Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Векслер, Й. Зарми, Пертурбативный анализ взаимодействия волн в нелинейных системах, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 410–422

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1866>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:04:53

ПЕРТУРБАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Предложен новый способ преодоления препятствий к асимптотической интегрируемости в возмущенных нелинейных дифференциальных уравнениях в частных производных в рамках метода нормальных форм (НФ) для случая многоволновых решений. Вместо того чтобы целиком включать препятствие в НФ, туда включается только его резонансная часть (если таковая существует), а остаток относится к гомологическому уравнению. В результате НФ остается интегрируемой, а ее решения сохраняют характер решений невозмущенного уравнения. Произвол в разложении используется для построения канонических препятствий, которые ограничены областью взаимодействия волн. Для солитонных решений (например, в уравнении Кортевега–де Фриза) область взаимодействия является конечной областью вокруг начала координат; канонические препятствия при этом не порождают секулярных членов в гомологическом уравнении. Когда область взаимодействия является бесконечной (или полубесконечной – например, в решениях уравнения Бюргера типа волновых фронтов), препятствия могут содержать резонансные члены. Препятствия порождают волны нового типа, которые нельзя записать в виде функционалов решений НФ. Когда препятствие дает резонансный вклад в НФ, происходит нестандартная корректировка волновой скорости.

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, взаимодействия волн, препятствия к асимптотической интегрируемости, возмущенное уравнение Кортевега–де Фриза, возмущенное уравнение Бюргера.

1. ЗАДАЧА О ПРЕПЯТСТВИЯХ К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Исследования эффектов возмущения волновых решений эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) развивались в рамках двух различных подходов. В методе рассеяния решение невозмущенного уравнения рассеивается на возмущении, которое включается при $t = 0$. Поскольку невозмущенное решение не является решением возмущенного уравнения, его амплитуда убывает и его волновое число,

*Department of Physics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, 84105, Israel. E-mail: vekslera@bgu.ac.il, zarmi@bgu.ac.il

†Department of Solar Energy & Environmental Physics, Jacob Blaustein Institute for Desert Research, Sede-Boqer Campus, 84990, Israel

скорость и фазовый сдвиг изменяются. Кроме того, в случае возмущенного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) солитонный хвост был обнаружен вне солитонного сектора. Используемые методы представляли собой комбинацию метода обратной задачи рассеяния и процедуры множественного разложения по времени [1]–[8].

Второй подход состоит в другом. Интегрируемые нелинейные эволюционные уравнения являются приближением низшего порядка к более сложным уравнениям, описывающим полные динамические системы (например, уравнения динамики жидкости в случаях уравнений Бюргерса и КдФ и уравнения Максвелла в случае нелинейного уравнения Шредингера (НУШ)). Для улучшения аппроксимации эффекты высших порядков включаются в исходную физическую систему. При этом возмущение не включается при $t = 0$. Оно существует во все моменты времени начиная с $t = -\infty$.

В этом подходе ищется решение нулевого порядка, которое имеет ту же волновую структуру, что и решение невозмущенного уравнения, за исключением изменения волновой скорости за счет эффектов высших порядков. Метод нормальных форм (НФ) применялся для анализа солитонных решений возмущенных уравнений КдФ и НУШ [9]–[13] и решений типа фронтов возмущенного уравнения Бюргерса [14]–[16]. Метод множественных временных масштабов использовался для возмущенного уравнения КдФ [17]–[19] и для возмущенного НУШ [20].

Мы сконцентрируем внимание на задачах, возникающих при анализе волновых решений в рамках второго подхода. Большинство интегрируемых нелинейных эволюционных ДУЧП допускают как одно-, так и многоволновые решения. Многоволновые решения, как правило, асимптотически стремятся к отчетливо разделенным одиночным волнам в $(x - t)$ -плоскости, за исключением областей взаимодействия, где многоволновой характер решения теряется. Области взаимодействия могут быть локализованными (например, в случае многосолитонных решений уравнения КдФ) или полубесконечными (например, многофронтные решения уравнения Бюргерса). Основная цель данной работы состоит в том, чтобы исследовать влияние, которое возмущения, добавляемые к невозмущенному уравнению, оказывают на волновые решения нелинейных систем.

