Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жаринов, Когомологии Хохшильда алгебры гладких функций на торе,
ТМФ, 2005, том 144, номер 3, 435–452

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1869>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 11:26:03

© 2005 г.

В.В. Жаринов*

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБРЫ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ТОРЕ

Вычислены когомологии Хохшильда алгебры гладких функций на конечномерном вещественном торе с коэффициентами в присоединенном представлении, для чего развитая ранее техника модифицирована на дискретный случай.

Ключевые слова: когомологии Хохшильда, присоединенное представление, комплекс де Рама на целочисленной решетке.

В предыдущей работе [1] аналитическими методами вычислены когомологии Хохшильда алгебры гладких функций на конечномерном вещественном пространстве с коэффициентами в присоединенном представлении. В предлагаемой работе вычислены когомологии Хохшильда алгебры гладких функций на конечномерном вещественном торе с коэффициентами в присоединенном представлении (теорема 5.2), для чего развитая в [2], [3] и [1] техника модифицирована на дискретный случай. Чтобы продемонстрировать преимущество метода вычислений, используется схема, предложенная в [1], а ради замкнутости изложения ряд определений и утверждений оттуда повторены. В дополнении излагаются элементы когомологий де Рама на целочисленной решетке.

1. КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА

Пусть заданы $\mathbb{F}$ – поле характеристики нуль, $\mathfrak{A}$ – ассоциативная алгебра над $\mathbb{F}$, $\mathfrak{B}$ – бимодуль над $\mathfrak{A}$.

Пусть $\otimes \mathfrak{A} = \bigoplus_{q \geq 0} \otimes^q \mathfrak{A}$ – тензорная алгебра линейного пространства $\mathfrak{A}$, $\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) = \bigoplus_{q \geq 0} \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ – линейное пространство всех коцепей на $\mathfrak{A}$ со значениями в $\mathfrak{B}$, где $\mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) = \text{Hom}_{\mathbb{F}}(\otimes^q \mathfrak{A}; \mathfrak{B})$. Кограничный оператор δ на $\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$ задается правилом

$$\begin{aligned} \delta \omega(a_1, \dots, a_{q+1}) &= a_1 \omega(a_2, \dots, a_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r \omega(a_1, \dots, a_r a_{r+1}, \dots, a_{q+1}) + (-1)^{q+1} \omega(a_1, \dots, a_q) a_{q+1}, \end{aligned}$$

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: zharinov@mi.ras.ru

где $q = 0, 1, \dots$, $\omega \in \mathcal{C}^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$, $a_1, \dots, a_{q+1} \in \mathfrak{A}$, $\delta\omega \in \mathcal{C}^{q+1}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B})$. Легко проверяется, что $\delta \circ \delta = 0$ (здесь и всюду ниже значок $\circ$ означает композицию отображений), так что определен комплекс $\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}); \delta\}$ с когомологиями

$$H\{\mathcal{C}(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}); \delta\} = H(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}) = \bigoplus_{q \geq 0} H^q(\mathfrak{A}; \mathfrak{B}).$$

Над всякой ассоциативной алгеброй $\mathfrak{A}$ определены два естественных бимодуля:

тривиальный, здесь $\mathfrak{B} = \mathbb{F}$, действия $ax = xa = 0$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, $x \in \mathbb{F}$;

присоединенный, здесь $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, действия ab, ba суть произведения в алгебре $\mathfrak{A}$ для всех $a \in \mathfrak{A}$, $b \in \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ унитарная (т.е. содержит единичный элемент), то когомологии*

$$H^q(\mathfrak{A}; \mathbb{F}) = \begin{cases} \mathbb{F}, & q = 0, \\ 0, & q = 1, 2, \dots \end{cases}$$

2. АЛГЕБРА ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ТОРЕ

Начиная с этого момента $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – кольцо целых чисел, $\mathbb{T} = \mathbb{R}^D / 2\pi\mathbb{Z}^D$ – вещественный D -мерный тор, $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^D$ – его решетка периодов, $\mathfrak{A} = \mathcal{E}(\mathbb{T}) = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}; \mathbb{C})$ – алгебра всех гладких комплексных функций на $\mathbb{T}$ с естественной топологией равномерной сходимости вместе с производными всех порядков.

В случае тривиальных коэффициентов пространства $\mathcal{C}^q(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathbb{C}) = \mathcal{E}(\mathbb{T}^q)'$ – линейные пространства, дуальные к пространствам $\mathcal{E}(\mathbb{T}^q)$, наделенные сильной топологией, так что q -коцепи суть обобщенные функции на $\mathbb{T}^q = \times^q \mathbb{T}$. Когомологии комплекса $\{\mathcal{C}(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathbb{C}); \delta\}$ описываются предложением 1.1, поскольку алгебра $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ содержит единичный элемент – функцию $e(x) \equiv 1$.

Остальная часть данной статьи посвящена когомологиям алгебры $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ с коэффициентами в присоединенном бимодуле $\mathfrak{B} = \mathcal{E}(\mathbb{T})$. Здесь пространства $\mathcal{C}^q(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T}))$ – линейные пространства всех непрерывных q -линейных отображений из $\mathcal{E}(\mathbb{T})^q$ в $\mathcal{E}(\mathbb{T})$, наделенные сильной топологией. Справедливо представление $\mathcal{C}^q(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) = \mathcal{E}(\mathbb{T}) \widehat{\otimes} \mathcal{E}(\mathbb{T}^q)'$, где значок $\widehat{\otimes}$ означает замыкание тензорного произведения в подходящей топологии, которая для нас сейчас не важна [4]. В частности, q -коцепи суть $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ -значные обобщенные функции на $\mathbb{T}^q$.

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Алгебра $\mathcal{E}(\mathbb{T})$ всех гладких функций на торе $\mathbb{T}$ отождествляется с алгеброй всех гладких функций на вещественном пространстве $\mathbb{R}^D$, 2π -периодических по каждому аргументу. Для $m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}$ и $x = (x_1, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ положим

$$(m, x) = \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \mu^\alpha x_\alpha,$$

каждому $m \in \mathbb{L}$ поставим в соответствие функцию

$$e^{im} \in \mathcal{E}(\mathbb{T}), \quad \text{где } e^{im}(x) = e^{i(m,x)} \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^D.$$

Пусть Φ^q , $q = 0, 1, \dots$, суть линейные пространства всех медленно растущих функций на $\mathbb{L}^q$, т.е. всех функций $f = f(m_1, \dots, m_q)$, $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{L}$, растущих не быстрее некоторой степени $|\mathbf{m}|$ при $|\mathbf{m}| = |m_1| + \dots + |m_q| \rightarrow \infty$, где $|m_k| = |\mu_k^1| + \dots + |\mu_k^D|$ для всех $m_k = (\mu_k^1, \dots, \mu_k^D) \in \mathbb{L}$, $1 \leq k \leq q$. В частности, $\Phi^0 = \mathbb{C}$.

Преобразование Фурье $\omega \mapsto F\omega$, действующее по формуле

$$F\omega(m_1, \dots, m_q) = \omega(e^{im_1}, \dots, e^{im_q}), \quad \omega \in \mathcal{E}(T^q)', \quad m_1, \dots, m_q \in \mathbb{L},$$

есть изоморфизм $F: \mathcal{E}(T^q)' \simeq \Phi^q$ линейных пространств, этот изоморфизм становится топологическим при надлении линейных пространств $\mathcal{E}(T^q)'$ и Φ^q естественными топологиями [5]. Отождествив $F \equiv \text{id}_{\mathcal{E}(\mathbb{T})} \otimes F$, распространим преобразование Фурье на $\mathcal{E}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} \mathcal{E}(T^q)'$ и придем к изоморфизму

$$F: C^q(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) \simeq \mathfrak{F}^q = \mathcal{E}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} \Phi^q.$$

“Подкрученное” преобразование $\tilde{F}: C^q(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) \simeq \mathfrak{F}^q$ задается правилом

$$\tilde{F}\omega(x; \xi_1, \dots, \xi_q) = \exp \left\{ -i \sum_{1 \leq k \leq q} (m_k, x) \right\} \omega(x; e^{im_1}, \dots, e^{im_q})$$

для всех $\omega \in C^q(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T}))$, $x \in \mathbb{R}^D$, $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{L}$, и определяет изоморфизм

$$\tilde{F}: C(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) \simeq \mathfrak{F} = \bigoplus_{q \geq 0} \mathfrak{F}^q.$$

Кограничный оператор $\delta: C(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) \rightarrow C(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T}))$ индуцирует дифференциал $d_{\mathfrak{F}} = \tilde{F} \circ \delta \circ \tilde{F}^{-1}: \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F}$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} d_{\mathfrak{F}} f(x; m_1, \dots, m_{q+1}) &= f(x; m_2, \dots, m_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq k \leq q} (-1)^k f(x; m_1, \dots, m_k + m_{k+1}, \dots, m_{q+1}) + (-1)^{q+1} f(x; m_1, \dots, m_q) \end{aligned}$$

для всех $f \in \mathfrak{F}^q$, $x \in \mathbb{T}$, $m_1, \dots, m_{q+1} \in \mathbb{L}$.

