Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Домрин, Задача Римана и матричнозначные потенциалы со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 3, 453–471

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1870>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:45:59

© 2005 г.

А. В. Домрин*

ЗАДАЧА РИМАНА И МАТРИЧНОЗНАЧНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ СО СХОДЯЩЕЙСЯ ФУНКЦИЕЙ БЕЙКЕРА–АХИЕЗЕРА

Получено простое достаточное условие разрешимости задачи Римана о факторизации матричнозначных функций на окружности, основанное на принципе симметрии. В качестве приложения рассмотрен класс нелинейных эволюционных уравнений, получаемых редукцией относительно унитарной группы из уравнений нулевой кривизны, связывающих линейную функцию от спектрального параметра z и полином от z . Показано, что все решения этих эволюционных уравнений, полученные одеванием нулевого решения посредством функции, голоморфной в бесконечности, суть мероморфные функции на $\mathbb{C}_{xt}^2$, не имеющие особенностей на $\mathbb{R}_{xt}^2$. Указанный класс решений содержит все конечнозонные решения общего положения и многие быстроубывающие решения, но далеко не исчерпывается ими. Каждое решение этого класса, рассматриваемое как функция от x , при почти каждом фиксированном $t \in \mathbb{C}$ является потенциалом со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера для соответствующего матричнозначного дифференциального оператора первого порядка.

Ключевые слова: задача Римана о факторизации, уравнения нулевой кривизны.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Задача Римана о факторизации матричнозначных функций (известная также как однородная задача Гильберта, задача Римана–Гильберта или задача линейного сопряжения [1]–[4]) возникает во многих вопросах анализа и геометрии. Сформулируем ее простейшую версию. Пусть $0 \leq R_- < R_+ \leq +\infty$. Положим $D_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_+\}$, $D_- := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R_-\} \cup \{\infty\}$ и обозначим через $GL(n, \mathbb{C})$ группу всех обратимых комплексных $(n \times n)$ -матриц. Голоморфная функция $\gamma: D_+ \cap D_- \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ называется *левофакторизуемой* (соответственно *правофакторизуемой*), если найдутся голоморфные функции $\gamma_{\pm}: D_{\pm} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ такие, что $\gamma = \gamma_+ \gamma_-^{-1}$ на $D_+ \cap D_-$ (соответственно $\gamma = \gamma_-^{-1} \gamma_+$ на $D_+ \cap D_-$). Мы рассматриваем функцию γ как *данные* задачи Римана, а пару (γ_+, γ_-) – как *решение*. Если решение существует, то оно единственно с точностью до умножения элементов пары справа (соответственно слева) на одну и ту же постоянную обратимую матрицу.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: domrin@mi.ras.ru

Для существования решения необходимо, чтобы обращалось в нуль целое число $N(\gamma) := (2\pi)^{-1} \Delta \arg_{|z|=R} \det \gamma(z)$, $R_- < R < R_+$, являющееся топологическим инвариантом задачи. В случае $n = 1$ (т.е. для отображений $\gamma: D_+ \cap D_- \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$) это условие также и достаточно. Однако при $n > 1$ это уже не так: необходимым и достаточным условием является обращение в нуль каждого из n голоморфных инвариантов отображения γ (так называемых частных индексов [1]–[4]), которые в общем случае не допускают алгоритмического вычисления. Поэтому встает вопрос о простых достаточных условиях разрешимости задачи Римана.

Известное достаточное условие такого рода было найдено Гохбергом и Крейном ([3], теорема 8.1): если функция γ достаточно близка к постоянной функции $\gamma_0 \equiv I$ на некоторой окружности $|z| = R$, $R_- < R < R_+$, или, более общо, если $\gamma(z) + \gamma(z)^* \geq 0$ (как эрмитова форма) для всех z , принадлежащих такой окружности, то γ лево- и правофакторизуема. Согласно сказанному выше можно рассматривать это условие как матричный аналог принципа аргумента. Мы дадим другое достаточное условие, основанное на принципе симметрии: функция γ будет лево- и правофакторизуемой, если она переводит точки, симметричные относительно вещественной оси, в точки, симметричные относительно унитарной группы $U(n)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\gamma: D_+ \cap D_- \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ голоморфна и удовлетворяет $\gamma(z)\gamma(\bar{z})^* = I$ для всех $z \in D_+ \cap D_-$. Тогда γ лево- и правофакторизуема.

Эта теорема не вытекает из теоремы Гохберга–Крейна, но и не содержит ее. Дальнейшие замечания, касающиеся теоремы 1, содержатся в разделе 2.

Теорема 1 находит применения при изучении описываемого ниже довольно широкого класса решений (их можно назвать решениями со сходящейся функцией Бейкера–Ахизера) для интегрируемых систем, получаемых из своих комплексифицированных версий редукцией относительно унитарной группы. Фундаментальная роль задачи Римана в построении и изучении решений интегрируемых систем стала общепризнанной после появления второй версии метода одевания Захарова–Шабата [5] (см. также монографии [6]–[8], обзоры [9] и библиографические указания в [4]). Приведенная ниже теорема 2 есть по существу детализация одного частного случая метода одевания (а именно, одевание нулевого решения посредством степенного ряда от z^{-1} , сходящегося в окрестности точки $z = \infty$) на языке, предложенном Сато, Сигалом, Вильсоном и др. (см. [10]–[12]). Частный случай $c_1 = c_2 = \dots = 0$ этой теоремы сформулирован в [13], предложение 2.7, в [14], теорема 3.2.6, и в [15], предложение 2.9.

Рассмотрим множество $\mathcal{D}$ всех голоморфных $GL(n, \mathbb{C})$ -значных функций f на $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$ (число R свое для каждой f) с $f(\infty) = I$. Эквивалентно: $\mathcal{D}$ состоит из ростков голоморфных $GL(n, \mathbb{C})$ -значных функций f в точке $z = \infty$ с $f(\infty) = I$. Всюду далее мы пишем $[A, B] := AB - BA$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $a, b, c_1, c_2, \dots \in gl(n, \mathbb{C})$ – диагональные матрицы, причем все собственные значения матрицы a различны. Фиксируем целое число $j \geq 0$. Для всякой функции $f \in \mathcal{D}$ обозначим через $\Omega(f)$ множество всех $(x, t) \in \mathbb{C}^2$ таких,

что функция $\gamma(x, t, z) := e^{azx + (bz^j + c_1 z^{j-1} + \dots + c_j)t} f^{-1}(z)$ правофакторизуема на кольце $\{R < |z| < +\infty\}$. Тогда множество $\Omega(f) \subset \mathbb{C}^2$ открыто и содержит начало координат. Далее, для каждой точки $(x, t) \in \Omega(f)$ обозначим через $(\gamma_+(x, t, z), \gamma_-(x, t, z))$ решение указанной задачи Римана, нормированное условием $\gamma_-(x, t, \infty) = I$, и положим

$$q(x, t) := \lim_{z \rightarrow \infty} z[\gamma_-(x, t, z) - I, a]. \quad (1.1)$$

Тогда функция $q: \Omega(f) \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ внедиагональна (т.е. ее диагональные элементы тождественно равны нулю), голоморфна и удовлетворяет на $\Omega(f)$ дифференциальному уравнению

$$q_t = [a, F_{j+1}(q)], \quad (1.2)$$

где $F_m: C^\infty(\mathbb{R}_x^1, gl(n, \mathbb{C})) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}_x^1, gl(n, \mathbb{C}))$, $m = 0, 1, 2, \dots$, есть единственная последовательность дифференциальных полиномов по x (т.е. каждое выражение $F_m(\kappa)$ есть полином от $\kappa, \kappa_x, \kappa_{xx}, \dots$) такая, что

- а) $F_0(\kappa) \equiv b$;
- б) $F_m(0) \equiv c_m$ для всех $m = 1, 2, \dots$;
- в) формальный ряд Лорана

$$F(\kappa, z) := \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\kappa) z^{-m}$$

удовлетворяет равенству $\partial_x F(\kappa, z) = [az + \kappa, F(\kappa, z)]$ тождественно по x для всех внедиагональных $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R}_x^1, gl(n, \mathbb{C}))$.

В дальнейшем функция $q(x, t)$, сопоставляемая данной функции $f \in \mathcal{D}$ по формуле (1.1), обозначается также через $q_f(x, t)$.

Из общих свойств зависимости решений задачи Римана от параметра можно вывести (и было выведено для случая $b = c_1 = c_2 = \dots = 0$ в [14], следствие 3.2.10), что решения $q_f(x, t)$, построенные в теореме 2, определены на дополнении к некоторой комплексной кривой в $\mathbb{C}_{xt}^2$ и глобально мероморфны.