Возмущенные уравнения часто анализируют в рамках метода НФ [14], [21], [22], который в кратком изложении состоит в следующем. Пусть

$$w_t = F^{(0)}[w] + \sum_{k=1} \epsilon^k F^{(k)}[w] \quad (1)$$

— возмущенное нелинейное эволюционное ДУЧП (квадратные скобки означают, что соответствующий член является дифференциальным полиномом по $w(x, t)$). Мы предполагаем, что $w(x, t)$ можно разложить по малому параметру ϵ в степенной ряд дифференциальных многочленов от $u(x, t)$ (почти тождественное преобразование (ПТП)):

$$w = \sum_{k=0} \epsilon^k u^{(k)}[u] \quad (u \equiv u^{(0)}). \quad (2)$$

Предполагается, что временная эволюция члена нулевого порядка $u(x, t)$ управляется НФ:

$$u_t = \sum_{k=0} \epsilon^k \alpha_k S^{(k)}[u] \quad (\alpha_0 = 1). \quad (3)$$

Здесь $S^{(k)}$ – *резонансные члены*, обычно называемые *симметриями*. Их временная динамика эквивалентна динамике функции $u(x, t)$ с точностью до первого порядка, т.е.

$$(u + \mu S^{(n)})_t = F^{(0)}[u + \mu S^{(0)}] \quad (\mu \ll 1). \quad (4)$$

В результате их *скобки Ли* [23] обращаются в нуль:

$$[F^{(0)}, S^{(n)}] \equiv \sum_i \left\{ \frac{\partial F^{(0)}}{\partial u_i} \partial_x^i S^{(n)} - \frac{\partial S^{(n)}}{\partial u_i} \partial_x^i F^{(0)} \right\} = 0. \quad (5)$$

Симметрии (включая саму $F^{(0)}$) образуют *иерархии* [24], [25]. Можно установить *рекуррентные соотношения* между симметриями в каждой иерархии. Для многих уравнений (и всех уравнений, рассматриваемых в данной работе) первая симметрия имеет вид

$$S^{(1)}[u] = u_x. \quad (6)$$

Подставляя ПТП (2) и НФ (3) в (1), получаем последовательность *гомологических уравнений* для временной эволюции производных $u^{(n)}$, которую предстоит решить порядок за порядком.

Мотивировка предположения (3) состоит в том, что пертурбативный анализ, в котором резонансные члены не переносятся из гомологического уравнения в НФ, обычно приводит к секулярностям, т.е. неограниченным членам в приближенном решении. С другой стороны, от НФ ожидается интегрируемость и сохранение природы невозмущенного решения. Это свойство тесно связано с другим, весьма важным: при добавлении членов высших порядков к НФ основной эффект сводится к изменению физически значимых параметров (как правило, соотношения волновой скорости и дисперсии).

После устранения резонансных членов из гомологических уравнений они принимают вид

$$[F^{(0)}, u^{(k)}[u]] + T^{(k)}[u] = 0, \quad (7)$$

где $T^{(k)}[u]$ – вклад всех нерезонансных членов порядка k . ПТП строится из решений этих уравнений.

Однако начиная с некоторого порядка в разложении анализ может привести к выявлению препятствий к интегрируемости [9]–[13], [15]–[19], [26] – таких членов (дифференциальных полиномов), порождаемых в пертурбативном разложении динамического уравнения (1), которые нельзя учесть в формализме. Структура препятствий как дифференциальных полиномов не однозначна и зависит от способа, которым строится ПТП.

Для того чтобы сделать построение ПТП возможным, обычный способ действий состоит в добавлении этих неучтенных членов в НФ. Это делает НФ неинтегрируемой, откуда и происходит название “препятствие к интегрируемости”. Включение препятствий в НФ возмущает волновой характер ее решений. В случае двухсолитонного решения возмущенного уравнения КдФ в НФ [9]–[11] эффект препятствий изучался в [13], [27]. Было найдено, что решению в нулевом порядке свойственны неупругие эффекты: появление излученной волны второго порядка, зависящие от времени поправки четвертого порядка к каждому из волновых чисел, а также генерация солитона восьмого порядка.

