Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Виллароел, Случайные процессы с гибелью и ядра уравнения теплопроводности, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 2, 423–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1867>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 15:08:22

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ С ГИБЕЛЬЮ И ЯДРА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Пусть $V(x) \geq 0$ – заданная функция, стремящаяся к константе на бесконечности. Известно, что плотность вероятности процесса броуновского движения B_t со скоростью гибели $V(x)$ есть функция Грина для оператора теплопроводности с потенциалом $V(x)$. При надлежащем обобщении ее преобразование Лапласа дает плотность распределения для процесса $\int_0^t V(B_s) ds$. Такая функция Грина построена с помощью спектрального анализа для классического одномерного стационарного оператора Шредингера.

Ключевые слова: броуновское движение, функция Грина для уравнения теплопроводности

1. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ И ГИБЕЛЬ

В этом вводном разделе мы напомним некоторые известные аспекты классической теории броуновского движения (БД) B_t (за более подробной информацией можно обратиться к работам [1]). Нас будут интересовать те аспекты теории, в которых решающую роль играет функция Грина $G(t, x | t', x') \equiv G(t - t', x | x')$ для оператора теплопроводности с отрицательным не зависящим от времени потенциалом, а именно,

$$LG \equiv (-\partial_t + \partial_{xx} - V(x))G(t, x | t', x') = -\delta(t - t')\delta(x - x'). \quad (1)$$

Построение этого пропагатора и его взаимосвязь со спектральным анализом для классического одномерного стационарного оператора Шредингера обсуждается в разделе 2. Мы покажем, как осуществить такое построение в предположении, что потенциал $V(x)$ стремится к константе при $|x| \rightarrow \infty$. Конкретный вид функции Грина $G(t, x | t', x')$ в случае, когда $V(x)$ отвечает простейшему безотражательному потенциалу оператора Шредингера, приведен в разделе 3.

Напомним, что БД – это стохастический процесс B_t , представляющий модель случайного блуждания, т.е. описывающий беспорядочное движение частицы, которая в

*Universidad de Salamanca, Facultad de Ciencias, Pza Merced sn, 37008 Salamanca, Spain.
E-mail: javier@usal.es

каждый момент времени может с равной вероятностью двигаться вправо или влево. Здесь $B_t \equiv B_t(\omega)$ означает положение броуновской частицы в момент времени t . Если движение начинается из точки x' , $B_0 = x'$, и предполагается изотропным и однородным в пространстве и во времени, то процесс B_t имеет плотность вероятности, которая задается классическим ядром уравнения теплопроводности

$$P(B_t \in [x, x + dx]) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x - x')^2}{4t}\right] dx.$$

Уравнение (1) возникает следующим образом. Предположим, что дополнительно введен некоторый случайный механизм гибели броуновской частицы, так что процесс B_t “исчезает” в случайный момент времени τ , или, более точно, достигает некоторого (нового) состояния “смерти” ∂ . Получающийся в результате процесс $\hat{B}_t \in \mathbb{R} \cup \{\partial\}$ назовем процессом БД с гибелью (БДГ): $\hat{B}_t = \partial\theta(t - \tau) + B_t\theta(\tau - t)$. Пусть $\varphi(t) \equiv P(\hat{B}_t \neq \partial)$ — вероятность того, что процесс $\hat{B}_t$ продолжает существовать вплоть до момента времени t . Будем предполагать, что при условии $\hat{B}_t = x \in \mathbb{R}$ ($\hat{B}_t$ принимает значение x и, следовательно, частица еще не погибла) вероятность гибели для любого момента времени $t + h > t$ есть $o(h)$ по порядку величины, точнее,

$$P(\hat{B}_{t+h} \neq \partial \mid \hat{B}_t = x) = 1 - V(x)h + o(h). \quad (2)$$