Итак, определены комплекс $\{\mathfrak{F}; d_{\mathfrak{F}}\}$ и изоморфизмы комплексов $\tilde{F}: \{C(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})); \delta\} \simeq \{\mathfrak{F}; d_{\mathfrak{F}}\}$ и соответствующих пространств когомологий $\tilde{F}: H(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) \simeq H(\mathfrak{F})$. Очевидно, дифференциал $d_{\mathfrak{F}} = \text{id}_{\mathcal{E}(\mathbb{T})} \otimes d$, где дифференциал $d: \Phi \rightarrow \Phi$, $\Phi = \bigoplus_{q \geq 0} \Phi^q$, действует по “суженному” правилу (его явный вид приведен ниже). Таким образом, определен вспомогательный комплекс $\{\Phi; d\}$ с пространством когомологий $H(\Phi)$ и справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Имеет место изоморфизм*

$$H(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) \simeq \mathcal{E}(\mathbb{T}) \hat{\otimes} H(\Phi).$$

4. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НА Φ

4.1. Мультииндексные обозначения:

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \supset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\} \supset \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\};$$

$$[\mu, \nu] = \{\mu, \mu + 1, \mu + 2, \dots, \nu\} \subset \mathbb{Z} \text{ для любых } \mu, \nu \in \mathbb{Z}, \mu \leq \nu;$$

$\mathbb{L} = \mathbb{Z}^D = \{m = (\mu^1, \dots, \mu^D); \mu^\alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \in [1, D]\}, \mathbb{L}_+ = \mathbb{Z}_+^D$, где D – размерность тора $\mathbb{T} = \mathbb{R}^D / 2\pi\mathbb{Z}^D$;

$$|m| = |\mu^1| + \dots + |\mu^D| \text{ для каждого } m \in \mathbb{L};$$

$$e_\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0) \in \mathbb{L}, \text{ где } 1 \text{ стоит на } \alpha\text{-м месте, } \alpha \in [1, D];$$

$$[1, D]_q = \{A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q); \alpha_i \in [1, D], i \in [1, q]\}, q \in \mathbb{N};$$

$$|A| = q \text{ для каждого } A \in [1, D]_q;$$

$A' = (\alpha_q, \dots, \alpha_1), \alpha A = (\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_q), A^i = (\alpha_1, \dots, \check{\alpha}_i, \dots, \alpha_q)$, для всех $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q), \alpha \in [1, D], i \in [1, q]$, значок $\check{}$ означает, что соответствующий индекс пропущен;

$$\mathbb{V} = \mathbb{C}^D = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{L}.$$

4.2. Операции. Нам понадобятся следующие функции из Φ :

$$1_q \in \Phi^q, \text{ где } 1_q(m_1, \dots, m_q) = 1 \text{ для всех } m_1, \dots, m_q \in \mathbb{L}, q \in \mathbb{N};$$

$$\xi^\alpha \in \Phi^1, \text{ где } \xi^\alpha(m) = \mu^\alpha \text{ для всех } m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}, \alpha \in [1, D].$$

На линейном пространстве Φ определена структура ассоциативной алгебры правилом $f \in \Phi^p, g \in \Phi^q \mapsto f \otimes g \in \Phi^{p+q}$, где

$$f \otimes g(m_1, \dots, m_{p+q}) = f(m_1, \dots, m_p)g(m_{p+1}, \dots, m_{p+q})$$

для всех $m_1, \dots, m_{p+q} \in \mathbb{L}, p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Кроме того, на Φ определена основная операция – дифференциал d , действующий по правилу

$$\begin{aligned} df(m_1, \dots, m_{q+1}) &= f(m_2, \dots, m_{q+1}) + \\ &+ \sum_{1 \leq r \leq q} (-1)^r f(m_1, \dots, m_r + m_{r+1}, \dots, m_{q+1}) + (-1)^{q+1} f(m_1, \dots, m_q) \end{aligned}$$

для всех $f \in \Phi^q, m_1, \dots, m_{q+1} \in \mathbb{L}, q \in \mathbb{Z}_+$.

Легко проверяется

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Отображение $d: \Phi \rightarrow \Phi$ является косым дифференцированием алгебры Φ , т.е.*

$$d(f \otimes g) = (df) \otimes g + (-1)^p f \otimes (dg)$$

для всех $f \in \Phi^p, g \in \Phi^q, p, q \in \mathbb{Z}_+$.

Введем следующие линейные отображения на Φ .

Линейное отображение $\varkappa: \Phi \rightarrow \Phi$ зададим правилом

$$\varkappa f(m_1, \dots, m_{q-1}) = f(0, m_1, \dots, m_{q-1})$$

для всех $f \in \Phi^q$, $m_1, \dots, m_{q-1} \in \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. В частности, $\varkappa(\Phi^0) = 0$.

Линейное отображение $\lambda = 1_1 \otimes: \Phi \rightarrow \Phi$ зададим правилом

$$\lambda f(m_1, \dots, m_{q+1}) = f(m_2, \dots, m_{q+1})$$

для всех $f \in \Phi^q$, $m_1, \dots, m_{q+1} \in \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Линейные отображения $\Delta_\alpha: \Phi \rightarrow \Phi$, $\alpha \in [1, D]$, зададим правилом

$$\Delta_\alpha f(m_1, \dots, m_q) = f(m_1 + e_\alpha, m_2, \dots, m_q) - f(m_1, m_2, \dots, m_q)$$

для всех $f \in \Phi^q$, $m_1, \dots, m_q \in \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. В частности, $\Delta_\alpha(\Phi^0) = 0$.

Линейные отображения $\lambda^\alpha = \xi^\alpha \otimes: \Phi \rightarrow \Phi$, $\alpha \in [1, D]$, зададим правилом

$$\lambda^\alpha f(m_1, \dots, m_{q+1}) = \mu_1^\alpha f(m_2, \dots, m_{q+1})$$

для всех $f \in \Phi^q$, $m_1, \dots, m_{q+1} \in \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Положим

$$\rho = \lambda \circ \varkappa, \quad R = \text{id} - \rho \quad (\text{заметим, что } \varkappa \circ \lambda = \text{id});$$

$$\varkappa_\alpha = \varkappa \circ \Delta_\alpha, \quad \alpha \in [1, D];$$

$$\sigma = \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \lambda^\alpha \circ \varkappa_\alpha, \quad S = R - \sigma = \text{id} - \rho - \sigma;$$

$$\tau = \sum_{1 \leq \beta \leq D} \lambda^\beta \circ \Delta_\beta.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Справедливы следующие равенства:*

- 1) $d \circ \varkappa + \varkappa \circ d = \rho$;
- 2) $d \circ \lambda + \lambda \circ d = \lambda \circ \lambda$;
- 3) $d \circ \rho - \rho \circ d = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Для любых $\alpha, \beta \in [1, D]$ справедливы равенства*

- 1) $\Delta_\alpha \circ \lambda^\beta = \delta_\alpha^\beta \lambda$, где δ_α^β — символ Кронекера;
- 2) $\varkappa_\alpha \circ \Delta_\beta = \varkappa \circ \Delta_\alpha \circ \Delta_\beta = \varkappa_\beta \circ \Delta_\alpha = \varkappa_{\alpha\beta}$;
- 3) $\varkappa_\alpha \circ \lambda^\beta = \delta_\alpha^\beta \text{id}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Для любого $\alpha \in [1, D]$ справедливы равенства*

- 1) $d \circ \Delta_\alpha - \Delta_\alpha \circ d = \lambda \circ \Delta_\alpha = \Delta_\alpha \circ \tau$;
- 2) $d \circ \lambda^\alpha + \lambda^\alpha \circ d = 0$;
- 3) $d \circ \varkappa_\alpha + \varkappa_\alpha \circ d = -R \circ \Delta_\alpha = -\Delta_\alpha \circ S$;
- 4) $d \circ \sigma - \sigma \circ d = \tau \circ S$;
- 5) $\lambda \circ \varkappa_\alpha = \rho \circ \Delta_\alpha = \Delta_\alpha \circ \sigma$.