2. ПОДХОД К ПРЕОДОЛЕНИЮ ПРЕПЯТСТВИЙ

2.1. Общие идеи. Необходимость включения препятствий в НФ следует из допущения, обычно принимаемого в НФ-разложении, что все члены в ПТП являются дифференциальными полиномами в приближении нулевого порядка (т.е. полиномами по $u(x, t)$) и не зависят явно от независимых переменных t и x . В нашем подходе эта проблема преодолевается за счет того, что допускается зависимость от этих переменных членов высших порядков в ПТП. Для этого мы предполагаем следующий вид члена k -го порядка в ПТП:

$$u^{(k)} = u_d^{(k)}[u] + u_r^{(k)}(x, t). \quad (8)$$

В уравнении (8) $u_d^{(k)}[u]$ – дифференциальный полином по u , а $u_r^{(k)}(x, t)$ явно зависит от x и t и служит, как предполагается, для учета препятствий. Таким образом, подставляя допущение (8) в гомологическое уравнение (7), получаем

$$[F^{(0)}, u_r^{(k)}(x, t)] + R^{(k)}[u] = 0, \quad (9)$$

где $R^{(k)}[u]$ обозначает препятствие порядка k .

Из-за произвола, присущего пертурбативному разложению, конструкция для $u_d^{(k)}[u]$ не является однозначной. За исключением случая, когда $u_d^{(k)}[u]$ выбрано подходящим образом, получающееся препятствие может не отражать следующие свойства, представляющие физический интерес:

- а) препятствия не возникают в случае одноволновых решений НФ [13];
- б) ожидание, что препятствия возникают из-за взаимодействия между волнами в многоволновом случае [12].

Оба свойства реализуются, если $u_d^{(k)}[u]$ выбрано так, чтобы оно имело структуру дифференциального полинома, который решает задачу в случае одноволнового решения НФ. Выбор, предложенный для $u_d^{(k)}[u]$, приводит препятствия к “каноническому” виду, выражаемому в терминах симметрий невозмущенного уравнения. Препятствия тогда обращаются в нуль, если подставить для u одноволновое решение НФ. Более важно, что в результате ожидается, что они обратятся в нуль за пределами областей взаимодействия волн в многоволновом случае. Причина состоит в том, что вне областей взаимодействия многоволновые решения асимптотически стремятся к сумме отчетливо разделенных одноволновых решений.

2.2. Конструкция канонических препятствий. Начав с $u_d^{(k)}[u]$ – решения гомологического уравнения (7) для одной волны, находим, что канонические препятствия можно записать в виде

$$R^{(n)}[u] = \sum_{\substack{k=3 \\ i+j=k}}^{n+g} \gamma_k^n f_{ij}[u, \partial_x] R_{ij}[u], \quad (10)$$

$$\begin{aligned} R_{pq}[u] &= S^{(p)}[u] G^{(q)}[u] - S^{(q)}[u] G^{(p)}[u], \\ S^{(n)}[u] &= \partial_x G^{(n)}[u], \end{aligned} \quad (11)$$

где γ_k^n — численный коэффициент, $f_{ij}[u, \partial_x]$ — дифференциальный оператор подходящего веса, а g — интервал между индексами симметрии и порядком возмущения. Например, если определить $F^{(0)}$ как $S^{(2)}$ (что представляет собой широко распространенное обозначение), то $g = 2$.

Препятствия уравнения (10) тождественно обращаются в нуль в случае одноволновых решений НФ. Чтобы увидеть это, используем тот факт, что все симметрии пропорциональны друг другу в случае *одноволновых* решений НФ. Для “тривиального” граничного условия $u(\xi \rightarrow -\infty) = 0$ имеем

$$S^{(n)} = (-1)^{n+1} v_0^{n+1} S^{(1)}. \quad (12)$$

Это можно доказать по индукции для любой иерархии, которая подчинена линейному рекуррентному соотношению.