Разумеется, $P(\hat{B}_{t+h} \neq \partial \mid B_t = \partial) = 0$. Таким образом, $V(x) \geq 0$ есть скорость гибели броуновской частицы. Приведенные правила определяют механизм гибели и в силу формулы полной вероятности означают, что

$$P(\hat{B}_t \neq \partial) = \exp\left\{-\int_0^t V(B_s) ds\right\}. \quad (3)$$

Действительно,

$$P(\hat{B}_{t+h} \neq \partial) = P(\hat{B}_{t+h} \neq \partial \mid \hat{B}_t \neq \partial)P(\hat{B}_t \neq \partial) + P(\hat{B}_{t+h} \neq \partial \mid \hat{B}_t = \partial)P(\hat{B}_t = \partial).$$

Следовательно,

$$\varphi(t + h) = \varphi(t)(1 - V(B_t)h) + o(h),$$

устремляя $h \rightarrow 0$, мы получаем дифференциальное уравнение с начальным условием

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\varphi(t)V(B_t), \quad \varphi(0) = 1$$

и приходим к интегралу по траекториям (3).

Пусть $B_0 = x'$, тогда БДГ $\hat{B}_t$ характеризуется плотностью распределения

$$P(\hat{B}_t \in [x, x + dx]) = P(B_t \in [x, x + dx], \tau > t) \equiv f(t, x \mid x') dx \quad (4)$$

и функцией распределения времени гибели

$$P(\tau \leq t) = 1 - P(\widehat{B}_t \neq \partial) = 1 - \int_{\mathbb{R}} f(t, x | x') dx. \quad (5)$$

Плотность может быть получена с помощью классической квантово-механической формулы Фейнмана–Каца для вероятностей, которая устанавливает, что ядро $f(t, x | x')$ интеграла по траекториям (3) является решением уравнения (1): $Lf(t, x | x') = \delta(t) \times \delta(x - x')$. В частности, при $V(x) = b^2$ имеем

$$f(x, t | x') = \frac{e^{-b^2 t - (x - x')^2 / (4t)}}{\sqrt{4\pi t}} \theta(t), \quad P(\tau \leq t) = 1 - e^{-b^2 t},$$

$$P(B_t \text{ "исчезает" за конечное время}) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tau \leq t) = 1,$$

и броуновская частица погибает за конечное время почти на верное.

Эти идеи находят интересное применение в задаче определения плотности распределения $\pi(t, z | x') dz \equiv P(Z_t \in dz)$ интегрального процесса $Z_t \equiv \int_0^t V(B_s) ds$ при известных начальных значениях $B_0 = x'$, $Z_0 = 0$. При заданной функции $V(x)$ рассмотрим параметрическое семейство функций скорости гибели $\tilde{V}(x; p) \equiv pV(x)$ с положительным параметром $p \geq 0$. Пусть $\widehat{B}_t^{(p)}$ – соответствующий процесс БДГ, а $f(t, x; p | x')$ – его плотность: $P(\widehat{B}_t^{(p)} \in [x, x + dx]) \equiv f(t, x; p | x') dx$. Формула полной вероятности дает

$$P(\widehat{B}_t^{(p)} \neq \partial) = \exp \left\{ -p \int_0^t V(B_s) ds \right\} = \int_0^\infty e^{-pz} \pi(t, z | x') dz. \quad (6)$$

Из формул (5) и (6) следует, что

$$\zeta(t; p | x') = \int f(t, x; p | x') dx = \int_0^\infty e^{-pz} \pi(t, z | x') dz.$$

Обращая преобразование Лапласа, имеем

$$\pi(t, z | x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta(t; p | x') e^{pz} dp, \quad (7)$$

где Γ – классический контур Бромвича, проходящий вдоль такой прямой, параллельной мнимой оси, что все сингулярности функции $\zeta(t; p | x')$ в комплексной плоскости p остаются слева от нее.