Доказательства этих предложений проводятся последовательными прямыми вычислениями.

4.3. Симметрическая группа. Напомним элементарные свойства симметрической группы $\mathfrak{S}_q$, $q \in \mathbb{N}$, т.е. группы подстановок множества $[1, q]$.

1. Определен морфизм групп $\text{sign}: \mathfrak{S}_q \rightarrow \{\pm 1\}$, $\pi \mapsto \text{sign } \pi$ – знак подстановки π .
2. Подстановка ε называется элементарной, если она меняет местами два соседних индекса, а остальные оставляет на своих местах. Для всякой подстановки $\pi \in \mathfrak{S}_q$ существуют элементарные подстановки $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{S}_q$, $n = n(\pi)$, такие что $\pi = \varepsilon_1 \circ \dots \circ \varepsilon_n$, $\text{sign } \pi = (-1)^n$.
3. Определено действие группы $\mathfrak{S}_q$ на множестве $[1, D]_q$, $\mathfrak{S}_q \ni \pi: [1, D]_q \rightarrow [1, D]_q$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q) \mapsto \pi A = (\alpha_{\pi(1)}, \dots, \alpha_{\pi(q)})$.
4. Пусть $\mathcal{K}$ – линейное пространство и $\mathcal{K}^{[1, D]_q} = \{\phi = (\phi_A): [1, D]_q \rightarrow \mathcal{K}\}$ – множество отображений из $[1, D]_q$ в $\mathcal{K}$. Определено действие группы $\mathfrak{S}_q$ на $\mathcal{K}^{[1, D]_q}$, $\mathfrak{S}_q \ni \pi: \mathcal{K}^{[1, D]_q} \rightarrow \mathcal{K}^{[1, D]_q}$, $\phi \mapsto \pi\phi$, $(\pi\phi)_A = \phi_{\pi A}$.
5. Определена кососимметризация $\mathfrak{a}$:

$$\mathcal{K}^{[1, D]_q} \rightarrow \mathcal{K}^{[1, D]_q}, \quad \phi \mapsto \mathfrak{a}\phi = \frac{1}{q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_q} \text{sign } \pi \cdot \pi\phi.$$

Легко проверяются следующие свойства кососимметризации:

- $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} = \text{id}$, т.е. $\mathfrak{a}$ – проектор;
- $\mathfrak{a}(\pi\phi) = \text{sign } \pi \cdot \mathfrak{a}\phi$ для всех $\phi \in \mathcal{K}^{[1, D]_q}$ и $\pi \in \mathfrak{S}_q$.
6. Для любых $\phi \in \mathcal{K}^{[1, D]_q}$ и $\pi \in \mathfrak{S}_q$ существуют $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathcal{K}^{[1, D]_q}$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{S}_q$, $\varepsilon_r \phi_r = \phi$, $1 \leq r \leq n$, такие что

$$\phi - \text{sign } \pi \cdot \pi\phi = \sum_{1 \leq r \leq n} \phi_r.$$

7. Для любого $\phi \in \mathcal{K}^{[1, D]_q}$ существуют $\phi_1, \dots, \phi_N \in \mathcal{K}^{[1, D]_q}$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \mathfrak{S}_q$, $\varepsilon_r \phi_r = \phi$, $1 \leq r \leq N$, такие что

$$\phi - \mathfrak{a}\phi = \sum_{1 \leq r \leq N} \phi_r.$$

4.4. Коцепи. Перед чтением этого пункта полезно ознакомиться с разделом 6. Линейное пространство коцепей на решетке $\mathbb{L}$ с коэффициентами из Φ есть

$$C^{**}(\mathbb{L}; \Phi) = \Phi \otimes_{\mathbb{Z}} (\wedge \mathbb{L}') = \bigoplus_{0 \leq p, q < \infty} C^{pq}(\mathbb{L}; \Phi) = \bigoplus_{0 \leq p, q < \infty} \Phi^p \otimes_{\mathbb{Z}} (\wedge^q \mathbb{L}').$$

Каждая коцепь $f \in C^{pq}(\mathbb{L}; \Phi)$ имеет однозначное представление

$$f = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} f_A \otimes e^A,$$

или коротко, $f = (f_A)$, где компоненты $f_A \in \Phi^p$. В частности, $C^{p0}(\mathbb{L}; \Phi) = \Phi^p$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Введенные в п. 4.2 отображения $X = d, \varkappa, \lambda, \Delta_\alpha, \lambda^\alpha: \Phi \rightarrow \Phi$ переносятся на $C^{**}(\mathbb{L}; \Phi)$ отождествлением $X \equiv X \otimes_{\mathbb{Z}} \text{id}_{\wedge(\mathbb{L}')}$. Кограничный оператор $d_R: C^{pq}(\mathbb{L}; \Phi) \rightarrow C^{p, q+1}(\mathbb{L}; \Phi)$ действует по формуле

$$(d_R f)_A = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \Delta_{\alpha_i} f_{A^i},$$

для всех $f \in C^{pq}(\mathbb{L}; \Phi)$, $A = (\alpha_0, \dots, \alpha_q)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Справедливы равенства*

- 1) $d \circ d_R = d_R \circ (d + \tau)$;
- 2) $\varkappa \circ (d + \tau) + (d - \lambda) \circ \varkappa = 0$;
- 3) $\varkappa_\alpha \circ (d + \tau) + (d - \lambda) \circ \varkappa_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in [1, D]$.

Доказывается прямыми вычислениями с использованием предложений 4.2–4.4.

Линейное отображение $\mathfrak{h}: C^* \rightarrow C^*$, введенное в п. 6.6, очевидным образом переносится на $C^{**}(\mathbb{L}; \Phi)$. Из явного вида этого отображения следует, что если компоненты $f_A \in \Phi^p$, то и компоненты $(\mathfrak{h}f)_A \in \Phi^p$. Далее, легко проверяется, что если компоненты $f_A(m, \cdot) = 0$ для всех $m \in \mathbb{L}_+$, $|m| \leq r$, то компоненты $(\mathfrak{h}f)_A(m, \cdot) = 0$ для всех $m \in \mathbb{L}_+$, $|m| \leq r + 1$, а компоненты $(d_R f)_A(m, \cdot) = 0$ для всех $m \in \mathbb{L}_+$, $|m| \leq r - 1$, где значок $\cdot$ заменяет остальные аргументы $m_2, \dots, m_p \in \mathbb{L}$, которые могут принимать произвольные значения. Заметим, что условие $f_A(m, \cdot) = 0$ для $|m| = 0$ эквивалентно условию $\varkappa f_A = 0$, а условие $f_A(m, \cdot) = 0$ для всех $m \in \mathbb{L}_+$, $|m| \leq 1$, эквивалентно условию $\varkappa f_A = \varkappa_\alpha f_A = 0$ для всех $\alpha \in [1, D]$, которое, в свою очередь, эквивалентно условию $Sf_A = f_A$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $f \in C^{pq}(\mathbb{L}; \Phi)$, $d_R f = 0$, $Sf = f$, $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $f = 0$ при $q = 0$ и $f = d_R g$ при $q \in \mathbb{N}$, где $g \in C^{p, q-1}(\mathbb{L}; \Phi)$, $g(m, \cdot) = 0$ для всех $m \in \mathbb{L}_+$, $|m| \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует воспользоваться доказательством леммы 6.1 и учесть приведенные выше рассуждения.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОГОМОЛОГИЙ

5.1. Подготовительные леммы. Введем ряд обозначений. Для $f, g \in \Phi^q$, $q \in \mathbb{N}$, будем писать $f \sim g$, если $f - g = dh$, для некоторого $h \in \Phi^{q-1}$. Далее, для $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, $q \in \mathbb{N}$, положим $(\otimes \xi)^A = \xi^{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \xi^{\alpha_q} \in \Phi^q$ и $(\circ \varkappa)_A = \varkappa_{\alpha_1} \circ \dots \circ \varkappa_{\alpha_q}$.

ЛЕММА 5.1. Справедливо равенство $d(\otimes \xi)^A = 0$, в частности, $f \sim g$ влечет $(\otimes \xi)^A \otimes f \sim (\otimes \xi)^A \otimes g$, для всех $A \in [1, D]_p$, $f, g \in \Phi^q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует воспользоваться предложением 4.1 и проверить, что $d\xi^\alpha = 0$, $\alpha \in [1, D]$.

