Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Пикеринг, Ряды Дирихле для квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 224–228

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 06:57:18

© 2003 г.

А. Пикеринг*

РЯДЫ ДИРИХЛЕ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Изучается конструкция рядов Дирихле для квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными. Показано, что в рассматриваемом классе уравнений только те уравнения, решения которых могут быть представлены в виде таких рядов, допускают обратное преобразование в единственное известное интегрируемое уравнение внутри данного класса.

Ключевые слова: интегрируемые системы, ряды Дирихле.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача нахождения вполне интегрируемых членов заданного класса квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными весьма нетривиальна. В частности, многие из таких уравнений, даже если они вполне интегрируемы (см., например, [1]), не удовлетворяют критерию Пенлеве [2]; эта задача также обсуждалась в статье [3]. В настоящей работе вместо разложений Пенлеве исследуются разложения в виде рядов Дирихле. Доказано, что в рассматриваемом классе уравнений только те уравнения, решения которых могут быть представлены в виде таких рядов, допускают обратное преобразование в единственное известное интегрируемое уравнение внутри данного класса. Заметим, что интересное обсуждение вопроса о применении рядов Дирихле в контексте краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений можно найти в книге [4].

2. КЛАСС ИЗУЧАЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

В настоящей работе рассматривается класс квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными для функции $U(x, t)$, заданной соотношением

$$E \equiv E_1 + E_2 = 0, \tag{1}$$

*Departamento de Matemáticas, Universidad de Salamanca, Salamanca, Spain.
E-mail: andrew@usal.es

где

$$E_1 = UU_{xxx} + 2U_xU_{xx} - 3UU_x, \quad (2)$$

$$E_2 = a(t) + b(t)U + c_0(t)U_x + c_1(t)U_t + d_0(t)U_{xx} + d_1(t)U_{xt} + d_2(t)U_{tt} + \\ + e_0(t)U_{xxx} + e_1(t)U_{xxt} + e_2(t)U_{xtt} + e_3(t)U_{ttt}, \quad (3)$$

т.е. E_1 содержит нелинейные (квадратичные) члены, а E_2 — все возможные линейные члены до производных третьего порядка включительно.

Поводом для исследования этого класса уравнений стала работа [3], в которой изучались возможности получения класса решений вполне интегрируемого уравнения Фукс-штайнера–Фокаса–Камассы–Холма [5]

$$UU_{xxx} + 2U_xU_{xx} - 3UU_x - U_t + U_{xxt} - 2\kappa U_x = 0. \quad (4)$$

В частности, было замечено, что это уравнение допускает факторизацию

$$(U\partial_x + 2U_x + \partial_t)(U_{xx} - U - \kappa) = 0, \quad (5)$$

где $\partial_x = \partial/\partial x$ и $\partial_t = \partial/\partial t$. Таким образом, мы сразу же получаем решение

$$U = a(t)e^{-x} - \kappa + b(t)e^x, \quad (6)$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — произвольные функции от t . Обобщения этого результата на решения, имеющие вид рядов Дирихле, изучаются в настоящей работе.

3. РЯДЫ ДИРИХЛЕ

Как видно, решение (6) содержит только две произвольные функции от t , тогда как уравнение (4) является дифференциальным уравнением третьего порядка с частными производными. Естественным образом возникает вопрос о том, можно ли обобщить решение (6) так, чтобы оно включало еще одну произвольную функцию от t , и какой вид примет это обобщение. В этой статье мы изучаем возможность использования рядов Дирихле и поиска решения уравнения (4) в виде следующего ряда¹⁾:

$$U = e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} U_j(t)(e^x)^j. \quad (7)$$

Заметим, что именно квадратичные члены из E_1 доминируют в (4) (при больших e^{-x}) и, следовательно, именно эти слагаемые определяют рекуррентные соотношения для коэффициентов $U_j(t)$. Таким образом, мы получаем рекуррентные соотношения вида

$$j(j-2)(j-3)U_j = R_j(U_{j-1}, U_{j-2}, \dots, U_0) \quad (8)$$

¹⁾Эквивалентное разложение по убывающим степеням получается при замене $x \rightarrow -x$, $t \rightarrow -t$, что дает дискретную симметрию уравнения (4).