Полная информация о коррелированной паре процессов (B_t, Z_t) должна, однако, включать плотность их совместного распределения $\Pi(t, x, z | x')$, которая определяется формулой $\Pi(t, x, z | x') dx dz \equiv P(B_t \in [x, x + dx], Z_t \in [z, z + dz])$. Как и выше, можно доказать, что

$$\Pi(t, x, z | x') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(t, x; p | x') e^{pz} dp. \quad (8)$$

Прибегнув снова к формуле Фейнмана–Каца, мы получаем, что функция $f(t, x; p | x')$ является решением уравнения (1) с потенциалом $\tilde{V}(x; p) \equiv pV(x)$:

$$(-\partial_t + \partial_{xx} - pV(x))f(t, x; p | x') = -\delta(t - t')\delta(x - x').$$

Таким образом, задача определения статистического распределения для процесса $\int_0^t V(B_s) ds$ сводится к нахождению плотности процесса БДГ с потенциалом $pV(x)$. Как мы увидим далее, это в общем случае сложная задача, тесно переплетенная с классическим спектральным анализом для одномерного стационарного оператора Шредингера.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ГИБЕЛЬЮ И ФУНКЦИЙ ГРИНА УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Ниже мы покажем, как определить плотность БДГ для некоторого класса потенциалов. Предположим, что функция $V(x)$ удовлетворяет условию $V(x) \geq 0$ и что $V(x) \equiv b^2 - u(x)$, где b – некоторая константа, $u(x)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad \int (1 + |x|)|u(x)| dx < \infty. \quad (9)$$

Покажем, что функция Грина строится на основе собственных функций одномерного оператора Шредингера $A(x, \partial_x) \equiv \partial_{xx} + k^2 + u(x)$. Здесь $k \equiv k_R + ik_I \in \mathbb{C}$ – комплексный параметр (ниже будет использовано отождествление $b = k_I$). Мы будем следовать работам [2], в которых эти идеи развивались в контексте классического уравнения Кадомцева–Петвиашвили

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3u_{yy} = 0$$

(отметим, что некоторые предварительные результаты, относящиеся к рассматриваемой проблеме, фигурировали также в работах [3].) Прежде всего, напомним несколько основных фактов из спектральной теории выписанного выше оператора (за соответствующей справкой читатель может обратиться к работам [4], [5]).

Пусть $\phi_{\pm}(x, k)$, $\psi_{\pm}(x, k)$ – собственные функции стационарного оператора Шредингера,

$$A(x, \partial_x)\phi_{\pm}(x, k) = A(x, \partial_x)\psi_{\pm}(x, k) = 0, \quad (10)$$

удовлетворяющие условиям

$$\phi_{\pm}(x, k) = e^{\mp ikx}, \quad x \rightarrow -\infty; \quad \psi_{\pm}(x, k) = e^{\mp ikx}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Если $u(x)$ удовлетворяет условиям (9), эти функции существуют, являются аналитическими функциями переменной $k \equiv k_R + ik_I$ в $\mathbb{C}_{\pm}$ (в верхней/нижней полуплоскостях комплексной плоскости k), имеют пределы на границе $\{k_I = 0\}$ и связаны соотношением

$$\phi_+(x, k) = a(k)\psi_-(x, k) + b(k)\psi_+(x, k), \quad k \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

с некоторыми функциями $a(k), b(k)$ (см. [5]). Функция $a(k)$ является аналитической функцией от k в $\mathbb{C}_+$, которая имеет конечное множество простых нулей $\{k_j \equiv i\kappa_j, \kappa_j \in \mathbb{R}^+\}_{j=1, \dots, N}$. Оказывается, что в этих точках функции $\phi_+(x, k)$ и $\psi_+(x, k)$ пропорциональны: $\phi_+(x, k_j) = \beta_j \psi_+(x, k_j)$, где β_j – некоторая комплексная константа. С учетом (11) отсюда следует, что функции $\phi_+(x, k_j), \psi_+(x, k_j)$ убывают экспоненциально. Коэффициент отражения $\rho(k) \equiv b/a(k)$, “нормировочные” константы β_j и нули $\{k_j \equiv i\kappa_j, \kappa_j \in \mathbb{R}^+ : a(k_j) = 0\}_{j=1, \dots, N}$ являются непрерывными и дискретными данными рассеяния для одномерного оператора Шредингера, а функции $\psi_j(x) \equiv \psi_+(x, k_j)$ – собственными функциями дискретного спектра.