ЛЕММА 5.2. Пусть

$$f = \sum_{|A|=p} (\otimes \xi)^A \otimes g_{A'} \in \Phi^q, \quad g_A \in \Phi^{q-p}, \quad p \leq q,$$

тогда $g_A = (\circ \varkappa)_A f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться равенством $\varkappa_\alpha \xi^\beta = \delta_\alpha^\beta$ для всех $\alpha, \beta \in [1, D]$ (см. предложение 4.3(3)).

ЛЕММА 5.3. Пусть

$$f = \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq D} \xi^\alpha \otimes \xi^\beta \otimes g_{\alpha\beta} \in \Phi^q,$$

где $g_{\alpha\beta} \in \Phi^{q-2}$, причем $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Тогда $f \sim h$, где $h \in \Phi^q$, $Sh = h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим функции $\xi^{\alpha\beta} \in \Phi^1$, $\alpha, \beta \in [1, D]$, равенствами $\xi^{\alpha\beta}(m) = \mu^\alpha \mu^\beta - \delta_\alpha^\beta \mu^\alpha$ для всех $m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}$. С помощью предложения 4.1 легко проверяется, что в условиях леммы

$$f = d\left(-\frac{1}{2} \sum \xi^{\alpha\beta} \otimes g_{\alpha\beta}\right) + h,$$

где $h = \frac{1}{2} \sum \xi^{\alpha\beta} \otimes dg_{\alpha\beta}$, сумма берется по всем $\alpha, \beta \in [1, D]$. Для завершения доказательства заметим, что $\varkappa \xi^{\alpha\beta} = \varkappa_\gamma \xi^{\alpha\beta} = 0$ для всех $\alpha, \beta, \gamma \in [1, D]$.

ЛЕММА 5.4. Пусть $f \in \Phi^q$, $df = 0$, $q \in \mathbb{N}$, тогда

$$f \sim \sum_{|A|=q} (\otimes \xi)^A \cdot c_{A'} + \sum_{|B| \leq q-1} (\otimes \xi)^B \otimes g_{B'},$$

где $c = (c_A) \in \mathbb{C}^{[1,D]_q} = \otimes^q \mathbb{V}$, $g_B \in \Phi^{q-|B|}$, $g_{g_B} = g_B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем метод индукции. Пусть $f \in \Phi^q$, $df = 0$. Тогда в силу предложения 4.2(1)

$$f = \rho f + Rf = d(\varkappa f) + \varkappa(df) + Rf \sim Rf = \sigma f + Sf = \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \xi^\alpha \otimes f_\alpha + g,$$

где $f_\alpha = \varkappa_\alpha f \in \Phi^{q-1}$, $g = Sf \in \Phi^q$, причем $Sg = g$, поскольку $S \circ S = S$. Предположим теперь, что для $r < q$ справедливо представление

$$f \sim \tilde{f} = \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes f_{A'} + \sum_{|B| \leq r-1} (\otimes \xi)^B \otimes g_{B'},$$

где $f_A \in \Phi^{q-r}$, $g_B \in \Phi^{q-|B|}$, $g_{g_B} = g_B$, и докажем, что такое же представление справедливо и для $r+1$. С учетом предложения 4.1 и леммы 5.1 имеем

$$0 = d\tilde{f} = (-1)^r \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes df_{A'} + \sum_{|B| \leq r-1} (-1)^{|B|} (\otimes \xi)^B \otimes dg_{B'}.$$

Пусть $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$. Действуя на предыдущее равенство оператором $(\circ \varkappa)_{A'}$, с помощью леммы 5.2 получаем

$$(-1)^r df_{A'} + \sum_{0 \leq p \leq r-1} (-1)^p \varkappa_{\alpha_r} \dots \varkappa_{\alpha_{p+1}} dg_{\alpha_p \dots \alpha_1} = 0,$$

или, в силу предложения 4.4(3) и равенства $Sg_B = g_B$,

$$(-1)^r(df_{A'} + \Delta_{\alpha_r}g_{\alpha_{r-1}\dots\alpha_1}) + \sum_{0 \leq p \leq r-2} (-1)^{p+1} \varkappa_{\alpha_r} \dots \varkappa_{\alpha_{p+3}} \varkappa_{\alpha_{p+2}\alpha_{p+1}} g_{\alpha_p \dots \alpha_1} = 0,$$

где $\varkappa_{\alpha_{p+2}\alpha_{p+1}} = \varkappa \circ \Delta_{\alpha_{p+2}} \circ \Delta_{\alpha_{p+1}} = \varkappa_{\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}}$ (см. предложение 4.3(2)). Действуя на это равенство оператором $\varkappa$ и учитывая предложение 4.2(1), находим

$$\rho f_{A'} \sim \sum_{0 \leq p \leq r-2} (-1)^{r-p} \varkappa \varkappa_{\alpha_r} \dots \varkappa_{\alpha_{p+3}} \varkappa_{\alpha_{p+2}\alpha_{p+1}} g_{\alpha_p \dots \alpha_1},$$

где учтено, что $\varkappa_{\alpha} g_B = 0$ для всех $\alpha \in [1, D]$. Таким образом,

$$f_{A'} = \rho f_{A'} + \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \xi^{\alpha} \otimes \tilde{f}_{\alpha A'} + S f_{A'} \sim \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \xi^{\alpha} \otimes \tilde{f}_{\alpha A'} + \tilde{g}_{A'} + \sum_{0 \leq p \leq r-2} h_{A'}^{(p)},$$

где $\tilde{f}_{\alpha A'} = \varkappa_{\alpha} f_{A'}$, $\tilde{g}_{A'} = S f_{A'}$, $h_{A'}^{(p)} = (-1)^{r-p} \varkappa \varkappa_{\alpha_r} \dots \varkappa_{\alpha_{p+3}} \varkappa_{\alpha_{p+2}\alpha_{p+1}} g_{\alpha_p \dots \alpha_1}$, причем $S \tilde{g}_{A'} = \tilde{g}_{A'}$, $\varepsilon_p h_{A'}^{(p)} = h_{A'}^{(p)}$, где элементарная подстановка ε_p меняет местами индексы $p+1$ и $p+2$. Подставив последнее выражение в исходное представление для $\tilde{f}$, с помощью леммы 5.1 получим

$$\begin{aligned} f \sim \tilde{f} &\sim \sum_{|A|=r} \sum_{1 \leq \alpha \leq D} (\otimes \xi)^A \otimes \xi^{\alpha} \otimes f_{\alpha A'} + \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes \tilde{g}_{A'} + \\ &+ \sum_{0 \leq p \leq r-2} \sum_{|A|=r} (\otimes \xi)^A \otimes h_{A'}^{(p)} + \sum_{|B| \leq r-1} (\otimes \xi)^B \otimes g_{B'} \sim \\ &\sim \sum_{|A|=r+1} (\otimes \xi)^A \otimes \tilde{f}_{A'} + \sum_{|B| \leq r} (\otimes \xi)^B \otimes \tilde{g}_{B'}, \end{aligned}$$

где $\tilde{g}_B = g_B$ при $|B| = r-1$, $\tilde{g}_B = g_B + \tilde{h}_B^{(|B|)}$ при $|B| \leq r-2$, функции $\tilde{h}_B^{(|B|)}$ вычисляются с помощью леммы 5.3 с учетом равенства $\varepsilon_p h_{A'}^{(p)} = h_{A'}^{(p)}$. По построению $S \tilde{g}_B = \tilde{g}_B$, так что требуемое представление для $r+1$ получено. Полагая теперь $r = q$ и учитывая, что $\Phi^0 = \mathbb{C}$, завершаем доказательство леммы.

ЛЕММА 5.5. Пусть $c = (c_A) \in \otimes^q \mathbb{V}$, тогда

$$\sum_{|A|=q} (\otimes \xi)^A \cdot c_{A'} \sim \sum_{|A|=q} (\wedge \xi)^A \cdot v_{A'},$$

где значок $\wedge$ означает внешнее (кососимметризованное) произведение, $v = (v_A) = ac \in \wedge^q \mathbb{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует воспользоваться свойством 7 симметрической группы и подходящей модификацией леммы 5.3.