Пропорциональность всех симметрий приводит к простому изменению скорости решений НФ:

$$v = \sum_{k \geq 0} \epsilon^k v_k, \quad v_k = (-1)^k a_k v_0^{k+1}. \quad (13)$$

Уравнение (13) также описывает изменение скорости каждой волны в многоволновом решении.

2.3. Резонансный вклад в препятствиях? Для многоволновых решений НФ препятствия не обращаются в нуль. Важная характеристика канонических препятствий состоит в том, что они не обращаются в нуль только в пределах областей взаимодействия на $(x-t)$ -плоскости. Например, в случае КдФ-солитонов областью взаимодействия является конечная область вокруг начала координат, тогда как в случае фронтов Бюргерса она состоит из одной или большего числа областей конечной ширины вдоль полубесконечных линий. Канонические препятствия обращаются в нуль экспоненциально быстро за пределами областей взаимодействия, где решение асимптотически приближается к отчетливо разделенным отдельным волнам. Напротив, неканонические препятствия являются конечными также и вне области взаимодействия.

Наиболее существенный вопрос, который теперь возникает, состоит в том, порождают ли препятствия секулярные члены в ПТП (2). Симметрия, если таковая содержится в препятствии, порождает секулярный член посредством уравнения (9). Мы предлагаем поэтому разбить препятствие в сумму симметрии и нерезонансного члена. Эта симметрия со своим коэффициентом должна быть включена в НФ (3).

Наша задача заключается в том, чтобы определить, способно ли каноническое препятствие породить секулярные члены. Простой критерий для выявления таковой способности состоит в том, что препятствие распространяется по бесконечной или полубесконечной области, асимптотически приближаясь к симметрии. (Этот критерий подобен альтернативе Фредгольма, хотя и является намного менее строгим.)

Мы остановимся подробнее на двухволновых решениях двух уравнений: двухсолитонном решении уравнения КдФ, где препятствие возникает во втором порядке, и двухфронтном решении уравнения Бюргерса, где препятствие возникает уже в первом порядке.

Для уравнения КдФ область взаимодействия и тем самым препятствия локализованы. Поэтому мы ожидаем, что решение уравнения (9) для этой задачи будет ограниченным. Это было проверено путем численного решения гомологического уравнения. Мы получаем новую ограниченную солитоноподобную волну.

С другой стороны, область взаимодействия в двухфронтном решении уравнения Бюргерса является полубесконечной (фронты отчетливо разделены в одной половине $(x-t)$ -плоскости и сливаются (взаимодействуя) в другой половине). Каноническое препятствие асимптотически приближается к симметрии $S^{(3)}[u]$. Поэтому мы ожидаем, что препятствие Бюргерса породит секулярный член в уравнении (9). Это было проверено путем численного решения уравнения.

Мы “извлекаем” симметрию $S^{(3)}[u]$ из препятствия вместе с коэффициентом и переводим ее в НФ (3). Таким образом, НФ остается решаемой, но коэффициент при члене первого порядка в измененной волновой скорости изменяется. Остаток не является каноническим препятствием, т.е. не ограничен областью взаимодействия, а напротив, распространяется по всем фронтам решения нулевого порядка. Однако он не содержит симметрию. Решение гомологического уравнения должно быть ограниченным. В замкнутом виде решений гомологического уравнения нет, но численный анализ показывает, что наше предсказание подтверждается.

В следующем разделе эти два примера рассмотрены достаточно подробно. Полные результаты нашей работы будут приведены в последующей публикации. Подчеркнем, что наши результаты критическим образом зависят от волновой природы решений.

2.4. Итоги и заключение. 1. Главный эффект влияния возмущений на взаимодействие волн в многоволновых решениях нелинейных ДУЧП состоит в появлении препятствий к интегрируемости.

2. После перенесения резонансной части препятствий в НФ адекватным способом работы с ними становится гомологическое уравнение. Для этого необходимо допустить явную зависимость членов высших порядков в ПТП (2) от независимых переменных. В действительности $u^{(n)}$ состоит из двух частей: дифференциального полинома $u_d^{(n)}[u]$, структура которого соответствует случаю одноволнового решения НФ (3) (причем препятствий тогда нет), и функции $u_r^{(n)}(x, t)$, которая должна учитывать препятствие.