для некоторой дифференциальной функции R_j , откуда следует, что каждый коэффициент U_j , за исключением случаев $j = 0, 2, 3$, определяется через предыдущие коэффициенты и их производные. Для значений $j = 0, 2, 3$ мы полагаем соответствующую функцию R_j также равной нулю, чтобы получить ряд, содержащий только степени экспонент; если соответствующая функция R_j не равна нулю, тогда анзац (7) должен быть модифицирован включением степеней x (тем более высоких, чем выше степень e^x). Это условие, заключающееся в том, что при обрыве рекуррентного соотношения (8) соответствующая функция R_j должна также равняться нулю, будем называть *условием согласования* (следуя терминологии, принятой в сингулярном анализе).

Мы показали, что уравнение (4) действительно допускает решение вида (7), когда условия согласования тождественно выполняются при $j = 0, 2, 3$. В этом решении $U_1 = -\kappa$ и все другие U_j , $j > 3$, выражаются через U_0 , U_2 и U_3 ²⁾. Таким образом, мы получили ожидаемое обобщение решения (6). Легко видеть, что при условии $U_3 = 0$ обобщенное решение (7) сводится к (6).

4. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Теперь рассмотрим построение решения в виде ряда (7) для более общего квазилинейного дифференциального уравнения с частными производными (1). Это уравнение имеет те же самые доминирующие члены из E_1 , что и уравнение (4), но теперь мы добавляем к этим членам все возможные недоминирующие (в случае нашего примера линейные) члены из E_2 , коэффициенты которых являются функциями только от t . Требуя тождественного выполнения условий согласования, возникающих при $j = 0, 2, 3$, получаем ограничения на коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c_i(t)$, $d_i(t)$ и $e_i(t)$. Таким образом, для того чтобы уравнение (1) допускало решение в виде (7), мы должны иметь

$$\begin{aligned} a &= -\frac{1}{2}b(c_0 + e_0) - \frac{1}{2}c_1(c'_0 + e'_0), & d_0 &= -b, & d_1 &= 0, & d_2 &= 0, \\ e_1 &= -c_1, & e_2 &= 0, & e_3 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где штрих означает дифференцирование по t .

Проводя замену переменных $U = W + (c_0 + e_0)/2$, мы видим, что уравнение (1), допускающее решение в виде ряда (7), может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} WW_{xxx} + 2W_x W_{xx} - 3W W_x - b(W_{xx} - W) + \\ + \frac{1}{2}(c_0 + 3e_0)(W_{xx} - W)_x - c_1(W_{xx} - W)_t = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

²⁾В действительности этот результат был сначала приведен в неопубликованной версии работы [3] (1994).

где b , $c_0 + 3e_0$ и c_1 — произвольные функции от t . Отметим, что уравнение (10) допускает факторизацию, как и дифференциальный оператор, действующий на $W_{xx} - W$, и, таким образом, соответствующее решение в виде ряда

$$W = e^{-x} \sum_{j=0}^{\infty} W_j(t) (e^x)^j$$

для функции W включает как частный случай решение $W = W_0(t)e^{-x} + W_2(t)e^x$, полученное при $W_3 = 0$.