ЛЕММА 5.6. Пусть $g_B \in \Phi^{q-|B|}$, $sg_B = g_B$, $|B| \leq q-1$, тогда

$$f = \sum_{|B| \leq q-1} (\otimes \xi)^B \otimes g_{B'} \sim \tilde{f} = \sum_{|B| \leq q-1} (\wedge \xi)^B \otimes \tilde{g}_{B'},$$

где $\tilde{g}_B \in \Phi^{q-|B|}$, $S\tilde{g}_B = \tilde{g}_B$, $(\mathfrak{a}\tilde{g})_B = \tilde{g}_B$, $|B| \leq q-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $|B| = q-1$. В силу свойства 7 симметрической группы

$$\sum_{|B|=q-1} (\otimes \xi)^B \otimes g_{B'} = \sum_{|B|=q-1} (\otimes \xi)^B \otimes \left((\mathfrak{a}g)_{B'} + \sum_{1 \leq r \leq N} g_{rB'} \right),$$

где $g_{rB} \in \Phi^{q-|B|}$, $sg_{rB} = g_{rB}$, $(\varepsilon_r g_r)_B = g_{rB}$ для некоторых элементарных подстановок ε_r , $1 \leq r \leq N$. С помощью леммы 5.3 получаем

$$\sum_{|B|=q-1} (\otimes \xi)^B \otimes g_{rB'} \sim \sum_{|B|=s-1} (\otimes \xi)^B \otimes h_{rB'},$$

где $s = s(r) < q-1$, $h_{rB} \in \Phi^{q-|B|}$, $Sh_{rB} = h_{rB}$, откуда

$$f \sim \sum_{|B|=q-1} (\wedge \xi)^B \otimes \tilde{g}_{B'} + \sum_{|B| \leq q-2} (\otimes \xi)^B \otimes g'_{B'},$$

где $\tilde{g} = \mathfrak{a}g$, $g'_B \in \Phi^{q-|B|}$, $sg'_B = g'_B$. Повторяя эти рассуждения для $|B| = q-2, q-3, \dots$, завершаем доказательство.

ЛЕММА 5.7. Пусть

$$f = \sum_{|B| \leq q-1} (\wedge \xi)^B \otimes g_{B'},$$

где $g_B \in \Phi^{q-|B|}$, $sg_B = g_B$, причем $df = 0$. Тогда $f \sim 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства положим $g_B^{(p)} = \{g_B; |B| = p\}$, так что $g^{(p)} = (g_B^{(p)}) \in \mathcal{C}^{q-p,p}(\mathbb{L}; \Phi)$, $sg^{(p)} = g^{(p)}$. Условие $df = 0$ запишется в виде

$$\sum_{0 \leq p \leq q-1} (-1)^p \sum_{|B|=p} (\wedge \xi)^B \otimes dg_{B'}^{(p)} = 0.$$

Действуя на это равенство оператором $(\circ \varkappa)_{A'}$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, получаем

$$(-1)^q \Delta_{\alpha_q} g_{\alpha_{q-1} \dots \alpha_1}^{(q-1)} + \sum_{0 \leq p \leq q-2} (-1)^{p+1} \varkappa_{\alpha_q} \dots \varkappa_{\alpha_{p+3}} \varkappa_{\alpha_{p+2} \alpha_{p+1}} g_{\alpha_p \dots \alpha_1}^{(p)} = 0,$$

где мы учли предложения 4.4(3) и 4.3(2). Кососимметризуя это равенство, получим $d_R g^{(q-1)} = 0$, поскольку второе слагаемое содержит операторы $\varkappa_{\alpha_{p+2} \alpha_{p+1}} = \varkappa_{\alpha_{p+1} \alpha_{p+2}}$. В силу леммы 4.1 $g^{(q-1)} = d_R h^{(1)}$, где $h^{(1)} \in \mathcal{C}^{1,q-2}(\mathbb{L}; \Phi)$, причем $h^{(1)}(m) = 0$ при

$m \in \mathbb{L}_+$, $|m| \leq 2$. Подставляя это представление в выражение для $df = 0$ и действуя оператором $(\circ \varkappa)_{A'}$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})$, получим

$$(-1)^{q-1} d(d_R h^{(1)})_{A'} + (-1)^{q-2+1} \Delta_{\alpha_{q-1}} g_{\alpha_{q-2} \dots \alpha_1}^{(q-2)} + \dots = 0,$$

где мы использовали предложение 4.4(3), опущенные члены содержат операторы вида $\varkappa_{\alpha\beta}$. Кососимметризуя это равенство, получим

$$d(d_R h^{(1)}) + d_R g^{(q-2)} = 0,$$

и предложение 4.5(1) дает

$$d_R((d + \tau)h^{(1)} + g^{(q-2)}) = 0,$$

откуда опять в силу леммы 4.1 находим

$$g^{(q-2)} = -(d + \tau)h^{(1)} + d_R h^{(2)},$$

где в силу предложения 4.5(2, 3) кофактор $h^{(2)} \in \mathcal{C}^{2, q-3}(\mathbb{L}; \Phi)$, $h^{(2)}(m, \cdot) = 0$ при $m \in \mathbb{L}_+$, $|m| \leq 2$. Исходное выражение для f теперь принимает вид

$$\begin{aligned} f &= \sum_{|B|=q-1} (\wedge \xi)^B \otimes (d_R h^{(1)})_{B'} + \\ &+ \sum_{|B|=q-2} (\wedge \xi)^B \otimes (-(d + \tau)h^{(1)} + d_R h^{(2)})_{B'} + \sum_{|B| \leq q-3} (\wedge \xi)^B \otimes g_{B'}^{(|B|)} \sim \\ &\sim \left(\sum_{|B|=q-1} (\wedge \xi)^B \otimes (d_R h^{(1)})_{B'} - \sum_{|B|=q-2} \sum_{1 \leq \beta \leq D} (\wedge \xi)^B \otimes \xi^\beta \otimes \Delta_\beta h_{B'}^{(1)} \right) + \\ &+ \sum_{|B|=q-2} (\wedge \xi)^B \otimes (d_R h^{(2)})_{B'} + \sum_{|B| \leq q-3} (\wedge \xi)^B \otimes g_{B'}^{(|B|)} \sim \\ &\sim \sum_{|B|=q-2} (\wedge \xi)^B \otimes (d_R h^{(2)})_{B'} + \sum_{|B| \leq q-3} (\wedge \xi)^B \otimes \tilde{g}_{B'}^{(|B|)}, \end{aligned}$$

где мы учли лемму 5.6 при вычислении выражения в больших круглых скобках. Повторяя эти рассуждения для $|B| = q-2, q-3, \dots$, завершаем доказательство. (Последний шаг $|B| = 1$ требует легкой модификации.)

5.2. Когомологии вспомогательного комплекса. Вычислим пространства когомологий $H^q(\Phi)$ вспомогательного комплекса $\{\Phi; d\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. *Справедливы равенства*

$$H^q(\Phi) = \wedge^q \mathbb{V}, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\wedge^q \mathbb{V}$ есть q -я внешняя степень комплексного векторного пространства $\mathbb{V}$ (в частности, $\wedge^0 \mathbb{V} = \mathbb{C}$, $\wedge^q \mathbb{V} = 0$ при $q > D$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно последовательно воспользоваться леммами 5.4–5.7 и убедиться, что для любого $v \in \wedge^q \mathbb{V}$ функция

$$f = \sum_{|A|=q} (\wedge \xi)^A v_{A'}$$

удовлетворяет равенству $df = 0$, причем $f = dg$, $g \in \Phi^{q-1}$, лишь в случае $v = 0$, $g = 0$.

5.3. Когомологии алгебры гладких функций на торе. Основным результатом работы составляет

ТЕОРЕМА 5.2. *Имеет место изоморфизм*

$$H(\mathcal{E}(\mathbb{T}); \mathcal{E}(\mathbb{T})) \simeq \mathcal{E}(\mathbb{T}) \otimes (\wedge \mathbb{V}),$$

где $\wedge \mathbb{V}$ – внешняя алгебра векторного пространства $\mathbb{V}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства следует воспользоваться предложением 3.1 и теоремой 5.1.

6. ДОПОЛНЕНИЕ

В этом разделе мы вычисляем когомологии комплекса де Рама на целочисленной решетке, причем, учитывая популярность решетчатых моделей, даем краткое введение в предмет (см. также, например, [6], [7]).