ТЕОРЕМА 3. Для всякой функции $f \in \mathcal{D}$ существует целая функция $\nu_f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $\nu_f(0, 0) = 1$, $\Omega(f) = \{(x, t) \in \mathbb{C}^2 \mid \nu_f(x, t) \neq 0\}$ и функция $\nu_f q_f: \Omega(f) \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ продолжается до голоморфной функции на всем пространстве $\mathbb{C}^2$.

Уравнение (1.2) играет роль комплексифицированной версии для многих хорошо известных $(1+1)$ -мерных интегрируемых систем (таких как нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кортевега–де Фриза, задача n -волнового взаимодействия и др.; см., например, [15]). Уравнение (1.2) эквивалентно соответствующему уравнению нулевой кривизны ([5]–[8], [16])

$$U_t - V_x + [U, V] = 0, \quad (1.3)$$

где

$$U(x, t, z) := az + q(x, t), \quad V(x, t, z) := \sum_{m=0}^j F_{j-m}(q)(x, t) z^m \quad (1.4)$$

суть $gl(n, \mathbb{C})$ -значные полиномы от z степеней 1 и j , соответственно, зависящие также от произвольной функции $q(x, t)$. Хорошо известно, что уравнение (1.3) есть условие совместности линейной системы

$$E_x = UE, \quad E_t = VE. \quad (1.5)$$

Иными словами, существование гладкого решения $E: \Omega \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ системы (1.5) на односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (или голоморфного решения $E: \Omega \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ на односвязной области $\Omega \subset \mathbb{C}^2$) равносильно выполнению (1.3) в каждой точке $(x, t) \in \Omega$. Доказательство теоремы 2 состоит в проверке того, что функция $\gamma_+(x, t, z)$ удовлетворяет (1.5), если U и V определить формулами (1.4) по функции $q(x, t)$, построенной в теореме 2.

Отметим, что в [17] и [18] (гл. I, § 1) описана конструкция одевания тривиального решения с помощью задачи Римана на наборе окружностей, позволяющая построить все гладкие локальные решения уравнения (1.3) для случая, когда U и V — рациональные функции от z , все полюсы которых *различны*. Соответствующие интегрируемые системы включают в себя уравнение главных киральных полей и уравнение синус-Гордона. Теорему 2 можно рассматривать как аналог этой конструкции для случая, когда полюсы функций U и V совпадают.

Переход от (1.2) к уравнениям, представляющим непосредственный физический интерес, осуществляется наложением дополнительных ограничений на матричные элементы функции $q(x, t)$, называемых редукциями или условиями вещественности (см. [5]–[7], [15], [16]). Например, редукция относительно унитарной группы заключается в требовании косоэрмитовости матрицы $q(x, t)$ для всех вещественных значений x, t . При этом матрицы $a, b, c_1, c_2, \dots$ также предполагаются косоэрмитовыми. Эта редукция позволяет строить решения фокусирующего нелинейного уравнения Шредингера и задачи n волн.

ПРИМЕР. Выберем $n = 2$, $j = 2$, $a = b = \text{diag}(-i/2, i/2)$ и $c_1 = c_2 = \dots = 0$. Тогда матричное уравнение (1.2) на неизвестную внедиагональную функцию $q(x, t)$ со значениями в пространстве (2×2) -матриц становится эквивалентным следующей системе уравнений на скалярные (комплекснозначные) функции $u(x, t) := q_{12}(x, t)$ и $v(x, t) := q_{21}(x, t)$:

$$u_t = i(u_{xx} - 2u^2v), \quad v_t = -i(v_{xx} - 2uv^2). \quad (1.6)$$

Если выполняется указанное выше дополнительное условие $q = -q^*$ (т.е. $v = -\bar{u}$) при $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, то каждое из двух уравнений системы (1.6) превращается в фокусирующее нелинейное уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + 2u|u|^2 = 0, \quad (1.7)$$

решения которого, в отличие от решений комплексифицированной системы (1.6), имеют прямой физический смысл.

Роль теоремы 1 при изучении решений систем, полученных из уравнения (1.2) унитарной редукцией, иллюстрируется утверждениями Б, В приведенной ниже теоремы 4: из них вытекает, что *те из построенных в теореме 2 решений $q = q_f$ уравнения (1.2), которые имеют непосредственный физический смысл (т.е. удовлетворяют условиям вещественности относительно унитарной группы), автоматически определены (и тогда вещественно аналитичны по теореме 3) на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x, t* . Подобные результаты известны для быстроубывающих и конечнозонных решений (см. соответственно [7], часть I, гл. 2, § 2 и [19], теорема 1).

ТЕОРЕМА 4. А. *Функции $f, g \in \mathcal{D}$ задают одно и то же решение $q = q_f = q_g$ уравнения (1.2) тогда и только тогда, когда функция $g^{-1}f \in \mathcal{D}$ диагональна.*

Б. *Если все матрицы $a, b, c_1, c_2, \dots$ косоэрмитовы, то построенное в теореме 2 решение q уравнения (1.2) удовлетворяет $q(x, t) = -q^*(x, t)$ для $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ в том и только том случае, когда $q = q_f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{D}$, удовлетворяющей $f(z)f(\bar{z})^* = I$ при $|z| > R$.*

В. *Если все матрицы $a, b, c_1, c_2, \dots$ косоэрмитовы и функция $f \in \mathcal{D}$ удовлетворяет $f(z)f(\bar{z})^* = I$ при $|z| > R$, то поставленная в теореме 2 задача Римана разрешима при всех вещественных x, t , т.е. имеем $\Omega(f) \supset \mathbb{R}_{xt}^2$.*

Опишем связь решений уравнения (1.2), построенных в теореме 2, с конечнозонными решениями (как известно, этот класс решений впервые был рассмотрен Новиковым [20] для уравнения Кортевега–де Фриза). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}_{xt}^2$ есть некоторая окрестность начала координат в $\mathbb{R}^2$, внедиагональная гладкая функция $q: \Omega \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ удовлетворяет (1.2) на Ω , а $E: \Omega \times \mathbb{C}_z^1 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ есть нормированное условием $E(0, 0, z) = I$ решение системы (1.5), где U и V заданы по функции $q(x, t)$ формулами (1.4). Следуя [16], с. 227–228, будем называть функцию q *конечнозонным решением общего положения*, если существует такая рациональная $gl(n, \mathbb{C})$ -значная функция $G(z)$, голоморфная в точке $z = \infty$, что алгебраическая кривая $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(G(z) - wI) = 0\}$ распадается надпроколотой окрестностью точки $z = \infty$ на n различных голоморфных ветвей и для всех $(x, t) \in \Omega$ функция $E(x, t, z)G(z)E^{-1}(x, t, z)$ также голоморфна в точке $z = \infty$ (см. также замечание 4 в разделе 4). Хотя в этом определении от q априори требуется лишь гладкость класса C^j , следующая теорема вместе с теоремой 3 влечет, что каждое такое решение есть мероморфная функция на всем пространстве $\mathbb{C}_{xt}^2$. (Конечно, это утверждение можно вывести и из явных формул, выражающих конечнозонные решения через тета-функции [16].) Связь конечнозонных решений с задачей Римана, подобной задаче из теоремы 2, была впервые отмечена Рейманом и Семеновым-Тянь-Шанским [21] (см. также [12], § 4 и [8], § 3.1 и предложение 4.4.9).

ТЕОРЕМА 5. А. *Пусть $q(x, t)$ есть конечнозонное решение общего положения для уравнения (1.2). Тогда $q = q_f$ для некоторой функции $f \in \mathcal{D}$.*

Б. Решение q_f уравнения (1.2) является конечнозонным решением общего положения тогда и только тогда, когда найдутся диагональная функция $r \in \mathcal{D}$ и рациональная $gl(n, \mathbb{C})$ -значная функция $G(z)$ такие, что $G(z)$ голоморфна в точке $z = \infty$, кривая $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(G(z) - wI) = 0\}$ распадается над проколотой окрестностью точки $z = \infty$ на n различных ветвей и столбцы матрицы $f(z)r(z)$ являются собственными векторами матрицы $G(z)$ для всех z из некоторой окрестности точки $z = \infty$.

Таким образом, если функция $f \in \mathcal{D}$ отвечает конечнозонному решению, то с точностью до указанной в утверждении А теоремы 4 неоднозначности (т.е. с точностью до умножения справа на любую диагональную функцию $r \in \mathcal{D}$) функция f является алгебраической и все ее точки ветвления имеют порядок не выше n (т.е. не выше размера матриц, участвующих в конструкции). Отсюда следует, что даже для алгебраических функций $f \in \mathcal{D}$ решения q_f уравнения (1.2) вполне могут не быть конечнозонными. Дальнейшие примеры не являющихся конечнозонными решений q_f доставляются безотражательными потенциалами с бесконечным спектром (см. [22]–[24]). В этом случае функция $f(z)$ голоморфна всюду на $\mathbb{C}^1$, кроме бесконечной последовательности особенностей (нулей и полюсов).