3. Когда ПТП строится указанным образом, препятствия (если они существуют) получаются в канонической форме (10). Канонические препятствия ограничены областью взаимодействия волн.

4. Когда область взаимодействия локализована (например, для КдФ-солитонов), канонические препятствия не порождают секулярных решений гомологических уравнений (9). Решение гомологического уравнения является тогда ограниченным, и, как правило, недоступно в замкнутом виде.

5. Когда область взаимодействия занимает полубесконечные пределы, ожидается, что препятствия приведут к появлению секулярных решений. Тогда требуется отождествить симметрию, “скрытую” внутри препятствия, и перенести ее из гомологического уравнения в НФ. Остаток препятствия сохраняется в гомологическом уравнении и приводит к ограниченным решениям.

В обеих ситуациях препятствия перестают быть препятствиями к интегрируемости НФ. Она остается интегрируемой, а ее решения (приближения нулевого порядка) сохраняют характер невозмущенных решений. Различие между приведенными выше пунктами 4 и 5 состоит в том, что в пункте 5 затрагивается еще и волновая скорость, в том порядке, в котором существует препятствие. Сосредоточившись на двухволновых решениях, мы нашли, что препятствие, как правило, приводит к дополнительной волне, которая может не выражаться в замкнутом виде. В общем случае гомологическое уравнение следует решать численно.

3. РЕШЕНИЕ ДВУХ ПРИМЕРОВ

3.1. Возмущенное уравнение КдФ. Возмущенное уравнение КдФ имеет вид

$$\begin{aligned} w_t = & 6ww_x + w_{xxx} + \epsilon(30\alpha_1 w^2 w_x + 10\alpha_2 w w_{xx} + 20\alpha_3 w_x w_{xx} + \alpha_4 w_{5x}) + \\ & + \epsilon^2(140\beta_1 w^3 w_x + 70\beta_2 w^2 w_{xx} + 280\beta_3 w w_x w_{xx} + 14\beta_4 w w_{5x} + \\ & + 70\beta_5 w_x^3 + 42\beta_6 w_x w_{4x} + 70\beta_7 w_{xx} w_{xxx} + \beta_8 w_{7x}) + O(\epsilon^3). \end{aligned} \quad (14)$$

Предположим, что ПТП имеет вид

$$w = u + \epsilon u^{(1)} + \epsilon^2 u^{(2)} + O(\epsilon^3) \quad (15)$$

и НФ —

$$u_t = S^{(2)}[u] + \epsilon\alpha_4 S^{(3)}[u] + \epsilon^2\beta_8 S^{(4)}[u] + O(\epsilon^3), \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} S^{(2)}[u] &= 6uu_x + u_{xxx}, \\ S^{(3)}[u] &= 30u^2 u_x + 10uu_{xx} + 20u_x u_{xx} + u_{5x}, \\ S^{(4)}[u] &= 140u^3 u_x + 70u^2 u_{xx} + 280u_x u_{xx} + 14uu_{5x} + \\ &+ 70u_x^3 + 42u_x u_{4x} + 70u_{xx} u_{xxx} + u_{7x}. \end{aligned} \quad (17)$$

Одноволновое решение НФ (16) является хорошо известным КдФ-солитоном:

$$u(x, t) = \frac{2k^2}{\operatorname{ch}^2[k(x - vt + x_0)]}, \quad (18)$$

а двухволновое решение дается формулой Хироты [28]

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2\partial_x^2 \ln \left\{ 1 + g_1(x, t) + g_2(x, t) + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right) g_1(x, t)g_2(x, t) \right\}, \\ g_i(x, t) &= \exp[2k_i(x - v_i t + x_{0,i})]. \end{aligned} \quad (19)$$

Пример этого решения представлен на рис. 1. Единственное различие между решениями невозмущенного уравнения КдФ $w_t = 6ww_x + w_{xxx}$ и обоими решениями НФ состоит в изменении волновой скорости:

$$v_i = -4k_i^2 - 16\epsilon\alpha_4 k_i^4 - 64\epsilon^2\beta_8 k_i^6 - O(\epsilon^3). \quad (20)$$

Рис. 1. Двухсолитонное решение НФ уравнения КдФ (уравнение (19)); $k_1 = 0.3$, $k_2 = 0.4$.