6.1. Функции на решетке. Напомним, что *целочисленная решетка* (далее решетка) $\mathbb{L} = \mathbb{Z}^D$, $D \in \mathbb{N}$, так что для каждого $m = (\mu^1, \dots, \mu^D) \in \mathbb{L}$ имеем

$$m = \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \mu^\alpha e_\alpha.$$

Обозначим через $\mathcal{F} = \{f: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{C}\}$ линейное пространство всех комплексных функций на $\mathbb{L}$, и пусть $\mathcal{F}_0$ – подпространство всех функций с конечными носителями, где *носитель* функции $f \in \mathcal{F}$ есть множество $\text{supp } f = \{m \in \mathbb{L}: f(m) \neq 0\}$. Для каждой точки $m \in \mathbb{L}$ определена функция $\delta_m \in \mathcal{F}$ правилом $\delta_m(n) = 1$ при $n = m$ и $\delta_m(n) = 0$ при $n \neq m$, $n \in \mathbb{L}$, так что

$$f = \sum_{m \in \mathbb{L}} f(m) \delta_m$$

для всякой функции $f \in \mathcal{F}$. Для каждой пары $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}_0$ определено естественное спаривание

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m \in \mathbb{L}} f(m) g(m) \in \mathbb{C},$$

так что пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_0$ можно считать дуальными друг другу. Линейные отображения $\Delta_\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $\alpha \in [1, D]$, действуют по правилу $\Delta_\alpha f(m) = f(m + e_\alpha) - f(m)$ для всех $f \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{L}$, причем $\Delta_\alpha(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{F}_0$. В частности, $\Delta_\alpha \delta_m = \delta_{m+e_\alpha} - \delta_m$ для всех $\alpha \in [1, D]$, $m \in \mathbb{L}$. Дуальные отображения $\nabla_\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $\alpha \in [1, D]$, определяются условием $\langle \nabla_\alpha f, g \rangle = \langle f, \Delta_\alpha g \rangle$ для всех $f \in \mathcal{F}$, $g \in \mathcal{F}_0$ и действуют по правилу $\nabla_\alpha f(m) = f(m - e_\alpha) - f(m)$ для всех $f \in \mathcal{F}$, $m \in \mathbb{L}$, так что $\nabla_\alpha(\mathcal{F}_0) \subset \mathcal{F}_0$. В частности, $\nabla_\alpha \delta_m = \delta_{m-e_\alpha} - \delta_m$ для всех $\alpha \in [1, D]$, $m \in \mathbb{L}$.

6.2. Внешняя алгебра решетки. На решетке $\mathbb{L}$ определена естественная структура $\mathbb{Z}$ -модуля. Следовательно, определена *внешняя алгебра*

$$\wedge \mathbb{L} = \sum_{0 \leq q < \infty} \wedge^q \mathbb{L},$$

где $\wedge^0 \mathbb{L} = \mathbb{Z}$; $\wedge^q \mathbb{L} = \wedge_{\mathbb{Z}}^q \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{N}$, есть q -я внешняя степень $\mathbb{Z}$ -модуля $\mathbb{L}$ ($\wedge^q \mathbb{L} = 0$ при $q > D$). Элементы e_α , $\alpha \in [1, D]$, образуют базис $\mathbb{Z}$ -модуля $\mathbb{L}$; соответственно элементы $e_A = e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_q}$, $1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_q \leq D$, образуют базис $\mathbb{Z}$ -модуля $\wedge^q \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{N}$, так что каждый элемент $M \in \wedge^q \mathbb{L}$, $q \in \mathbb{N}$, имеет однозначное представление

$$M = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \mu^A e_A,$$

$\mu^A = \mu^{\alpha_1 \dots \alpha_q} \in \mathbb{Z}$, причем $\mu^{\pi A} = \text{sign } \pi \mu^A$ для всех $\pi \in \mathfrak{S}_q$. Аддитивные отображения $e_\alpha^\wedge: \wedge \mathbb{L} \rightarrow \wedge \mathbb{L}$, $\alpha \in [1, D]$, определяются условием $e_\alpha^\wedge(e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_q}) = e_\alpha \wedge e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_q}$ для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in [1, D]$, $q \in \mathbb{Z}_+$, и действуют по правилу

$$\wedge^q \mathbb{L} \ni M = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \mu^A e_A \mapsto e_\alpha^\wedge M = \frac{1}{(q+1)!} \sum_{|A|=q+1} (e_\alpha^\wedge M)^A e_A \in \wedge^{q+1} \mathbb{L},$$

где

$$(e_\alpha^\wedge M)^A = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \delta_\alpha^{\alpha_i} \mu^{A^i}, \quad A = (\alpha_0, \dots, \alpha_q).$$

6.3. Дуальная внешняя алгебра. Дуальная решетка $\mathbb{L}' = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{L}; \mathbb{Z})$ имеет дуальный базис e^α , $\alpha \in [1, D]$, где $\langle e^\alpha, e^\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha$ для всех $\alpha, \beta \in [1, D]$. Дуальная внешняя алгебра $(\wedge \mathbb{L})' = \wedge \mathbb{L}'$ имеет базис $e^A = e^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e^{\alpha_q}$, $1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_q \leq D$, $q \in \mathbb{Z}_+$, так что каждый элемент $N \in \wedge^q \mathbb{L}'$, $q \in \mathbb{N}$, имеет однозначное представление

$$N = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \nu_A e^A,$$

$\nu_A = \nu_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \in \mathbb{Z}$, причем $\nu_{\pi A} = \text{sign } \pi \nu_A$ для всех $\pi \in \mathfrak{S}_q$. Спаривание $\langle N, M \rangle \in \mathbb{Z}$ элементов

$$M = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \mu^A e_A \in \wedge^q \mathbb{L}, \quad N = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \nu_A e^A \in \wedge^q \mathbb{L}', \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

вычисляется по формуле

$$\langle N, M \rangle = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \nu_A \mu^A.$$

Аддитивные отображения $e_\alpha^\wedge: \wedge \mathbb{L} \rightarrow \wedge \mathbb{L}$ имеют дуальные отображения $\iota_\alpha: \wedge \mathbb{L}' \rightarrow \wedge \mathbb{L}'$, $\alpha \in [1, D]$, определяемые условиями $\langle \iota_\alpha N, M \rangle = \langle N, e_\alpha^\wedge M \rangle$ для всех $N \in \wedge^q \mathbb{L}'$, $M \in \wedge^{q-1} \mathbb{L}$ и действующие по правилу

$$\wedge^q \mathbb{L}' \ni N = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \nu_A e^A \mapsto \iota_\alpha N = \frac{1}{(q-1)!} \sum_{|A|=q-1} (\iota_\alpha N)_A e^A \in \wedge^{q-1} \mathbb{L}',$$

где $(\iota_\alpha N)_A = \nu_{\alpha A}$.

6.4. Цепи на решетке. Линейное пространство *цепей* на решетке $\mathbb{L}$ есть прямая сумма $\mathcal{C}_* \equiv \mathcal{C}_*(\mathbb{L}) = \bigoplus_{0 \leq q < \infty} \mathcal{C}_q$, где линейные пространства $\mathcal{C}_q = \mathcal{F}_0 \otimes (\wedge^q \mathbb{L}) = \mathcal{F}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} (\wedge^q \mathbb{L})$ ($\mathcal{C}_0 = \mathcal{F}_0$, $\mathcal{C}_q = 0$ при $q > D$). Базис в $\mathcal{C}_q$, $q \in \mathbb{Z}_+$, образуют q -*клетки* $\delta_m \otimes e_A$, $m \in \mathbb{L}$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_q \leq D$, так что каждая q -цепь $c \in \mathcal{C}_q$ имеет однозначное представление

$$c = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} c^A \otimes e_A = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \sum_{m \in \mathbb{L}} c^A(m) \delta_m \otimes e_A,$$

где $c^A \in \mathcal{F}_0$, $c^{\pi A} = \text{sign } \pi c^A$ для всех $\pi \in \mathfrak{S}_q$.

На линейном пространстве $\mathcal{C}_*$ линейные отображения $\nabla_\alpha, e_\alpha^\wedge: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}_*$, $\alpha \in [1, D]$, задаются отождествлениями $\nabla_\alpha \equiv \nabla_\alpha \otimes \text{id}_{\wedge \mathbb{L}}$, $e_\alpha^\wedge \equiv \text{id}_{\mathcal{F}_0} \otimes e_\alpha^\wedge$.