Пусть непрерывная и дискретная части функции Грина имеют вид

$$G_c(t, x | x') = \frac{\theta(t)}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-t(l^2 + 2ik_I l)} g(x, x', l + ik_I) dl, \quad (13)$$

$$G_d(t, x | x') = i \sum_{\kappa_j \geq k_I} e^{(-k_I^2 + \kappa_j^2)t} g_j(x, x') \theta(-t), \quad (14)$$

где функция $g(x, x', k)$ на $\mathbb{C}_+$ определена следующим образом:

$$g(x, x', k) \equiv \frac{\phi_+(x, k)\psi_+(x', k)}{a_+(k)}, \quad k_I > 0. \quad (15)$$

Окончательно функция Грина берется в виде

$$G(t, x | x') = G_c(t, x | x') + G_d(t, x | x'). \quad (16)$$

Основные свойства введенных объектов дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Функция $g(x, x', k)$ существует и является мероморфной функцией в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ с полюсами в нулях k_j функции $a(k)$ и вычетами*

$$\text{Res } g(x, x', k)_{k=k_j} = g_j(x, x') \equiv C_j \psi_j(x) \psi_j(x'), \quad C_j \equiv \frac{\beta_j}{a'(k_j)}.$$

При $|k| \rightarrow \infty$ функция $g(x, x', k)$ имеет асимптотическое разложение

$$g(x, x', k) = e^{-ik(x-x')} \tilde{g}(x, x', k), \quad \tilde{g}(x, x', k) \equiv 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n(x, x')}{k^n}, \quad (17)$$

коэффициенты которого равномерно ограничены.

Теперь мы готовы сформулировать основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $G(t, x | x')$ является функцией Грина для оператора теплопроводности L с потенциалом $V(x) = k_I^2 - u(x)$:*

$$LG \equiv (-\partial_t + \partial_{xx} - k_I^2 + u(x))G = -\delta(t)\delta(x - x'). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} LG_c = & \frac{\theta(t)}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-t(l^2 + 2ik_I l)} [\partial_{xx} + (l + ik_I)^2 + u(x)] g(x, x', l + ik_I) dl - \\ & - \frac{\delta(t)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-t(l^2 + 2ik_I l)} g(x, x', l + ik_I) dl. \end{aligned}$$

В силу условия (10) первый член тождественно обращается в нуль, таким образом,

$$LG_c = -\frac{\delta(t)}{2\pi} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L g(x, x', l + ik_I) dl = -\delta(t) \left(\delta(x - x') + i \sum_{\kappa_j \geq |k_I|} g_j(x, x') \right).$$

Последнее из равенств представляет собой глубокий результат, связанный с полнотой собственных функций оператора Шредингера, который мы не будем здесь доказывать. Кроме того, мы заведомо имеем

$$LG_d = i\delta(t) \sum_{\kappa_j \geq |k_I|} g_j(x, x').$$

Аналитические свойства функции $g(x, x', l)$ могут быть использованы для вывода еще одного интересного и более полезного представления функции Грина. Имеет место