Опишем в общих чертах связь класса решений уравнения (1.2), построенных в теореме 2, с классом быстроубывающих решений, построенных методом обратной задачи рассеяния для матричных дифференциальных операторов первого порядка (этот класс решений был впервые рассмотрен Захаровым и Шабатом [25] для нелинейного уравнения Шредингера). Указанные классы имеют большое пересечение, соответствующее тем $f \in \mathcal{D}$, которые, не считая конечного числа нулей и полюсов, голоморфны и обратимы вне некоторого отрезка вещественной оси и имеют достаточно хорошие пределы сверху и снизу на этом отрезке. При этом задача Римана из теоремы 2, по существу, совпадает с задачей Римана, обычно используемой в методе обратной задачи рассеяния (см. [6], [26], [27]). С другой стороны, значительная часть каждого из этих двух классов лежит вне их пересечения. Обоснования сделанных утверждений приведены в разделе 5, где также сравнивается теорема 1 и ее аналог для быстроубывающего случая, основанный на теореме Гохберга–Крейна.

Скажем теперь несколько слов о терминологии. Обозначим через $\mathcal{B}_j(a, b, c_1, \dots, c_j)$ класс всех построенных в теореме 2 мероморфных решений $q = q_f: \mathbb{C}_{xt}^2 \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ (по всем $f \in \mathcal{D}$) соответствующего уравнения (1.2). Следуя [14], будем называть элементы этого класса *решениями со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера*. В замечании 5 в разделе 4 показано, что это название вполне согласуется с общим понятием функции Бейкера–Ахиезера, которое было впервые введено Кричевером [28]. Если $b = c_1 = c_2 = \dots = 0$, то уравнение (1.2) при всех $j = 0, 1, 2, \dots$ принимает тривиальный вид $q_t = 0$, т.е. просто гласит, что q не зависит от t . Элементы соответствующего множества решений $\mathcal{B}(a) := \mathcal{B}_j(a, 0, 0, \dots)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, рассматриваемые как мероморфные функции на $\mathbb{C}_x^1$, будем называть *потенциалами со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера* (близкое понятие, названное сильной регулярностью на бесконечности,

вводится в [8], определение 4.4.1). Слово “потенциал” оправдывается следующим простым утверждением, показывающим, что каждое решение $q \in \mathcal{B}_j(a, b, c_1, \dots, c_j)$ (каковы бы ни были число j и матрицы $b, c_1, \dots, c_j$) можно рассматривать как эволюцию (мероморфную по $t \in \mathbb{C}^1$) точки в пространстве $\mathcal{B}(a)$, т.е. роль множества $\mathcal{B}(a)$ в конструкции теоремы 2 та же, что и роль пространства потенциалов в обычном методе обратной задачи рассеяния.

ТЕОРЕМА 6. *Фиксируем целое число j , матрицы $a, b, c_1, \dots, c_j$ и функцию $f \in \mathcal{D}$, как в теореме 2. Пусть $q_f \in \mathcal{B}_j(a, b, c_1, \dots, c_j)$ есть построенное по этим данным решение уравнения (1.2). Тогда функция $x \mapsto q_f(x, t)$ принадлежит $\mathcal{B}(a)$ для тех и только тех значений $t \in \mathbb{C}$, для которых $(0, t) \in \Omega(f)$.*

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Будем для краткости называть отображения $\gamma: D_+ \cap D_- \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющие условиям теоремы 1, *симметричными*. Заметим, что всякое симметричное отображение γ можно равномерно на компактах в $D_+ \cap D_-$ аппроксимировать рациональными симметричными отображениями γ_k : достаточно аппроксимировать γ рациональными отображениями r_k и положить $\gamma_k(z) = (r_k(z) + (r_k^*)^{-1}(\bar{z}))/2$.

ЛЕММА 1. А. *Существует такое $\delta > 0$, что всякое голоморфное отображение $\phi: D_+ \cap D_- \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющее $|\phi(z) - I| < \delta$ при $|z| = R$, $R_- < R < R_+$, является лево- и правофакторизуемым.*

Б. *Всякое рациональное $GL(n, \mathbb{C})$ -значное симметричное отображение f с $f(\infty) = I$ разлагается в конечное произведение симметричных элементарных множителей, т.е. найдутся числа $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ и ортопроекторы $P_j: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, $j = 1, 2, \dots, s$, такие, что*

$$f(z) = B_{\alpha_1 P_1}(z) \dots B_{\alpha_s P_s}(z), \quad B_{\alpha P}(z) := \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} P + (I - P). \quad (2.1)$$

В. *Пусть $f_{\pm}: D_{\pm} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ – симметричные отображения, причем f_- рационально и $f_-(\infty) = I$. Тогда найдутся симметричные отображения $g_{\pm}: D_{\pm} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ такие, что g_- рационально, $g_-(\infty) = I$ и $f_- f_+ = g_+ g_-$ на $D_+ \cap D_-$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Это утверждение – простой частный случай теоремы Гохберга–Крейна. Впрочем, его легко получить и непосредственно, как, например, в [29], лемма 12.6.

Б. Это теорема 5.4 работы [30]. Другие доказательства и уточнения содержатся в [31], с. 358–361 (добавление А к русскому изданию) и [32].

В. Это утверждение получается индукцией по числу элементарных множителей в разложении (2.1) функции $f_-(z)$. Случай одного множителя разобран, например, в работе [15], предложение 5.2.

Выведем из леммы 1 левофакторизуемость отображения γ . При достаточно большом k в силу утверждения А леммы 1 имеем $\gamma_k^{-1} \gamma = p_+ p_-^{-1}$ для некоторых голоморфных отображений $p_{\pm}: D_{\pm} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Пользуясь утверждением Б леммы 1, запишем

$\gamma_k = q_+ q_-$, где $q_{\pm}$ рациональны, симметричны и голоморфны на $D_{\pm}$. Согласно утверждению В леммы 1 имеем $q_- p_+ = r_+ r_-$ на $D_+ \cap D_-$ для некоторых голоморфных отображений $r_{\pm}: D_{\pm} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Тогда равенство $\gamma = q_+ r_+ r_- p_-^{-1}$, справедливое на $D_+ \cap D_-$, дает требуемое разложение. Правофакторизуемость γ устанавливается аналогично. Теорема 1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство проводится так же, если класс $GL(n, \mathbb{C})$ -значных функций, голоморфных в кольце, заменить на класс $GL(n, \mathbb{C})$ -значных гёльдеровских функций на произвольной окружности с центром в начале координат или на любую другую распадающуюся R -алгебру (см. [2], § 2.3.1) непрерывных функций на окружности. Впрочем, для приложения теоремы 1 к решениям, построенным в теореме 2, достаточно считать функцию γ голоморфной в кольце $D_+ \cap D_-$, что и сделано выше. Более того, в теореме 2 мы заранее знаем, что функция γ левифакторизуема, и вопрос состоит в том, будет ли она правофакторизуема, так что вместо теоремы 1 можно было бы использовать ее более слабый вариант, полученный в [33], теорема 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Кроме условия унитарной симметрии $f(z)f(\bar{z})^* \equiv I$, в теории $(1 + 1)$ -мерных интегрируемых систем широко применяется условие “псевдоунитарной симметрии” $f(z)Jf(\bar{z})^* = J$, где $J = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1) \neq \pm I$ (см. [5]–[7], [19], [34]). Примеры показывают, что теорема 1 становится неверной для этого случая (см., например, [15], § 11). Утверждения, сформулированные в [35], позволяют высказать гипотезу о том, что теорема 1 остается верной для $J \neq \pm I$ при условии, что J -симметричное отображение γ голоморфно вне некоторого отрезка вещественной оси и имеет на нем непрерывные $GL(n, \mathbb{C})$ -значные граничные значения сверху и снизу. Более того, существование солитонных решений у нелинейного уравнения Шредингера с граничными условиями конечной плотности (см. [7], часть I, гл. 2) указывает на то, что аналог теоремы 1 должен иметь место и для некоторых J -симметричных функций γ вида, указанного в теореме 2, где функция f рациональна, но множитель $e^{azx + (bz^J + c_1 z^{J-1} + \dots + c_j)t}$ заменен на (J -симметричное) решение $E_0(x, t, z)$ системы (1.5), отвечающей некоторому *ненулевому* “затравочному” решению $q_0(x, t)$ уравнения (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Отметим, что в [7] (часть I, гл. 2, § 2) и [36] (предложение 6.2) имеются аналоги теоремы 1, в которых окружность $\{|z| = R\}$ заменяется соответственно на вещественную ось и на пару окружностей, причем “условие симметрии” приобретает совершенно другой смысл (случай вещественной оси обсуждается подробнее ниже в разделе 5). С другой стороны, можно усмотреть родство теоремы 1 с результатами о существовании и регулярности конечнозонных решений (см. [19], теорема 1 и [34], теорема 6.1), если переформулировать последние на языке задачи Римана (см. ниже раздел 4).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4

А. Пусть $g = fr$ для некоторой диагональной функции $r \in \mathcal{D}$. Обозначим через $\gamma_{\pm}^f$ и $\gamma_{\pm}^g$ решения задач Римана из теоремы 2, отвечающих функциям f и g , соответственно. Тогда из единственности решения задачи Римана следует, что $\gamma_-^g = \gamma_-^f r$ и $\gamma_+^g = \gamma_+^f$.