Граничный оператор $\partial: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}_*$ есть линейное отображение, задаваемое условием

$$\partial(\delta_m \otimes e_A) = \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^{i-1} (\nabla_{\alpha_i} \delta_m) \otimes e_{A^i}$$

для всех $m \in \mathbb{L}$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, $q \in \mathbb{Z}_+$ и действующее по формуле

$$\mathcal{C}_q \ni c = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} c^A \otimes e_A \mapsto \partial c = \frac{1}{(q-1)!} \sum_{|A|=q-1} (\partial c)^A \otimes e_A \in \mathcal{C}_{q-1},$$

где

$$(\partial c)^A = \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \nabla_\alpha c^{\alpha A}.$$

В частности, $\partial(\mathcal{C}_0) = 0$. Для всякой цепи $c \in \mathcal{C}_*$ образ ∂c называется ее *границей*, а сама цепь называется *циклом*, если $\partial c = 0$.

Равенства $\nabla_\alpha \circ \nabla_\beta = \nabla_\beta \circ \nabla_\alpha$, $\alpha, \beta \in [1, D]$, влекут равенство $\partial \circ \partial = 0$, так что определен комплекс $\{\mathcal{C}_*; \partial\}$ с гомологиями $H_*(\mathbb{L}) = \bigoplus_{0 \leq q < \infty} H_q(\mathbb{L})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Справедливы равенства*

$$\partial \circ e_\alpha^\wedge + e_\alpha^\wedge \circ \partial = \nabla_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in [1, D].$$

Доказывается прямыми вычислениями.

6.5. Коцепи на решетке. Линейное пространство *коцепей* на решетке $\mathbb{L}$ есть прямая сумма $\mathcal{C}^* \equiv \mathcal{C}^*(\mathbb{L}) = \bigoplus_{0 \leq q < \infty} \mathcal{C}^q$, где линейные пространства $\mathcal{C}^q = (\mathcal{C}_q)' = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_q; \mathbb{C}) = \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} (\wedge^q \mathbb{L}')$ ($\mathcal{C}^0 = \mathcal{F}$, $\mathcal{C}^q = 0$ при $q > D$). Базис в $\mathcal{C}^q$ образуют элементарные q -коцепи $\delta_m \otimes e^A$, $m \in \mathbb{L}$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q)$, $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_q \leq D$, так что каждая q -коцепь $\omega \in \mathcal{C}^q$ имеет однозначное представление

$$\omega = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \omega_A \otimes e^A = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \sum_{m \in \mathbb{L}} \omega_A(m) \delta_m \otimes e^A,$$

где $\omega_A \in \mathcal{F}$, $\omega_{\pi A} = \text{sign } \pi \omega_A$ для всех $\pi \in \mathfrak{S}_q$. Спаривание $\langle \omega, c \rangle \in \mathbb{C}$ элементов

$$c = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} c^A \otimes e_A \in \mathcal{C}_q, \quad \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \omega_A \otimes e^A \in \mathcal{C}^q, \quad q \in \mathbb{Z}_+,$$

вычисляется по формуле

$$\langle \omega, c \rangle = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \langle \omega_A, c^A \rangle.$$

В частности, $\omega_A(m) = \langle \omega, \delta_m \otimes e_A \rangle$ для

$$\omega = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \sum_{m \in \mathbb{L}} \omega_A(m) \delta_m \otimes e^A.$$

Линейные отображения $\Delta_\alpha, \iota_\alpha, d_R: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$, $\alpha \in [1, D]$, дуальные к отображениям $\nabla_\alpha, e_\alpha^\wedge, \partial: \mathcal{C}_* \rightarrow \mathcal{C}_*$, задаются отождествлениями $\Delta_\alpha \equiv \Delta_\alpha \otimes \text{id}_{\wedge \mathbb{L}'}$, $\iota_\alpha \equiv \text{id}_{\mathcal{F}} \otimes \iota_\alpha$ и формулой

$$\mathcal{C}^q \ni \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \omega_A \otimes e^A \mapsto d_R \omega = \frac{1}{(q+1)!} \sum_{|A|=q+1} (d_R \omega)_A \otimes e^A \in \mathcal{C}^{q+1},$$

где

$$(d_R \omega)_A = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \Delta_{\alpha_i} \omega_{A^i}, \quad A = (\alpha_0, \dots, \alpha_q).$$

Для всякой коцепи $\omega \in \mathcal{C}^*$ образ $d_R \omega$ называется ее *кограницей*, а сама коцепь называется *коциклом*, если $d_R \omega = 0$. Равенство $\partial \circ \partial = 0$ влечет $d_R \circ d_R = 0$, так что определен комплекс $\{\mathcal{C}^*; d_R\}$ с когомологиями $H^*(\mathbb{L}) = \bigoplus_{0 \leq q < \infty} H^q(\mathbb{L})$. Этот комплекс есть дискретный аналог комплекса де Рама гладкого многообразия, индекс R у дифференциала d_R подчеркивает этот факт и отличает его от дифференциала d в основном тексте. Предложение 6.1 имеет дуальное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Справедливы равенства*

$$d_R \circ \iota_\alpha + \iota_\alpha \circ d_R = \Delta_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in [1, D].$$

6.6. Гомотопическая формула для коцепей. Для всякой точки

$$m = (\mu^1, \dots, \mu^D) = \sum_{1 \leq \alpha \leq D} \mu^\alpha e_\alpha \in \mathbb{L}$$

положим

$$m_{(0)} = 0, \quad m_{(\alpha)} = \sum_{1 \leq \beta \leq \alpha} \mu^\beta e_\beta, \quad \alpha \in [1, D],$$

так что $m_{(D)} = m$. Линейные отображения $S^\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $\alpha \in [1, D]$, зададим формулами

$$S^\alpha f(m) = \begin{cases} \sum_{0 \leq \mu < \mu^\alpha} f(m_{(\alpha-1)} + \mu e_\alpha), & \mu^\alpha > 0, \\ 0, & \mu^\alpha = 0, \\ - \sum_{\mu^\alpha \leq \mu < 0} f(m_{(\alpha-1)} + \mu e_\alpha), & \mu^\alpha < 0, \end{cases}$$

для всех $f \in \mathcal{F}$. (Эти формулы – дискретный аналог интегрирования по направленному отрезку $[m_{(\alpha-1)}, m_{(\alpha)}]$; заметим, что $S^\alpha(\mathcal{F}_0) \not\subseteq \mathcal{F}_0$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Пусть $f \in \mathcal{F}$, тогда

1) для всех $\alpha, \beta \in [1, D]$ имеем

$$\Delta_\alpha S^\beta f(m) = \begin{cases} S^\beta \Delta_\alpha f(m), & \alpha < \beta, \\ f(m_{(\beta)}), & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha > \beta; \end{cases}$$

2) для всех $\alpha \in [1, D]$ имеем

$$S^\alpha \Delta_\alpha f(m) = f|_{m_{(\alpha-1)}}^{m_{(\alpha)}} = f(m_{(\alpha)}) - f(m_{(\alpha-1)}).$$

Доказывается прямыми вычислениями.

Определим линейное отображение $\mathfrak{h}: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$ правилами

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0 &= \mathcal{F} \ni f \mapsto \mathfrak{h}f = 0, \\ \mathcal{C}^q \ni \omega &= \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \omega_A \otimes e^A \mapsto \mathfrak{h}\omega = \frac{1}{(q-1)!} \sum_{|A|=q-1} (\mathfrak{h}\omega)_A \otimes e^A \in \mathcal{C}^{q-1}, \end{aligned}$$

где

$$(\mathfrak{h}\omega)_A(m) = \sum_{\alpha > A} (S^\alpha \omega_{\alpha A})(m)$$

для всех $\omega \in \mathcal{C}^q$, $A = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})$, $m \in \mathbb{L}$, $q \in [1, D]$, запись $\alpha > A$ означает, что $\alpha > \alpha_i$ для всех $i \in [1, q-1]$. Линейное отображение $\rho: \mathcal{C}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$ определим правилом $\mathcal{C}^0 \ni f \mapsto \rho f \in \mathcal{C}^0$, $\rho f(m) = f(0)$ для всех $m \in \mathbb{L}$ и $\rho\omega = 0$ для всех $\omega \in \mathcal{C}^q$, $q \in [1, D]$.