РЕЗУЛЬТАТ 1. *Функция Грина для оператора L вида (18) может быть также записана следующим образом:*

$$\begin{aligned} G(t, x | x') = & i \sum_{\kappa_j \geq k_I} e^{(\kappa_j^2 - k_I^2)t} g_j(x, x') \theta(-t) + \\ & + \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t(l^2 + k_I^2)} g(x, x', l) dl - i \sum_{k_I > \kappa_j} e^{(\kappa_j^2 - k_I^2)t} g_j(x, x') \right] \theta(t). \quad (19) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл Коши (13). Соответствующий интеграл в функции Грина можно преобразовать таким образом, чтобы интегрирование велось вдоль вещественной оси. Для этого рассмотрим прямоугольный контур интегрирования Γ_L с вершинами в точках $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{C}_+$, где

$$v_1 = -L, \quad v_2 = L, \quad v_3 = L + ik_I, \quad v_4 = -L + ik_I,$$

и с направлением обхода по часовой стрелке. Вклад интегралов вдоль вертикальных сторон пропорционален выражению

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{k_I} e^{-t((L+is)^2 + k_I^2)} e^{-i(L+is)(x-x')} ds,$$

которое стремится к нулю при $L \rightarrow \infty$. Напомним, что функция $g(k)$ является мероморфной в $\mathbb{C}_+$, следовательно, теорема Коши дает

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-t(l^2 + k_I^2)} g(x, x', l) dl - \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L e^{-t(l^2 + 2ik_I l)} g(x, x', l + ik_I) dl = \\ = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_L} e^{-t(z^2 + k_I^2)} g(x, x', z) dz = 2\pi i \sum_{k_I > \kappa_j} e^{(\kappa_j^2 - k_I^2)t} g_j(x, x'). \end{aligned}$$

Это доказывает утверждение.

Отметим следующее интересное свойство функции Грина.

Функция Грина экспоненциально стремится к нулю, когда любая из переменных $|t|$ или $|x|$ стремится к бесконечности. В частности, если $|t| \rightarrow \infty$ так, что величина $(x - x')/(2t) \equiv l_0$ остается постоянной, то $G_c(t, x | x')$ обладает асимптотическим разложением с главным членом вида

$$G_c(t, x | x') \approx e^{-(k_I^2 + l_0^2)t} \frac{g(x, x', -il_0)}{\sqrt{4\pi t}} \theta(t) + i \left(\sum_{\kappa_j \leq |l_0|} - \sum_{\kappa_j < k_I} \right) g_j(x, x') e^{(\kappa_j^2 - k_I^2)t} \theta(t). \quad (20)$$

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ БЕЗОТРАЖАТЕЛЬНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Рассмотрим теперь случай безотражательных потенциалов, которые характеризуются условием $\rho(k) = 0$. Простейшим из таких потенциалов является потенциал с одним связанным состоянием (потенциал Баргмана, или солитонный потенциал), задаваемый выражением

$$u(x) = \frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 \kappa(x - x_0)},$$

где κ , и x_0 — постоянные.

Известно, что спектральные данные для этого потенциала состоят из единственного нуля (одного собственного значения) $k_1 = i\kappa$ и нормировочной константы $C_1 \equiv 2i\kappa e^{2\kappa x_0}$. Собственная функция дискретного спектра есть

$$\psi_1(x) = \psi_+(x, k_1) = \frac{e^{-\kappa x_0}}{\operatorname{ch} \kappa(x - x_0)}.$$

Волновые функции суть

$$\psi_+(x, -k) = \psi_-(x, k) = \frac{\phi_+(x, k)}{a(k)} = e^{-ikx} \left(1 + \frac{C_1 e^{-\kappa x}}{k - i\kappa} \psi_1(x) \right).$$

Следовательно,

$$g(x, x', k) = e^{ik(x'-x)} \left(1 + g_1(x, x') \left(\frac{e^{\kappa(x'-x)}}{k - i\kappa} - \frac{e^{-\kappa(x'-x)}}{k + i\kappa} \right) \right), \quad (21)$$

и вычисление функции Грина сводится к вычислению интеграла в (19). Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-tl^2 + il(x'-x)}}{l - i\kappa} dl = 2\pi i e^{\kappa^2 t - \kappa(x'-x)} \Phi \left(\frac{x' - x}{\kappa \sqrt{2t}} - \kappa \sqrt{2t} \right), \quad (22)$$