Теперь можно вывести равенство $q_f = q_g$ из равенства $\gamma_-^g = \gamma_-^f r$, пользуясь непосредственно определением (1.1) функции $q_f(x, t)$. Но проще исходить из равенства $\gamma_+^g = \gamma_+^f$ и уже упомянутого в разделе 1 утверждения о том, что функция $\gamma_+(x, t, z)$ удовлетворяет первому уравнению системы (1.5):

$$\partial_x \gamma_+^f(x, t, z) = (az + q_f(x, t))\gamma_+^f(x, t, z) \quad \text{при } (x, t) \in \Omega(f), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Обратное утверждение А теоремы 4 можно получить в усиленном виде: *если $f, g \in \mathcal{D}$ и существует $\delta > 0$ такое, что $q_f(x, 0) = q_g(x, 0)$ при $-\delta < x < \delta$, то функция $f^{-1}g$ диагональна*. Для доказательства заметим, что $\gamma_+^f(0, 0, z) = \gamma_+^g(0, 0, z) = I$, поэтому из (3.1) по теореме единственности для дифференциальных уравнений вытекает равенство $\gamma_+^f(x, 0, z) = \gamma_+^g(x, 0, z)$ для $-\delta < x < \delta$ и $z \in \mathbb{C}$. Тогда при $-\delta < x < \delta$ и $|z| > R$ имеем

$$e^{az} f^{-1}(z)g(z)e^{-az} = (\gamma_-^f)^{-1}(x, 0, z)\gamma_-^g(x, 0, z). \quad (3.2)$$

Положим $\varphi(z) = f^{-1}(z)g(z)$. Матричные элементы $\varphi_{kl}(z)e^{(a_{kk}-a_{ll})zx}$ левой части (3.2) голоморфны в точке $z = \infty$ при любом фиксированном $x \in (-\delta, \delta)$. Поскольку $a_{kk} \neq a_{ll}$ при $k \neq l$, получаем отсюда, что $\varphi_{kl}(z) \equiv 0$ при $k \neq l$, т.е. функция $f^{-1}g$ диагональна.

Б. Отображение $S: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, заданное формулой $Sf(z) = (f(\bar{z})^*)^{-1}$, обладает следующими свойствами:

$$S(f_1 f_2) = S(f_1)S(f_2), \quad S(Sf) = f, \quad Sf = f \iff f(z)f(\bar{z}) \equiv I. \quad (3.3)$$

Пусть $f \in \mathcal{D}$ — произвольная функция и $g := Sf$. В силу косоэрмитовости матриц $a, b, c_1, c_2, \dots$ получаем из (3.3) и единственности решения задачи Римана, что $\gamma_-^g(x, t, z) = S\gamma_-^f(x, t, z)$ и $\gamma_+^g(x, t, z) = S\gamma_+^f(x, t, z)$ для всех $(x, t) \in \Omega(f) \cap \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{C}$. Тогда (3.1) влечет, что для любой функции $f \in \mathcal{D}$ имеем

$$q_{Sf}(x, t) = -q_f^*(x, t) \quad \text{для всех } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \cap \Omega(f) = \mathbb{R}^2 \cap \Omega(Sf). \quad (3.4)$$

В частности, если $f = Sf$, то $q_f = -q_f^*$ на $\mathbb{R}^2 \cap \Omega(f)$.

Обратно, пусть $q_f = -q_f^*$ на $\mathbb{R}^2 \cap \Omega(f)$. Тогда из (3.4) и доказанного выше усиления утверждения А следует, что $q_{Sf} \equiv q_f$, т.е. $Sf = fd$ для некоторой диагональной функции $d \in \mathcal{D}$. Выберем такую диагональную функцию $r \in \mathcal{D}$, что $r^{-2} = d$. Применение отображения S к уравнению $Sf = fd$ дает, что $dSd = I$, т.е. $rSr = I$. Поэтому функция $f_1 := fr^{-1}$ удовлетворяет $Sf_1 = Sf(Sr)^{-1} = fdr = f_1$, а в силу утверждения А имеем $q = q_{f_1}$, что и требовалось доказать.

В. Это утверждение вытекает из утверждения Б и теоремы 1.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех $gl(n, \mathbb{C})$ -значных функций $G(z)$, голоморфных на $\{|z| > R\} \cup \{\infty\}$ (число R свое для каждой функции G) и таких, что комплексная кривая $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| > R, \det(G(z) - w) = 0\}$ распадается над проколотой окрестностью точки $z = \infty$ на n различных голоморфных ветвей. (Как и в определении множества $\mathcal{D}$ в разделе 1, можно считать, что $\mathcal{R}$ состоит из ростков функций указанного вида в точке $z = \infty$.) Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ есть некоторая окрестность начала координат и $q: \Omega \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ — гладкое решение уравнения (1.2), а $E: \Omega \times \mathbb{C} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ — соответствующее решение линейной системы (1.5), нормированное условием $E(0, 0, z) = I$. Будем называть семейство элементов $W(x, t, \cdot)$ множества $\mathcal{R}$, гладко зависящих от параметров $(x, t) \in \Omega$, *сходящейся резольвентой решения q* , если

$$[\partial_x - U(x, t, z), W(x, t, z)] = 0, \quad [\partial_t - V(x, t, z), W(x, t, z)] = 0 \quad (4.1)$$

для всех $(x, t) \in \Omega$, $|z| > R$, где функции U, V определены формулами (1.4). Условия (4.1) эквивалентны уравнениям $W_x = [U, W]$, $W_t = [V, W]$. Из единственности решения системы (1.5) следует, что всякое решение этих уравнений удовлетворяет

$$W(x, t, z) = E(x, t, z)G(z)E^{-1}(x, t, z) \quad \text{при } (x, t) \in \Omega, \quad |z| > R \quad (4.2)$$

для некоторой функции $G \in \mathcal{R}$, а именно для $G(z) = W(0, 0, z)$. Обратно, взяв произвольную функцию $G \in \mathcal{R}$ и определив $W(x, t, z)$ формулой (4.2), мы получим сходящуюся резольвенту решения q , если только правая часть формулы (4.2) голоморфно продолжается в точку $z = \infty$ при всех $(x, t) \in \Omega$.

Оба утверждения теоремы 5 вытекают из приведенной ниже леммы 2, утверждающей, что решения уравнения (1.2), построенные в теореме 2, — это те и только те решения, которые обладают сходящейся резольвентой. (Из определений ясно, что конечнозонные решения общего положения — это те и только те решения, которые обладают сходящейся резольвентой, рациональной по z .) Доказательство леммы 2 до определенного момента повторяет вывод аналитических свойств функции Бейкера–Ахиезера, приведенный на с. 228–230 обзора [16].

ЛЕММА 2. А. Для любой функции $f \in \mathcal{D}$ и любой диагональной функции $G_0 \in \mathcal{R}$ функция $W(x, t, z) = \gamma_-(x, t, z)G_0(z)\gamma_-^{-1}(x, t, z)$ является сходящейся резольвентой решения $q_f(x, t)$ уравнения (1.2).

Б. Пусть решение $q: \Omega \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ уравнения (1.2) обладает сходящейся резольвентой $W(x, t, z)$. Тогда существует функция $f \in \mathcal{D}$ такая, что функция $f^{-1}(z)W(0, 0, z)f(z)$ диагональна (или, что эквивалентно, столбцы матрицы $f(z)$ суть собственные векторы матрицы $W(0, 0, z)$). Для любой такой функции $f \in \mathcal{D}$ имеем $q = q_f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. А. Ясно, что функция $W(x, t, \cdot)$ принадлежит $\mathcal{R}$ при всех $(x, t) \in \Omega(f)$. С другой стороны, поскольку G_0 диагональна, при всех $(x, t) \in \Omega(f)$ и $|z| > R$ имеем $W = \gamma_- G_0 \gamma_-^{-1} = \gamma_+ f G_0 f^{-1} \gamma_+^{-1}$, т.е. выполняется соотношение (4.2) с $E = \gamma_+$, $G = f G_0 f^{-1}$.