При анализе НФ не возникает препятствий в первом порядке. Однако препятствие появляется во втором порядке. Выбирая член второго порядка в ПТП в виде

$$\begin{aligned} u^{(2)} = & u_r^{(2)}(x, t) + B_1 u^3 + B_2 u u_{xx} + B_3 u_x^2 + B_4 u_{xxxx} + \\ & + B_5 u u_x q^{(1)} + B_6 u_{xxx} q^{(1)} + B_7 u_{xx} q^{(1)^2} + B_8 u_x q^{(2)}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$q^{(1)} \equiv \partial_x^{-1} u, \quad q^{(2)} \equiv \partial_x^{-1}(u^2),$$

при подходящем наборе значений $\{B_k\}$, основанном на виде функции $u^{(2)}$ в случае одно-солитонного решения, получаем каноническое препятствие

$$R^{(2)} = \gamma_3^2 u R_{21} = \gamma_3^2 u (3u^2 u_x + u u_{xxx} - u_x u_{xx}) \quad (22)$$

(γ_3^2 строится как комбинация коэффициентов в уравнении (14)). Это препятствие локализовано (см. рис. 2), а потому не может порождать секулярного решения в гомологическом уравнении

$$\partial_t u_r^{(2)} = 6 \partial_x (u u_r^{(2)}) + \partial_x^3 u_r^{(2)} + \gamma_3^2 u R_{21}. \quad (23)$$

Это уравнение можно решить в замкнутом виде методом функций Грина, развитым в контексте обратной задачи рассеяния [2], [29]–[31]. Поскольку наша цель состоит только в том, чтобы продемонстрировать решение уравнения (23), численного решения для этого вполне достаточно. Оно демонстрирует новую ограниченную солитоподобную волну (рис. 3).

Рис. 2. Каноническое препятствие uR_{21} для двухсолитонного решения уравнения КдФ (уравнение (22)); параметры те же, что и на рис. 1.

Рис. 3. Вклад канонического препятствия uR_{21} в $u_r^{(2)}$ из уравнения (23) для нулевого граничного условия при $x \rightarrow -\infty$; $k_1 = 0.5$, $k_2 = 0.75$.

3.2. Возмущенное уравнение Бюргерса. Возмущенное уравнение Бюргерса имеет вид

$$w_t = 2ww_x + w_{xx} + \epsilon(3\alpha_1 w^2 w_x + 3\alpha_2 w w_{xx} + 3\alpha_3 w_x^2 + \alpha_4 w_{xxx}) + O(\epsilon^2) \quad (24)$$

(мы не пишем здесь возмущение второго порядка, поскольку препятствие возникает уже в первом порядке). Мы снова предполагаем, что ПТП имеет вид

$$w = u + \epsilon u^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (25)$$

и НФ –

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} + \epsilon\mu(3u^2u_x + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + u_{xxx}) + O(\epsilon^2). \quad (26)$$

Ее одноволновое решение представляет собой ударный фронт

$$u(x, t) = \frac{kA \exp[k(x - vt)]}{1 + kA \exp[k(x - vt)]}, \quad (27)$$

а двухфронтное решение дается непосредственным продолжением формулы (27):

$$u(x, t) = \frac{k_1 A_1 \exp[k_1(x - v_1 t)] + k_2 A_2 \exp[k_2(x - v_2 t)]}{1 + k_1 A_1 \exp[k_1(x - v_1 t)] + k_2 A_2 \exp[k_2(x - v_2 t)]} \quad (28)$$

(пример его приведен на рис. 4, причем можно видеть, что фронты взаимодействуют, т.е. сливаются, в полубесконечной области). Измененная скорость по-прежнему одинакова для обоих решений:

$$v_i = -k_i - \epsilon\mu k_i^2 - O(\epsilon^2). \quad (29)$$

Рис. 4. Двухфронтное решение НФ Бюргерса (уравнение (28)); $k_1 = 2$, $k_2 = -2$.