Теперь покажем, что уравнение (10) есть преобразованная версия уравнения (4). Для этого мы сделаем в (4) замену переменных

$$U = \alpha(t)V(X, T) - \kappa, \quad X = x + \kappa t + \beta(t), \quad T = \gamma(t) \quad (11)$$

и в результате получим выражение

$$VV_{XXX} + 2V_X V_{XX} - 3VV_X + \frac{\alpha'}{\alpha^2}(V_{XX} - V) + \frac{\beta'}{\alpha}(V_{XX} - V)_X + \frac{\gamma'}{\alpha}(V_{XX} - V)_T = 0, \quad (12)$$

которое можно отождествить с уравнением (10) относительно переменной $W(X, T)$ с коэффициентами, являющимися теперь функциями от T , если положить

$$\frac{\alpha'}{\alpha^2} = -b(T), \quad \frac{\beta'}{\alpha} = \frac{1}{2}(c_0(T) + 3e_0(T)), \quad \frac{\gamma'}{\alpha} = -c_1(T), \quad (13)$$

где $t = \gamma^{-1}(T)$. Таким образом, мы видим, что только уравнения класса (1), решения которых могут быть представлены в виде (7), допускают обратное преобразование в единственное известное интегрируемое уравнение в этом классе, т.е. в уравнение Фукс-штайнера–Фокаса–Камассы–Холма (4).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы ввели новый механизм классификации квазилинейных (а также тех, которые могут быть расширены до неквазилинейных) дифференциальных уравнений с частными производными, а также обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно классификацию, основанную на использовании рядов Дирихле. Мы получили замечательный результат, состоящий в том, что в рассматриваемом классе уравнений³⁾ только те уравнения, решения которых могут быть представлены в виде такого ряда, допускают обратное преобразование в единственное известное интегрируемое уравнение внутри данного класса. Именно, мы показали, что все уравнения класса (1), допускающие решения в виде рядов Дирихле (7), вполне интегрируемые. Таким образом, мы видим, что

³⁾Этот класс может быть расширен до класса, включающего $E_1 = UU_{xxx} + cU_x U_{xx} - (c + 1)UU_x$. Соответствующий ряд Дирихле допускает произвольные коэффициенты при $j = 0, 2, c + 1$. Тогда естественным образом приходится рассматривать случай $c = 3$, который, по-видимому, соответствует моделям пикон, которые недавно обсуждались Дегасперисом, Холмом и Хоном (я благодарен рецензенту за эту информацию). Классификация уравнений этого класса, допускающих решения в виде рядов, которые исследуются в настоящей работе, будет рассмотрена в последующих статьях.

по крайней мере в классе уравнений (1) наш подход позволяет идентифицировать некоторый подкласс интегрируемых уравнений. Конечно, полная классификация вполне интегрируемых уравнений класса (1) все еще остается нерешенной задачей. Эти и другие вопросы, такие как классификация с использованием преобразований голографа (на полулинейные уравнения) и результат действия таких преобразований на решения вида (6) или (7) или на решения какого-либо другого вида, будут изучаться в последующих статьях.

Список литературы

- [1] *M. Wadati, H. Konno, Y. H. Ichikawa.* J. Phys. Soc. Japan. 1979. V. 47. P. 1698–1700; *M. Wadati, Y. H. Ichikawa, T. Shimizu.* Progr. Theor. Phys. 1980. V. 64. P. 1959–1967; *Б. Г. Конопельченко, Дж.-Х. Лу.* ТМФ. 1994. Т. 99. № 2. С. 337–344; *B. G. Konopelchenko, J.-H. Lee.* Physica D. 1995. V. 81. P. 32–43.
- [2] *J. Weiss.* J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 1405–1413.
- [3] *C. Gilson, A. Pickering.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 2871–2888.
- [4] *P. L. Sachdev.* Nonlinear Ordinary Differential Equations and Their Applications. New York–Basel–Hong Kong: Marcel Dekker, 1991.
- [5] *B. Fuchssteiner, A. S. Fokas.* Physica D. 1981. V. 4. P. 47–66; *R. Camassa, D. D. Holm.* Phys. Rev. Lett. 1993. V. 71. P. 1661–1664.

Поступила в редакцию 18.III.2002 г.,
после доработки 3.V.2002 г.