Б. Покажем, что матрица $W(x, t, \infty)$ диагональна при всех $(x, t) \in \Omega$. Сначала допустим, что матрица $W(x, t, \infty)$ обратима для всех $(x, t) \in \Omega$. Тогда равенство (4.2) с $G(z) = W(0, 0, z)$ можно записать в виде $E = W E G^{-1}$, откуда $U = E_x E^{-1} = (W E)_x \times (W E)^{-1} = W_x W^{-1} + W U W^{-1}$. Сравнение коэффициентов при z^1 в последнем равенстве дает, что $a = W(x, t, \infty) a W^{-1}(x, t, \infty)$, т.е. матрица $W(x, t, \infty)$ диагональна при всех $(x, t) \in \Omega$. Чтобы прийти к тому же заключению в общем случае, надо заменить $W(x, t, z)$ на $W(x, t, z) + \varepsilon I$ и перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из определения $\mathcal{R}$ следует, что функция $G(z) = W(0, 0, z)$, как и любой другой элемент $G \in \mathcal{R}$ с диагональной матрицей $G(\infty)$, может быть представлена в виде $G(z) = f(z) G_0(z) f^{-1}(z)$, где $f \in \mathcal{D}$, а матрица $G_0(z)$ диагональна и голоморфна в окрестности $z = \infty$ (см., например, [37], гл. II, § 4, п. 6). При этом диагональные элементы матрицы $G_0(z)$ суть значения тех n голоморфных ветвей, на которые распадается кривая $\{\det(G(z) - wI) = 0\}$ над окрестностью точки $z = \infty$, а столбцы матрицы $f(z)$ представляют собой соответствующие собственные векторы. При фиксированных G и G_0 матрица f определена однозначно с точностью до умножения справа на произвольную диагональную функцию $r \in \mathcal{D}$. В оставшейся части доказательства леммы мы фиксируем обозначение $G(z) = W(0, 0, z)$. Выберем любую функцию $f \in \mathcal{D}$ такую, что функция $G_0 = f^{-1} G f$ диагональна, и покажем, что $q = q_f$.

Спектры матриц $W(x, t, z)$ и $G(z)$ совпадают при всех $(x, t) \in \Omega$ в силу (4.2). Поэтому применение рассуждения из предыдущего абзаца к функции $z \mapsto W(x, t, z)$ показывает, что существует гладко зависящее от $(x, t) \in \Omega$ семейство элементов $m(x, t, \cdot) \in \mathcal{D}$ такое, что

$$W(x, t, z) = m(x, t, z) G_0(z) m^{-1}(x, t, z) \quad \text{при } (x, t) \in \Omega, \quad |z| > R. \quad (4.3)$$

При $z \neq \infty$ левая часть (4.3) равна $W = E G E^{-1} = E f G_0 (E f)^{-1}$. Тем самым, поскольку для общей точки z все собственные значения диагональной матрицы $G_0(z)$ различны, из (4.3) следует, что $GL(n, \mathbb{C})$ -значная функция

$$\Phi(x, t, z) := m^{-1}(x, t, z) E(x, t, z) f(z) \quad (4.4)$$

диагональна при всех $(x, t) \in \Omega$, $|z| > R$. Обозначая m^{-1} через μ , получаем из (4.4), что $\Phi_x \Phi^{-1} = (\mu E)_x (\mu E)^{-1} = \mu_x \mu^{-1} + \mu U \mu^{-1}$. Подставляя сюда $U(x, t, z) = az + q(x, t)$ и $\mu(x, t, z) = I + \mu_1(x, t) z^{-1} + \dots$, получаем разложение функции $\Phi_x \Phi^{-1}$ в ряд Лорана по степеням z при фиксированных $(x, t) \in \Omega$:

$$\Phi_x \Phi^{-1}(x, t, z) = az + \{[\mu_1(x, t), a] + q(x, t)\} + \dots,$$

где многоточием обозначены отрицательные степени z . Так как разлагаемая в ряд функция диагональна, а коэффициент при z^0 внедиагонален, то последний равен нулю, т.е.

диагональная функция $\Phi_x \Phi^{-1} - az$ голоморфна и равна нулю в точке $z = \infty$. Поэтому, заменяя $m(x, t, z)$ на $m(x, t, z)r(x, t, z)$ для надлежащей диагональной функции $r(x, t, \cdot) \in \mathcal{D}$ (при этом равенство (4.3) останется справедливым, а Φ заменится на $r^{-1}\Phi$ согласно (4.4)), мы можем считать, что

$$\Phi_x \Phi^{-1} = az. \quad (4.5)$$

Дифференцируя равенство (4.4) по t и пользуясь тем, что $E_t E^{-1} = V$, мы аналогично получаем, что $\Phi_t \Phi^{-1} = \mu_t \mu^{-1} + \mu V \mu^{-1}$. Тем самым имеем

$$\{m \Phi_t \Phi^{-1} m^{-1}\}_+ = V, \quad (4.6)$$

где $\{\cdot\}_+$ — неотрицательная часть ряда Лорана. Рассмотрим функцию $S(x, t, z) := m(x, t, z)S_0(z)m^{-1}(x, t, z)$, где $S_0(z) := b + c_1 z^{-1} + \dots + c_j z^{-j}$. Из (4.4) и диагональности Φ следует, что функция $S = E f S_0 f^{-1} E^{-1}$ удовлетворяет соотношению (4.2), т.е. является сходящейся резольвентой решения q . В частности, при каждом фиксированном t из некоторой окрестности нуля к функции $S(x, t, z)$ применима следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Фиксируем диагональные матрицы $a, b \in gl(n, \mathbb{C})$, как в теореме 2, и гладкую внедиагональную функцию $q: J \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ на интервале $J = (-\delta, \delta)$. Пусть последовательность гладких функций $\varphi_k: J \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$, $k = 0, 1, 2, \dots$, такова, что $\varphi_0(x) \equiv b$ и формальный степенной ряд*

$$S(x, z) := \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) z^{-k}$$

удовлетворяет

$$S_x = [U, S], \quad U(x, z) := az + q(x). \quad (4.7)$$

Тогда найдутся диагональные матрицы $s_1, s_2, \dots \in gl(n, \mathbb{C})$ такие, что $\varphi_k = F_k(q)$ для всех $k = 1, 2, \dots$, где F_k суть дифференциальные полиномы, заданные последовательностью $a, b, s_1, s_2, \dots$ согласно теореме 2. При этом для каждого $l = 0, 1, 2, \dots$ имеет место равенство

$$\text{tr}(\varphi_0 + \varphi_1 z^{-1} + \varphi_2 z^{-2} + \dots)^l = \text{tr}(b + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2} + \dots)^l \quad (4.8)$$

формальных степенных рядов от z^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается стандартными рассуждениями, обычно используемыми для построения дифференциальных полиномов F_m из теоремы 2 (см., например, [38], гл. 9).

Из леммы 3 следует, что

$$S(x, t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k^{(t)}(q) z^{-k},$$

где дифференциальные полиномы $F_k^{(t)}$ заданы некоторой последовательностью $a, b, s_1(t), s_2(t), \dots$ диагональных матриц. Равенство (4.8) принимает вид

$$\operatorname{tr}(b + c_1 z^{-1} + \dots + c_j z^{-j})^l = \operatorname{tr}(b + s_1(t) z^{-1} + s_2(t) z^{-2} + \dots)^l,$$

откуда в силу диагональности всех участвующих матриц вытекает, что $s_k(t) \equiv c_k$ при $k = 1, 2, \dots, j$. Поэтому из определения (1.4) функции V получаем, что $\{z^j S(x, t, z)\}_+ = V(x, t, z)$. Последнее вместе с (4.6) означает, что $\{m(\Phi_t \Phi^{-1} - z^j S_0) m^{-1}\}_+ = 0$, т.е. диагональная функция $\Phi_t \Phi^{-1} - z^j S_0$ голоморфна и равна нулю в точке $z = \infty$. Кроме того, из (4.5) следует, что эта функция не зависит от x . Поэтому, заменяя $m(x, t, z)$ на $m(x, t, z)r(t, z)$ для надлежащей диагональной функции $r(t, \cdot) \in \mathcal{D}$, мы можем считать, что наряду с (4.5) выполнено равенство

$$\Phi_t \Phi^{-1} = z^j S_0(z) = bz^j + c_1 z^{j-1} + \dots + c_j. \quad (4.9)$$