ЛЕММА 6.1. Справедлива гомотопическая формула

$$d_R \circ \mathfrak{h} + \mathfrak{h} \circ d_R = \text{id} - \rho.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$q \in [1, D], \quad \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \omega_A \otimes e^A \in \mathcal{C}^q, \quad A = (\alpha_1, \dots, \alpha_q).$$

Тогда

$$\begin{aligned} (d_R \mathfrak{h}\omega)_A(m) &= \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^{i-1} \Delta_{\alpha_i} (\mathfrak{h}\omega)_{A^i}(m) = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^{i-1} \Delta_{\alpha_i} \sum_{\beta > A^i} (S^\beta \omega_{\beta A^i})(m) = \\ &= (-1)^{i_{\max}-1} \Delta_{\alpha_{\max}} \sum_{\beta \geq \alpha_{\max}} (S^\beta \omega_{\beta A^{i_{\max}}})(m) + \\ &\quad + \sum_{i \neq i_{\max}} (-1)^{i-1} \Delta_{\alpha_i} \sum_{\beta > \alpha_{\max}} (S^\beta \omega_{\beta A^i})(m) = \\ &= \omega_A(m_{(\alpha_{\max})}) + \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^{i-1} \sum_{\beta > \alpha_{\max}} (S^\beta \Delta_{\alpha_i} \omega_{\beta A^i})(m), \end{aligned}$$

где $\alpha_{\max} \equiv \alpha_{i_{\max}} > \alpha_i$ для всех $i \in [1, q]$, $i \neq i_{\max}$, и мы воспользовались предложением 6.3(1). С другой стороны,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{h}d_R\omega)_A(m) &= \sum_{\beta > A} (S^\beta(d_R\omega)_{\beta A})(m) = \\ &= \sum_{\beta > \alpha_{\max}} S^\beta \left(\Delta_\beta \omega_A + \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^i \Delta_{\alpha_i} \omega_{\beta A^i} \right)(m) = \\ &= \omega_A|_{m(\alpha_{\max})}^m + \sum_{\beta > \alpha_{\max}} \sum_{1 \leq i \leq q} (-1)^i (S^\beta \Delta_{\alpha_i} \omega_{\beta A^i})(m), \end{aligned}$$

где мы воспользовались предложением 6.3(2) и учли, что $m_{(D)} = m$. Складывая полученные представления, убеждаемся в справедливости гомотопической формулы для $q \in [1, D]$. Для $q = 0$ проверка элементарна.

ТЕОРЕМА 6.1. *Справедливы равенства*

$$H^q(\mathbb{L}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & q = 0, \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно воспользоваться доказанной гомотопической формулой.

6.7. Гомотопическая формула для цепей. Введенное выше линейное отображение $\mathfrak{h}: C^* \rightarrow C^*$ имеет дуальное отображение $\mathfrak{g}: C_* \rightarrow C_*$, задаваемое условием $\langle \omega, \mathfrak{g}c \rangle = \langle \mathfrak{h}\omega, c \rangle$ для всех $c \in C_q$, $\omega \in C^{q+1}$. Явный вид дуального отображения достаточно громоздкий и нам не важен. Важно лишь, что гомотопическая формула для коцепей из леммы 6.1 приводит к дуальной формуле для цепей

$$\mathfrak{g} \circ \partial + \partial \circ \mathfrak{g} = \text{id} - \phi.$$

Здесь линейное отображение $\phi: C_q \rightarrow C_q$, дуальное к отображению ρ , задается условием $\langle \phi c, \omega \rangle = \langle c, \rho \omega \rangle$ для всех $c \in C_q$, $\omega \in C^q$, $q \in [0, D]$ и действует по правилу $\phi g = (\Sigma g)\delta$ для $g \in C_0 = \mathcal{F}_0$, $\phi c = 0$ для всех $c \in C_q$, $q \in [1, D]$, где $\Sigma g = \sum_{m \in \mathbb{L}} g(m) \in \mathbb{C}$, $\delta(m) = 1$ при $m = 0$ и $\delta(m) = 0$ при $m \neq 0$ (т.е. $\delta = \delta_0 \in \mathcal{F}_0$). В частности,

$$H_q(\mathbb{L}) = \begin{cases} \mathbb{C}, & q = 0, \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

6.8. Связь с когомологиями Шевалле–Эйленберга. Линейное пространство $\mathbb{V} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{L} = \mathbb{C}^D$ имеет базис $e_1, \dots, e_D \in \mathbb{L}$, так что каждый элемент $u \in \mathbb{V}$ однозначно записывается в виде

$$u = (u^1, \dots, u^D) = \sum_{0 \leq \alpha \leq D} u^\alpha e_A,$$

где $u^\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in [1, D]$. Определим на $\mathbb{V}$ структуру коммутативной алгебры Ли, положив $[u, v] = 0$ для всех $u, v \in \mathbb{V}$, и зададим представление этой алгебры Ли в линейном

пространстве $\mathcal{F}$ правилом $\mathbb{V} \ni e_\alpha \mapsto \Delta_\alpha \in \mathfrak{gl}(\mathcal{F})$ для всех $\alpha \in [1, D]$, где $\mathfrak{gl}(\mathcal{F})$ – алгебра Ли эндоморфизмов линейного пространства $\mathcal{F}$ с коммутатором в качестве скобки Ли.

Линейное пространство коцепей на алгебре Ли $\mathbb{V}$ с коэффициентами в линейном пространстве $\mathcal{F}$ есть $\mathcal{C}_{\text{CE}}^*(\mathbb{V}; \mathcal{F}) = \bigoplus_{0 \leq q < \infty} \mathcal{C}_{\text{CE}}^q(\mathbb{V}; \mathcal{F})$, где $\mathcal{C}_{\text{CE}}^q(\mathbb{V}; \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\wedge^q \mathbb{V}; \mathcal{F})$ суть линейные пространства всех q -линейных кососимметрических отображений из $\mathbb{V}^q = \times^q \mathbb{V}$ в $\mathcal{F}$. (Заметим, что $\mathcal{C}_{\text{CE}}^0(\mathbb{V}; \mathcal{F}) = \mathcal{F}$, $\mathcal{C}_{\text{CE}}^q(\mathbb{V}; \mathcal{F}) = 0$ при $q > D$.) *Внешний дифференциал* $d_{\text{CE}}: \mathcal{C}_{\text{CE}}^*(\mathbb{V}; \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{C}_{\text{CE}}^*(\mathbb{V}; \mathcal{F})$ задается формулой

$$d_{\text{CE}}\chi(e_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_q}) = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \Delta_{\alpha_i} \chi(e_{\alpha_0} \wedge \dots \wedge e_{\check{\alpha}_i} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_q})$$

для всех $\chi \in \mathcal{C}_{\text{CE}}^q(\mathbb{V}; \mathcal{F})$, $\alpha_0, \dots, \alpha_q \in [1, D]$, $q \in [0, D]$. Легко проверяется, что $d_{\text{CE}} \circ d_{\text{CE}} = 0$, так что определен комплекс $\{\mathcal{C}_{\text{CE}}^*(\mathbb{V}; \mathcal{F}); d_{\text{CE}}\}$ с когомологиями $H_{\text{CE}}^*(\mathbb{V}; \mathcal{F}) = \bigoplus_{0 \leq q < \infty} H_{\text{CE}}^q(\mathbb{V}; \mathcal{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. Правило

$$\mathcal{C}^q \ni \omega = \frac{1}{q!} \sum_{|A|=q} \omega_A \otimes e^A \mapsto \chi \in \mathcal{C}_{\text{CE}}^q(\mathbb{V}; \mathcal{F}), \quad q \in [0, D],$$

где $\chi: \wedge^q \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{F}$ по формуле $\chi(e_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge e_{\alpha_q}) = \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_q}$ для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_q \in [1, D]$, задает изоморфизм комплексов

$$\{\mathcal{C}^*; d_R\} \simeq \{\mathcal{C}_{\text{CE}}^*(\mathbb{V}; \mathcal{F}); d_{\text{CE}}\}$$

и соответствующих когомологий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из определений.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 04-01-00769 и НШ-1542.2003.1. Я благодарен Ю. М. Зиновьеву за полезное обсуждение когомологий де Рама на решетке, а также за отклик статьи [7].

Список литературы

- [1] В. В. Жаринов. ТМФ. 2004. Т. 140. № 3. С. 355–366.
- [2] В. В. Жаринов. ТМФ. 2001. Т. 128. № 2. С. 147–160.
- [3] В. В. Жаринов. ТМФ. 2003. Т. 136. № 2. С. 179–196.
- [4] J. L. Taylor. Adv. Math. 1972. V. 9. P. 137–182.
- [5] В. С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
- [6] А. А. Дезин. Многомерный анализ и дискретные модели. М.: Наука, 1990.
- [7] Yu. M. Zinoviev. Commun. Math. Phys. 1995. V. 168. P. 227–247.

Поступила в редакцию 11.I.2005 г.