где мы положили

$$\Phi(x) \equiv \int_{-\infty}^x e^{-z^2/2} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} G(t, x | x') &= \frac{e^{-k_I^2 t - \frac{(x-x')^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \theta(t) + \frac{2\kappa e^{(\kappa^2 - k_I^2)t}}{\operatorname{ch} \kappa(x - x_0) \operatorname{ch} \kappa(x' - x_0)} \times \\ &\times \left[\left(\Phi \left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} + \kappa \sqrt{2t} \right) - \Phi \left(\frac{x' - x}{\sqrt{t}} - \kappa \sqrt{2t} \right) \right) \theta(t) + 1_{\{k_I \leq \kappa\}} \right], \quad (23) \end{aligned}$$

где введено следующее обозначение

$$1_{\{k_I \leq \kappa\}} = \begin{cases} 1, & k_I \leq \kappa, \\ 0, & k_I > \kappa. \end{cases}$$

Оказывается, что данная конструкция обобщается на случай безотражательных потенциалов. Предположим, что $u(x) - N$ -солитонный потенциал, т.е. $\rho(k) = 0$, и $a(k)$ имеет N нулей с нормировочными константами C_j , $j = 1, \dots, N$. Тогда

$$\begin{aligned} G(t, x | x') &= \frac{e^{-k_I^2 t - (x-x')^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} \theta(t) + i \sum_j g_j(x, x') e^{(\kappa_j^2 - k_I^2)t} \times \\ &\times \left[\left(\Phi \left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} - \kappa_j \sqrt{2t} \right) - \Phi \left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} + \kappa_j \sqrt{2t} \right) \right) \theta(t) + 1_{\{k_I \leq \kappa_j\}} \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Заметим, что если $x^2 + x'^2 + t^2 \rightarrow \infty$ так, что $(x' - x)/t \rightarrow l_0$, то

$$\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} - \kappa\sqrt{2t} \rightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad \pm(l_0 - \kappa) > 0,$$

и, следовательно,

$$\Phi\left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} - \kappa\sqrt{2t}\right) - \Phi\left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} + \kappa\sqrt{2t}\right) \xrightarrow{x^2 + x'^2 + t^2 \rightarrow \infty} -1_{\{-\kappa < l_0 < \kappa\}},$$

где

$$-1_{\{-\kappa < l_0 < \kappa\}} \equiv -\theta(\kappa - l_0)\theta(l_0 + \kappa) = 1_{\{\kappa \leq |l_0|\}} - 1 = 1_{\{\kappa \leq |l_0|\}} - 1_{\{\kappa < k_I\}} - 1_{\{\kappa \geq k_I\}}$$

в точном соответствии с формулой (20).

Плотность $f(t, x | x')$ процесса БДГ со скоростью гибели $V(x) = b^2 - u(x) \geq 0$ может быть получена в рамках представленных выше идей. Напомним, что функция $f(t, x | x')$ может интерпретироваться как плотность распределения координаты броуновской частицы B_t со временем гибели, превышающим t . Далее, эта функция является решением уравнения (18) при отождествлении $b = k_I$. Мы определим ее для случая односолитонного потенциала

$$V(x) = b^2 - u(x), \quad u(x) = \frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa x}, \quad (25)$$

где b, κ — постоянные и $b^2 \geq 2\kappa^2$ (трансляционная инвариантность дает возможность добавить дополнительную константу). Имеем