Равенства (4.5) и (4.9) вместе с вытекающим из (4.4) условием нормировки $\Phi(0, 0, z) = I$ означают, что $\Phi(x, t, z) = e^{ax + (bz^j + c_1 z^{j-1} + \dots + c_j)t}$. Но тогда формула (4.4) дает решение задачи Римана из теоремы 2 в виде $\gamma_+ = E, \gamma_- = m$. Отсюда и, например, из (3.1) сразу следует, что $q = q_f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поясним значение термина “конечнозонные решения общего положения”. В работе [16], с. 227, решение $U(x, t, z), V(x, t, z)$ уравнений (1.5) называется конечнозонным, если существует рациональная по z функция $W(x, t, z)$, удовлетворяющая (4.1). Ясно, что здесь подразумевается какое-то условие невырожденности на W , поскольку функция $W(x, t, z) \equiv I$ удовлетворяет (4.1) для любых U, V . Полагая $G(z) = W(0, 0, z)$, можно рассмотреть следующие варианты условия невырожденности, в порядке возрастания их ограничительности: 1) алгебраическая кривая $\Gamma := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid \det(G(z) - wI) = 0\}$ имеет хотя бы одну неприводимую компоненту кратности меньше n , или, иными словами, $G(z) \not\equiv c(z)I$ для скалярной функции $c(z)$; 2) кривая Γ не имеет кратных компонент; 3) кривая Γ распадается на n различных голоморфных ветвей над проколотой окрестностью точки $z = \infty$; 4) все собственные значения матрицы $G(\infty)$ различны. В настоящей работе принято условие 3, в [12] – условие 4, а в [16], по-видимому, имеются в виду условия 1 и 2. Последнее из них слабее, чем условие 3, так как разрешает кривой Γ иметь точки ветвления над $z = \infty$. Однако из утверждения А леммы 2 вытекает, что условия 3 и 4 на самом деле задают один и тот же класс решений каждого из рассматриваемых уравнений (1.2). Можно предположить в качестве гипотезы, что тот же самый класс решений уравнения (1.2) задается и условиями 1, 2. Если это верно, то в формулировке теоремы 5 можно опустить слова “общего положения”.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если функция $f \in \mathcal{D}$ такова, что q_f есть конечнозонное решение общего положения для уравнения (1.2), то компоненты каждого столбца матрицы

$$\Psi(x, t, z) := \gamma_-(x, t, z) e^{ax + (bz^j + c_1 z^{j-1} + \dots + c_j)t} = \gamma_+(x, t, z) f(z), \quad (4.10)$$

поднятого на соответствующий ему лист кривой Γ , накрывающей CP^1 над проколотой окрестностью точки $z = \infty$, образуют базис в пространстве функций Бейкера–Ахиезера, отвечающих надлежащему дивизору на кривой Γ (прообразу точки $z = \infty$) и надлежащим полиномам от локального параметра z – диагональным компонентам матрицы $azx + (bz^j + c_1z^{j-1} + \dots + c_j)t$ (см. [16], с. 233–235). Поэтому можно рассматривать (4.10) как “матричнозначную функцию Бейкера–Ахиезера”. С другой стороны, если считать функцию $q = q_f$ известной, то функция (4.10) однозначно характеризуется условиями

а) $\Psi_x = (az + q)\Psi$;

б) $\Psi_t = (bz^j + F_1(q)z^{j-1} + \dots + F_j(q))\Psi$;

в) функция $\Psi(x, t, z)e^{-azx - (bz^j + c_1z^{j-1} + \dots + c_j)t}$ голоморфна в точке $z = \infty$ и принимает там значение I .

Обозначая функцию из условия “в” через $m(x, t, z) = I + m_1(x, t)z^{-1} + \dots$ и подставляя это разложение в условие “а” при фиксированном t , можно по индукции найти коэффициенты $m_k(x, t)$, $k = 1, 2, \dots$, с точностью до выбора на каждом шаге диагональных матриц, зависящих только от t , наподобие леммы 3. Вплоть до этого момента указанная конструкция (известная по крайней мере с момента выхода работы [28]) сохраняется и для произвольного решения $q : \Omega \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ уравнения (1.2). Но если не существует такой функции $f \in \mathcal{D}$, что $q = q_f$, то полученный степенной ряд, скажем, для $m(x, 0, z)$ будет иметь нулевой радиус сходимости при любом выборе упомянутых диагональных матриц. Если же $q = q_f$, то при подходящем выборе этих диагональных матриц ряд сходится к функции $\gamma_-^f(x, t, z)$, по которой легко восстановить и функцию Бейкера–Ахиезера (4.10). Поэтому вполне естественно называть решения $q = q_f$ уравнения (1.2), построенные в теореме 2, решениями со сходящейся функцией Бейкера–Ахиезера. Обсуждение затронутых здесь вопросов можно найти также в [8], теорема 4.3.1 и замечания 4.3.1, 4.3.2.

5. ЗАМЕЧАНИЯ О БЫСТРОУБЫВАЮЩЕМ СЛУЧАЕ

В этом разделе теоремы 1 и 4 сравниваются с их аналогами для быстроубывающего случая, опирающимися на теорему Гохберга–Крейна. Детали метода обратной задачи рассеяния для быстроубывающих потенциалов можно найти, например, в [26] (см. также [6], [7], [27] и указанную там литературу).

5.1. Прямое преобразование рассеяния. Пусть $a = -i \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) \in gl(n, \mathbb{C})$, где $a_1 > a_2 > \dots > a_n$. Рассмотрим произвольную внедиагональную функцию $q : \mathbb{R}_x^1 \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ из класса Шварца $S(\mathbb{R}^1)$ (т.е. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^k q^{(l)}(x) = 0$ для всех целых $k, l \geq 0$). При каждом $z \in \mathbb{R}$ дифференциальное уравнение $E_x = (az + q(x))E$ имеет единственную пару $GL(n, \mathbb{C})$ -значных решений $J_{\pm}(x, z)$, для которых

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} J_{\pm}(x, z)e^{-azx} = I.$$

Функции $J_{\pm}(x, z)$ называются решениями Йоста. Их отношение $S := J_+^{-1}J_-$ не зависит от x и задает отображение $S : \mathbb{R}_z^1 \rightarrow SL(n, \mathbb{C})$, называемое матрицей монодромии,

матрицей перехода или матрицей рассеяния потенциала q . Известно, что все верхние главные миноры матрицы $S(z)$ продолжаются до функций, непрерывных в замкнутой верхней полуплоскости $\overline{\Pi}_+ := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и голоморфных на открытой полуплоскости Π_+ , а нижние главные миноры аналогично продолжаются в нижнюю полуплоскость $\Pi_- := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$. Пусть множества Z_+ и Z_- состоят из всех точек $z \in \overline{\Pi}_+$ и $z \in \overline{\Pi}_-$, соответственно, в которых хотя бы один верхний и нижний, соответственно, главный минор матрицы $S(z)$ обращается в нуль. Положим $Z := Z_+ \cup Z_-$. Тогда для всех $z \in \mathbb{R} \setminus Z$ имеем (однозначно определенные) разложения Гаусса $S(z) = N_1(z)V_1(z) = V_2(z)N_2(z)$, где матрицы V_1 и V_2 верхнетреугольные, N_1 и N_2 нижнетреугольные и все диагональные элементы матриц V_1 и N_2 равны единице. Оказывается, что *подкрученные решения Йоста*

$$\begin{aligned} X_+(x, z) &:= J_-(x, z)V_1^{-1}(z) = J_+(x, z)N_1(z), \\ X_-(x, z) &:= J_-(x, z)N_2^{-1}(z) = J_+(x, z)V_2(z), \end{aligned} \quad (5.1)$$

также удовлетворяющие уравнению $E_x = (az + q(x))E$, при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^1$ продолжаются с прямой $\mathbb{R}_z^1$ до функций, непрерывных на $\overline{\Pi}_\pm \setminus Z_\pm$ и голоморфных на $\Pi_\pm \setminus Z_\pm$, соответственно. Данные рассеяния, задаваемые подкрученными функциями Йоста, характеризуются особенностями голоморфной $GL(n, \mathbb{C})$ -значной функции

$$\Phi(z) = \Phi_q(z) := X_-^{-1}(0, z)X_+(0, z) \quad \text{на} \quad \mathbb{C}_z^1 \setminus (\mathbb{R}_z^1 \cup Z_+ \cup Z_-). \quad (5.2)$$

Эти особенности распадаются на три непересекающихся класса: 1) *спектральные особенности*, отвечающие точкам из $\mathbb{R}_z^1 \cap Z$; 2) *дискретная часть*, отвечающая невещественным точкам Z (при этом сами дискретные данные рассеяния описывают структуру особенностей функций Йоста $X_\pm(0, z)$ в этих точках); 3) *непрерывная часть*, отвечающая точкам $\mathbb{R}_z^1 \setminus Z$, причем сами непрерывные данные рассеяния описываются скачком

$$C(z) := X_-^{-1}(0, z)X_+(0, z), \quad z \in \mathbb{R}^1 \setminus Z, \quad (5.3)$$