Препятствие выявляется при анализе в первом порядке. Если перенести *все* линейные члены u_{xxx} из первого порядка в НФ, т.е. взять $\mu = \alpha_4$, а также выбрать $u^{(1)}$ таким образом, чтобы было решено гомологическое уравнение для случая одного фронта и при этом $u^{(1)}$ было явной функцией от x и t ,

$$u^{(1)} = u_r^{(1)}(x, t) + (\alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4)qu_x - \frac{1}{2}(2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4)u^2, \quad (30)$$

$$q \equiv \partial_x^{-1}u,$$

то препятствие получится в своей канонической форме

$$R^{(1)} = \gamma_3^1 R_{21} = \gamma_3^1 (S^{(2)}G^{(1)} - S^{(1)}G^{(2)}) = \gamma_3^1 (uS^{(2)} - u_x G^{(2)}), \quad (31)$$

$$\gamma_3^1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + \alpha_4.$$

Это препятствие показано на рис. 5, и можно видеть, что оно является конечным во всей области взаимодействия. Гомологическое уравнение теперь принимает вид

$$\partial_t u_r^{(1)} = 2\partial_x (u u_r^{(1)}) + \partial_x^2 u_r^{(1)} + \gamma_3^1 R_{21}. \quad (32)$$

Рис. 5. Каноническое препятствие $-R_{21}$ (с противоположным знаком) для двухфронтного решения уравнения Бюргера (уравнение (31)); параметры те же, что и на рис. 4.

Следует заметить, что из двух членов в R_{21} только $uS^{(2)}$ не может быть учтен с помощью дифференциальных полиномов в ПТП. Напротив, легко видеть, что подстановка $u_r^{(1)} = G^{(2)}$ в однородную часть гомологического уравнения приводит к уравнению

$$-\partial_t G^{(2)} + 2\partial_x (u G^{(2)}) + \partial_x^2 G^{(2)} = 2u_x G^{(2)}. \quad (33)$$

Как и ожидалось, численное решение гомологического уравнения демонстрирует существование секулярного члена, что указывает на наличие симметрии внутри R_{21} .

Чтобы извлечь эту симметрию, используем рекуррентное соотношение между симметриями иерархии Бюргерса:

$$S^{(n+1)} = S_x^{(n)} + uS^{(n)} + u_x G^{(n)} = S_x^{(n)} + R_{n1} + 2u_x G^{(n)}. \quad (34)$$

В частности, при $n = 2$ имеем

$$S^{(3)} = S_x^{(2)} + R_{21} + 2u_x G^{(2)} \Rightarrow R_{21} = S^{(3)} - S_x^{(2)} - 2u_x G^{(2)}, \quad (35)$$

и гомологическое уравнение (32) принимает вид

$$\partial_t u_r^{(1)} = 2\partial_x (uu_r^{(1)}) + \partial_x^2 u_r^{(1)} + \gamma_3^1 (S^{(3)} - S_x^{(2)} - 2u_x G^{(2)}). \quad (36)$$

Выберем теперь μ (коэффициент при $S^{(3)}$ в НФ) в виде

$$\mu = \alpha_4 + \gamma_3^1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 + 2\alpha_4, \quad (37)$$

что дает поправку к измененной волновой скорости (уравнение (29)). Далее, добавим подходящую поправку к $u_d^{(1)}$, с тем чтобы учесть член $-2\gamma_3^1 u_x G^{(2)}$ в уравнении (36), согласно уравнению (33).

Рис. 6. Ограниченный вклад препятствия $S_x^{(2)}$ в $u_r^{(1)}$ в уравнении (38); параметры те же, что и на рис. 4.

