многовихревые решения с вихревым числом $n + 1$ (получение которых ранее требовало $2(n + 1)$ шагов [4]) получаются из n -вихревых всего за 4 шага.

Помимо вычислительных преимуществ, существование повышающего вихревое число преобразования указывает на сильное сходство двух интегрируемых комплексификаций уравнения синус-Гордон, а именно комплексных уравнений синус-Гордон-2 и синус-Гордон-1. Преобразования этого типа сыграли центральную роль в построении *некоаксиальных* многовихревых решений комплексного уравнения синус-Гордон-1 [5]. Наличие повышающего вихревое число преобразования указывает на то, что явные некоаксиальные многовихревые решения должны также существовать и у комплексного уравнения синус-Гордон-2.

Благодарности. Работа была поддержана со стороны NRF of South Africa, грант № 2053723, Johnson Bequest Fund и URC of the University of Cape Town.

Список литературы

- [1] *K. Pohlmeyer*. Commun. Math. Phys. 1976. V. 46. P. 207; *F. Lund, T. Regge*. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 1524; *Б. С. Гетманов*. Письма в ЖЭТФ. 1977. Т. 25. С. 132; *A. Neveu, N. Papanicolaou*. Commun. Math. Phys. 1978. V. 58. P. 31.
- [2] *S. Sciuto*. Phys. Lett. B. 1980. V. 90. P. 75; *Б. С. Гетманов*. ТМФ. 1981. Т. 48. С. 13.
- [3] *V. A. Fateev*. Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 2109; *I. Bakas*. Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 3443; *Q.-H. Park*. Phys. Lett. B. 1994. V. 328. P. 329; *V. A. Brazhnikov*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 501. P. 685; *I. Bakas, J. Sonnenschein*. JHEP. 2002. V. 0212. P. 049; hep-th/0211257.
- [4] *I. V. Barashenkov, D. E. Pelinovsky*. Phys. Lett. B. 1998. V. 436. P. 117.
- [5] *I. V. Barashenkov, V. S. Shchesnovich, R. M. Adams*. Nonlinearity. 2002. V. 15. P. 2121.
- [6] *A. S. Fokas, U. Mugan, M. J. Ablowitz*. Physica D. 1988. V. 30. P. 247; *V. Gromak*. Bäcklund transformations of Painlevé equations and their applications. In: The Painlevé Property. One Century Later. Cargèse School, 3–22 June, 1996. CRM Series in Mathematical Physics. Ed. R. Conte. N.Y.: Springer, 1999. P. 687.