решений (5.1) вдоль $\mathbb{R}_z^1$. Обычно ограничиваются так называемыми *регулярными* потенциалами $q \in S(\mathbb{R}_x^1)$, для которых первое множество пусто, а второе множество конечно и состоит только из нулей и полюсов общего положения. Аналитические свойства данных рассеяния регулярных потенциалов $q \in S(\mathbb{R}_x^1)$ определяются включением $\Phi_q \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$, где $\mathcal{D}^{\text{rd}}$ есть некоторое множество мероморфных функций $f: \mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, которое можно рассматривать как *аналог пространства $\mathcal{D}$ для быстроубывающих потенциалов*. Не давая полного определения множества $\mathcal{D}^{\text{rd}}$, приведем лишь некоторые свойства его элементов f , чтобы проиллюстрировать разницу между $\mathcal{D}^{\text{rd}}$ и $\mathcal{D}$:

- 1) множество особых точек f на $\mathbb{C}^1 \setminus \mathbb{R}^1$ конечно;
- 2) существуют матрицы $\psi_1^\pm, \psi_2^\pm, \dots \in gl(n, \mathbb{C})$ такие, что при $\Pi_\pm \ni z \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические разложения $f(z) \sim I + \psi_1^\pm z^{-1} + \psi_2^\pm z^{-2} + \dots$, т.е.

$$\lim_{\Pi_\pm \ni z \rightarrow \infty} z^k (f(z) - I - \psi_1^\pm z^{-1} - \dots - \psi_k^\pm z^{-k}) = 0$$

для всех целых $k \geq 0$;

3) предельные значения $f_{\pm}(r) := \lim_{s \rightarrow 0+} f(r \pm is)$ существуют для всех $r \in \mathbb{R}^1$ и задают C^∞ -отображения $f_{\pm}: \mathbb{R}_z^1 \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, причем $\lim_{|r| \rightarrow \infty} f_{\pm}(r) = I$.

Отметим, что пересечение $\mathcal{D}^{\text{rd}} \cap \mathcal{D}$ состоит из тех и только тех функций $f \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$, которые голоморфны в окрестности точки $z = \infty$. В частности, оно содержит все рациональные $GL(n, \mathbb{C})$ -значные функции $f(z)$ с $f(\infty) = I$, не имеющие особенностей на вещественной оси.

5.2. Обратное преобразование рассеяния. Опишем процедуру восстановления регулярного потенциала $q \in S(\mathbb{R}^1)$ по его данным рассеяния $f := \Phi_q \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$, считая для простоты, что функция f голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Рассмотрим при каждом $x \in \mathbb{R}^1$ следующую задачу о факторизации со скачком вдоль $\mathbb{R}_z^1$: найти голоморфные отображения $m_{\pm}(x, \cdot): \Pi_{\pm} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$, нормированные условием $\lim_{z \rightarrow \infty} m_{\pm}(x, z) = I$, граничные значения которых на $\mathbb{R}_z^1$ удовлетворяют

$$m_{-}^{-1}(x, z)m_{+}(x, z) = E_0(x, z)C(z)E_0^{-1}(x, z) \quad \text{для всех } z \in \mathbb{R}^1, \quad (5.4)$$

где $E_0(x, z) := e^{azx}$, а $C(z) := f_{-}^{-1}(z)f_{+}(z)$ есть скачок функции f вдоль $\mathbb{R}_z^1$ (ср. с (5.3)). Из формул (5.1) вытекает, что задача факторизации (5.4) разрешима при каждом $x \in \mathbb{R}^1$: ее решением является пара функций $m_{\pm}(x, z) = X_{\pm}(x, z)e^{-azx}$, которую можно рассматривать как единый элемент $m(x, \cdot) \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$. Зная асимптотическое поведение $m(x, z)$ в точке $z = \infty$, можно восстановить q по формуле

$$q(x) = \lim_{z \rightarrow \infty} z[m(x, z), a]. \quad (5.5)$$

Если функция f принадлежит $\mathcal{D}^{\text{rd}} \cap \mathcal{D}$ и голоморфна на $\mathbb{C}_z^1 \setminus \mathbb{R}_z^1$, то задача Римана (5.4) совпадает с применявшейся в теореме 2 задачей Римана $e^{azx}f^{-1}(z) = \gamma_{-}^{-1}(x, 0, z)\gamma_{+}(x, 0, z)$, а формула (5.5) совпадает с определением (1.1) функции $q_f(x, 0)$. Действительно, функция $m(x, \cdot)$ класса $\mathcal{D}^{\text{rd}} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{O}(\mathbb{C}_z^1 \setminus \mathbb{R}_z^1)$ удовлетворяет равенству $e^{azx}f^{-1}(z) = m^{-1}(x, z)E(x, z)$ для некоторой целой функции $E(x, \cdot): \mathbb{C} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда ее скачок $m_{-}^{-1}(x, z)m_{+}(x, z)$ вдоль $\mathbb{R}_z^1$ удовлетворяет равенству (5.4).

Обратимся теперь к случаю, когда про заданную функцию $f \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$ заранее не известно, существует ли регулярный потенциал q такой, что $f = \Phi_q$. Обозначим через $\Omega^{\text{rd}}(f)$ множество всех $x \in \mathbb{R}^1$, для которых разрешима задача Римана (5.4). Пользуясь решением $m(x, \cdot) \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$ этой задачи, определим внедиагональную функцию $q: \Omega^{\text{rd}}(f) \rightarrow gl(n, \mathbb{C})$ по формуле (5.5). Основной результат об обратном преобразовании рассеяния состоит в том, что если $\Omega^{\text{rd}}(f) = \mathbb{R}^1$, то $\Phi_q = fr^{-1}$ для некоторой диагональной функции $r \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$ (на самом деле $r(z) = \lim_{x \rightarrow -\infty} m(x, z)$). С другой стороны, если функции $f_1, f_2 \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$ отличаются лишь умножением справа на диагональную функцию из $\mathcal{D}^{\text{rd}}$, то соответствующие им потенциалы q_1, q_2 совпадают. Таким образом, мы приходим к картине, подобной приведенной в утверждении А теоремы 4: *регулярные потенциалы $q \in S(\mathbb{R}^1)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами $f \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$, удовлетворяющими $\Omega^{\text{rd}}(f) = \mathbb{R}^1$, по модулю умножения справа на диагональный элемент из $\mathcal{D}^{\text{rd}}$* . Приведенное описание обратного преобразования рассеяния

является аналогом теоремы 2 для случая $a = -i \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n)$, $a_1 > a_2 > \dots > a_n$, и $b = c_1 = c_2 = \dots = 0$. Оно позволяет построить быстроубывающие решения и для уравнений (1.2) с $b \neq 0$, $c_1 = c_2 = \dots = 0$, заменяя функцию e^{axz} в задаче факторизации (5.4) на функцию $e^{axz + bz^j t}$.

5.3. Унитарное условие вещественности. Если $f \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$ удовлетворяет унитарному условию вещественности $f(z)f(\bar{z})^* \equiv I$, то $\Omega^{\text{rd}}(f) = \mathbb{R}^1$. Действительно, из этого условия вытекает, что $f_-^{-1}(z) = f_+^*(z)$ для всех $z \in \mathbb{R}$. Поэтому правая часть $\gamma := E_0 C E_0^{-1}$ равенства (5.4) может быть записана в виде $\gamma = E_0 f_+^* f_+ E_0^*$ при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^1$ (равенство $E_0^{-1} = E_0^*$ вытекает из косоэрмитовости матрицы a). В частности, имеем $\gamma = \gamma^* \geq 0$ на $\mathbb{R}_z^1$. Тогда по теореме Гохберга–Крейна (переформулированной для $GL(n, \mathbb{C})$ -значных функций на $\mathbb{R}^1$ вместо S^1) задача Римана (5.4) разрешима при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^1$, что и требовалось доказать. Сравнивая это рассуждение с теоремой 1, мы видим, что унитарное условие вещественности $f(z)f(\bar{z})^* \equiv I$ имеет теперь совершенно другой смысл: оно выражает симметрию относительно носителя данных факторизации.