Теперь уравнение для $u_r^{(1)}$ принимает вид

$$\partial_t u_r^{(1)} = 2\partial_x (uu_r^{(1)}) + \partial_x^2 u_r^{(1)} - \gamma_3^1 S_x^{(2)}. \quad (38)$$

Член $S_x^{(2)}$ не стремится асимптотически ни к какой симметрии. Численное решение уравнения (38) показывает, что появляется новая ограниченная волна (см. рис. 6).

Благодарности. Мы благодарим Г. Берде, Л. Калякина и Ю. Кодаму за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] *D. J. Kaup*. SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 31. P. 121.
- [2] *D. J. Kaup, A. S. Newell*. Proc. Roy. Soc. London. A. 1978. V. 361. P. 413.
- [3] *В. И. Карпман, Е. М. Маслов*. ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 537.
- [4] *A. C. Newell*. The Inverse Scattering Transform. In: Solitons. Eds. R.K. Bullough, P.J. Caudrey. Berlin: Springer, 1980. P. 177.
- [5] *Л. А. Калякин*. УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 5.
- [6] *Л. А. Калякин*. ТМФ. 1992. Т. 92. № 1. С. 62.
- [7] *L. A. Kalyakin*. Physica D. 1995. V. 87. P. 193.
- [8] *Л. А. Калякин, В. А. Лазарев*. ТМФ. 1997. Т. 112. № 1. С. 92.
- [9] *Y. Kodama*. Phys. Lett. A. 1985. V. 112. P. 193.
- [10] *Y. Kodama*. Physica D. 1985. V. 16. P. 14.
- [11] *Y. Kodama*. Normal Form and Solitons. In: Topics in Soliton Theory and Exactly Solvable Nonlinear Equation. Proc. of the Conf. on Nonlinear Evolutional Equations, Solitons and the Inverse Scattering Transform (Oberwolfach, Germany, July 27 – August 2, 1986). Eds. M.J. Ablowitz, B. Fuchssteiner, M. Kruskal. Singapore: World Scientific, 1987. P. 319.
- [12] *Y. Kodama, A. V. Mikhailov*. Obstacles to asymptotic integrability. In: Algebraic Aspects of Integrable Systems. Eds. A.S. Fokas, I.M. Gelfand. Boston: Birkhauser, 1997. P. 173.
- [13] *Y. Hiraoka, Y. Kodama*. Normal Form and Solitons. Lecture Notes, Euro Summer School 2001 (Cambridge, The Isaac Newton Institute, August 13–24, 2001) (unpublished).
- [14] *Y. Kodama, T. Taniuti*. J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 47. P. 1706.
- [15] *T. Fokas, L. Luo*. Contemp. Math. 1996. V. 200. P. 85.
- [16] *R. A. Kraenkel, J. G. Pereira, E. C. de Rey Neto*. Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 2526.
- [17] *R. A. Kraenkel, M. A. Manna, V. Merle, J. C. Montero, J. G. Pereira*. Phys. Rev. E. 1996. V. 54. P. 2976.
- [18] *R. A. Kraenkel*. Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 4775.
- [19] *R. A. Kraenkel, M. Senthilvelan, A. I. Zenchuk*. J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 3160.
- [20] *A. Degasperis, S. V. Manakov, P. M. Santini*. Physica D. 1997. V. 100. P. 187.
- [21] *Y. Kodama, T. Taniuti*. J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. P. 298.
- [22] *Y. Kodama*. J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. P. 311.
- [23] *B. Fuchssteiner, A. S. Fokas*. Physica D. 1981. V. 4. P. 47.
- [24] *M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson*. Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
- [25] *H. Tasso*. J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 7779.
- [26] *A. S. Fokas, R. H. J. Grimshaw, D. E. Pelinovsky*. J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 3415.
- [27] *Y. Kodama*. Phys. Lett. A. 1987. V. 123. P. 276.
- [28] *R. Hirota*. Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. P. 1192.
- [29] *J. P. Keener, D. W. McLaughlin*. Phys. Rev. A. 1977. V. 16. P. 777.
- [30] *R. L. Sachs*. SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14. P. 674.
- [31] *R. L. Sachs*. SIAM J. Math. Anal. 1984. V. 15. P. 468.