РЕЗУЛЬТАТ 2. Рассмотрим БД, начинающееся из точки x' , со скоростью гибели, заданной формулой (25). Тогда вероятность того, что в момент времени $t > 0$ броуновская частица еще не погибла и находится в интервале $[x, x + dx]$ есть $P(B_t \in [x, x + dx], \tau > t) = f(t, x | x') dx$, где

$$f(t, x | x') = \frac{e^{-b^2 t - (x - x')^2 / (4t)}}{\sqrt{4\pi t}} + \frac{2\kappa e^{(\kappa^2 - b^2)t}}{\operatorname{ch} \kappa x \operatorname{ch} \kappa x'} \left(\Phi\left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} - \kappa\sqrt{2t}\right) - \Phi\left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} + \kappa\sqrt{2t}\right) \right). \quad (26)$$

Распределение вероятностей для времени гибели дается формулой

$$P(\tau \leq t) = 1 - e^{-b^2 t} + \frac{2\kappa e^{(\kappa^2 - b^2)t}}{\operatorname{ch} \kappa x'} \times \\ \times \int \left(\Phi\left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} + \kappa\sqrt{2t}\right) - \Phi\left(\frac{x' - x}{\sqrt{2t}} - \kappa\sqrt{2t}\right) \right) \frac{dx}{\operatorname{ch} \kappa x}.$$

Вероятность того, что броуновская частица B_t в конечном счете погибнет, равна

$$P(\tau < \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(\tau \leq t) = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат следует из формулы (24). Заметим, что требование $V(x) \geq 0$ приводит к ограничению на параметры $b^2 \geq 2\kappa^2$, и, следовательно, ряд членов в (24) выпадают, что в результате дает причинную функцию Грина $f(t, x | x')$.

Благодарности. Данная работа была частично поддержана BFM2002-02609 и Junta de Castilla-Leon SA078/03.

Список литературы

- [1] *В. Хорстемке, Р. Лефевр.* Индуцированные шумом переходы: теория и применение в физике, химии и биологии. М.: Мир, 1987; *R. N. Bhattacharya, E. C. Waymire.* Stochastic Processes with Applications. Wiley series in probability. N.Y.: J. Wiley, 1990; *G. Roepstorff.* Path Integral Approach to Quantum Physics. Berlin: Springer, 1996; *V. Konotop, L. Vazquez.* Nonlinear Random Waves. Singapore: World Scientific, 1994; *E. B. Dynkin.* Markov Processes, V.1, 2. N.Y.: Academic Press, 1965; *J. Villarroel.* Stochastic Anal. Appl. 2003. V. 21(6). P. 1391.
- [2] *J. Villarroel, M. J. Ablowitz.* Studies Applied Mathematics. 2002. V. 109. P. 151; *J. Villarroel, M. J. Ablowitz.* Nonlinearity. 2004. V. 17. P. 1843.
- [3] *M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov.* Inverse problems. 1997. V. 13. № 3. P. L7; *M. Boiti, F. Pempinelli, A. Pogrebkov, B. Prinari.* Inverse problems. 2001. V. 17. № 4. P. 937; *Phys. Lett. A.* 2001. V. 285. P. 307; *J. Math. Phys.* 2002. V. 43(2). P. 1044; *B. Prinari.* Inverse Scattering Transform for the Kadomtsev–Petviashvili equations. In: Ph.D thesis. Univ. of Lecce, 1999. unpublished; *A. Fokas, A. Pogrebkov.* Nonlinearity. 2003. V. 18. P. 771; *M. J. Ablowitz, J. Villarroel.* Initial value problems and solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation. In: New Trends in Integrability and Partial Solvability. Proc. of NATO Adv. Res. Workshop (Cadiz, Spain, 12–16 June, 2002). NATO Sci. Ser. II: Math. Phys. Chem. V. 132. Eds. A.B. Shabat, A. González-López et al. Dordrecht: Kluwer, 2004. P. 1.
- [4] *В. А. Марченко.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977; *M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson.* Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, 1991; *P. Deift, E. Trubowitz.* Comm. Pure and Appl. Math. 1979. V. 32. P. 121; *Л. Д. Фаддеев.* УМН. 1959. Т. 14. № 4. С. 57.
- [5] *L. Faddeev.* Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1967. V. 65. P. 139.