5.4. Итоговое замечание. В общих чертах обратное преобразование рассеяния для быстроубывающих потенциалов весьма похоже на конструкцию из теоремы 2: разница только в выборе пространств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^{\text{rd}}$, элементами которых являются данные рассеяния. Эти пространства имеют большое пересечение, содержащее, в частности, данные рассеяния, отвечающие произвольным многосолитонным решениям. Однако общие элементы $f \in \mathcal{D}^{\text{rd}}$ не обязаны быть голоморфными на бесконечности (так что функция q_f может не быть глобально мероморфной), а общие элементы из $\mathcal{D}$ не обязаны иметь почти все особенности на $\mathbb{R}^1$ (так что функция q_f может не стремиться к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$). Отношение между двумя указанными вариантами метода обратной задачи рассеяния похоже на отношение между двумя подходами к построению решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на $\mathbb{R}^N$: в первом подходе используются степенные ряды, во втором – преобразование Фурье.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6

Фиксируем $t \in \mathbb{C}$ так, что $(0, t) \in \Omega(f)$. Положим $g(z) := \gamma_-(0, t, z) \in \mathcal{D}$. Тогда для всех $(x, t) \in \Omega(f)$ задача Римана $e^{axz} g^{-1}(z) = (\gamma_-^g)^{-1}(x, 0, z) \gamma_+^g(x, 0, z)$ имеет решение

$$\gamma_-^g(x, 0, z) = \gamma_-(x, t, z), \quad \gamma_+^g(x, 0, z) = \gamma_+(x, t, z) \gamma_+^{-1}(0, t, z).$$

Отсюда в силу (1.1) или (3.1) вытекает, что $q_f(x, t) = q_g(x, 0)$.

Обратно, пусть для данного $t \in \mathbb{C}$ мы нашли функцию $g \in \mathcal{D}$ такую, что $q_f(x, t) = q_g(x, 0)$ на некотором открытом подмножестве в $\mathbb{C}_x^1$. По теореме 3, независимо от того, принадлежит точка $(0, t)$ множеству $\Omega(f)$ или нет, существует $\delta > 0$ такое, что $\Omega(f)$ содержит все точки (x, t) с $0 < |x| < \delta$. По теореме единственности для дифференциальных уравнений из (3.1) заключаем, что при $0 < |x| < \delta$ и $z \in \mathbb{C}$ имеем $\gamma_+^f(x, t, z) = \gamma_+^g(x, 0, z) M(z)$ для некоторой функции $M: \mathbb{C} \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$. Отсюда вытекает, что функция M голоморфна. Тем самым функция $(x, z) \mapsto \gamma_+^f(x, t, z)$ становится голоморфной на

области $B \times \mathbb{C}_z^1$, где $B := \{x \in \mathbb{C} \mid |x| < \delta\}$, если положить ее равной $M(z)$ при $x = 0$. Тогда равенство

$$e^{axx+(bz^j+c_1z^{j-1}+\dots+c_j)t}f^{-1}(z) = (\gamma_-^f)^{-1}(x, t, z)\gamma_+^f(x, t, z), \quad (6.1)$$

справедливое при $0 < |x| < \delta$ и $R < |z| < \infty$, позволяет голоморфно продолжить функцию $x \mapsto \gamma_-^f(x, t, z)$ в точку $x = 0$ при каждом таком z . Покажем, что функция $z \mapsto \gamma_-^f(0, t, z)$, определяемая равенством (6.1) при $R < |z| < \infty$ и доопределяемая значением I при $z = \infty$, принадлежит $\mathcal{D}$. Тогда равенство (6.1) даст требуемое включение $(0, t) \in \Omega(f)$.

Достаточно проверить, что функция $\varphi(x, z) := \gamma_-^f(x, t, z)$ голоморфна на $B \times D_-$, где $D_- = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \cup \{\infty\}$. Но это вытекает из классической теоремы Хартогса (см., например, [39], гл. III, § 11, п. 32, теорема 1), поскольку функция φ голоморфна на $B \setminus \{0\} \times D_-$ (по определению) и голоморфно продолжается на $B \times \Delta$ для любого круга $\Delta \subset D_- \setminus \{\infty\}$ (согласно (6.1)).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Последние два абзаца доказательства были бы излишними, если бы было известно, что каждая точка $(x_0, t_0) \in \mathbb{C}^2 \setminus \Omega(f)$ есть неустранимая особенность (полюс) мероморфной функции $x \mapsto q_f(x, t_0)$.

Благодарности. Автор выражает искреннюю благодарность А. Б. Шабату, А. Г. Сергееву, А. Т. Хаклберри и Р. Кобаяши за их поддержку и интерес к работе. Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 04-01-00236, 05-01-00981 и Президентской программы поддержки ведущих научных школ НШ-2040.2003.1.

Список литературы

- [1] *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968; *Н. П. Векуа.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.
- [2] *З. Прёсдорф.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.
- [3] *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* УМН. 1958. Т. 13. № 2. С. 3–72.
- [4] *А. Н. Паршин.* К главе X “Проблема Римана в теории функций комплексного переменного”. В сб.: Д. Гильберт. Избранные труды. Т. II. М.: Факториал, 1998. С. 535–538.
- [5] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1979. Т. 13. № 3. С. 13–22.
- [6] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов. Метод обратной задачи рассеяния. М.: Наука, 1980.
- [7] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [8] *А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский.* Интегрируемые системы: Теоретико-групповой подход. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [9] *Yu. L. Rodin.* Physica D. 1987. V. 24. P. 1–53; *A. R. Its.* Notices Amer. Math. Soc. 2003. V. 50. P. 1389–1400.
- [10] *M. Sato.* RIMS Kokyuroku. 1981. V. 439. P. 30–46.
- [11] *G. B. Segal, G. Wilson.* Publ. Math. IHES. 1985. V. 61. P. 5–65; *Э. Прессли, Г. Сигал.* Группы петель. М.: Мир, 1990.
- [12] *G. Haak, M. Schmidt, R. Schrader.* Rev. Math. Phys. 1992. V. 4. P. 451–499.

- [13] *G. Wilson*. The τ -functions of the $\mathfrak{g}$ AKNS equations. In: Integrable Systems: The Verdier Memorial Conference (Luminy, France, July 1–5, 1991). Progr. in Math. V. 115. Eds. O. Babelon, P. Cartier, Y. Kosmann-Schwarzbach. Basel: Birkhäuser, 1993. P. 131–145.
- [14] *D. H. Sattinger, J. S. Szmigielski*. Physica D. 1993. V. 64. P. 1–34.
- [15] *C.-L. Terng, K. Uhlenbeck*. Commun. Pure Appl. Math. 2000. V. 53. P. 1–75.
- [16] *Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков*. Интегрируемые системы. I. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. Динамические системы-4. Ред. В. И. Арнольд, С. П. Новиков. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179–285.
- [17] *И. М. Кривевер*. ДАН СССР. 1980. Т. 253. С. 288–292.
- [18] *И. М. Кривевер*. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 23. Ред. С. П. Новиков, Б. А. Дубровин, Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1983. С. 79–136.
- [19] *И. В. Чередник*. ДАН СССР. 1982. Т. 266. С. 593–597.
- [20] *С. П. Новиков*. Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8. № 3. С. 54–66.
- [21] *A. G. Reiman, M. A. Semenov-Tian-Shansky*. Invent. Math. 1981. V. 63. P. 423–432.
- [22] *F. Gesztesy, W. Karwowski, Z. Zhao*. Duke Math. J. 1992. V. 68. № 1. P. 101–150.
- [23] *A. Degasperis, A. Shabat*. ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 230–247.
- [24] *V. Yu. Novokshenov*. Physica D. 1995. V. 87. P. 109–114.
- [25] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат*. ЖЭТФ. 1971. Т. 61. № 1. С. 118–134.
- [26] *А. Б. Шабат*. Дифф. уравнения. 1979. Т. 15. С. 1824–1834.
- [27] *X. Zhou*. Zakharov–Shabat inverse scattering. In: Scattering. Eds. R. Pike, P. Sabatier. San Diego: Academic Press, 2002. P. 1707–1716.
- [28] *И. М. Кривевер*. Функц. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. № 1. С. 15–31.
- [29] *Ю. Лайтерер*. Голоморфные векторные расслоения и принцип Ока–Грауэрта. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 10. Комплексный анализ – многие переменные – 4. Ред. С. Г. Гиндикин, Г. М. Хенкин. М.: ВИНТИ, 1986. С. 75–121.
- [30] *K. Uhlenbeck*. J. Differ. Geom. 1989. V. 30. P. 1–50.
- [31] *Э. Прессли, Г. Сигал*. Группы петель. М.: Мир, 1990.
- [32] *Ф. Муссо, А. Б. Шабат*. ТМФ. 2005. Т. 144. № 1. С. 143–152; nlin.SI/0502006.
- [33] *А. В. Домрин*. Докл. РАН. 2003. Т. 390. С. 301–303.
- [34] *Б. А. Дубровин*. Матричные конечнозонные операторы. В сб.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1983. С. 33–78.
- [35] *D. Wu*. Inverse Problems. 2002. V. 18. P. 95–109.
- [36] *I. McIntosh*. Nonlinearity. 1994. V. 7. P. 85–108.
- [37] *T. Kato*. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [38] *L. A. Dickey*. Soliton Equations and Hamiltonian Systems. Singapore: World Scientific, 1991.
- [39] *Б. В. Шабат*. Введение в комплексный анализ. Т. II. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 17.1.2005 г.