Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Жао, К. Ху, Х. Там, Применение метода пфаффианизации к двумерной цепочке Лезнова, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 3, 484–491

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1872>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 13:05:06

© 2005 г. Ю.-К. Жао^{*†}, К.-Б. Ху^{*}, Х.-В. Там[‡]

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПФАФФИАНИЗАЦИИ К ДВУМЕРНОЙ ЦЕПОЧКЕ ЛЕЗНОВА

Для двумерной цепочки Лезнова получены детерминантные решения в терминах вронскианов и граммианов. С использованием метода пфаффианизации Хироты–Охты построен пфаффианизированный вариант данной цепочки Лезнова. Дано явное пфаффианное решение граммианова типа для построенной пфаффианизированной системы.

Ключевые слова: пфаффианизация, солитонные решения, граммиан, вронскиан, цепочка Лезнова.

1. ВВЕДЕНИЕ

В начале 1990-х годов Хирота и Охта разработали метод построения новых связанных систем уравнений на основе иерархии Кадомцева–Петвиашвили (КП) [1], [2], называемый в настоящее время методом пфаффианизации. Эти пфаффианизированные уравнения могут рассматриваться как связанные системы исходных уравнений; они обладают солитонными решениями, которые выражаются через пфаффианы. Данный метод был успешно применен к уравнениям Дэви–Стюартсона [3], самодуальному уравнению Янга–Миллса [4], дискретному уравнению КП [5], двумерной цепочке Тоды [6] и т.д. Кроме того, Гилсон [7] обобщил также все уравнения билинейной иерархии КП до их пфаффианизированного вида.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы применить метод пфаффианизации к двумерной цепочке Лезнова. Грубо говоря, пфаффианизация представляет собой процедуру для обобщения некоторых специальных билинейных систем уравнений с детерминантными решениями до уравнений с пфаффианными решениями. Работа построена следующим образом. В разделе 2 рассматриваются детерминантные решения типа вронскианов и граммианов для двумерной цепочки Лезнова. В разделе 3 посредством процедуры пфаффианизации построен пфаффианизированный вариант двумерной цепочки Лезнова. В разделе 4 в явном виде представлено пфаффианное решение граммианова

^{*}Institute of Computational Mathematics and Scientific Engineering Computing, AMSS, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China. E-mail: zhjx@amss.ac.cn

[†]Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing, China

[‡]Department of Computer Science, Hong Kong Baptist University Kowloon Tong, Hong Kong, China

типа пфаффианизированной системы. Наконец, раздел 5 содержит заключительные замечания и выводы.

2. ДЕТЕРМИНАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ЛЕЗНОВА

В данном разделе представлены детерминантные решения типа вронскианов и граммианов для двумерной цепочки Лезнова. Рассматриваемая цепочка Лезнова задается следующей системой уравнений [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \theta(n) &= \theta(n+1)p(n+1) - 2\theta(n)p(n) + \theta(n-1)p(n-1), \\ \frac{\partial p(n)}{\partial y} &= \theta(n+1) - \theta(n-1), \end{aligned} \quad (1)$$

которая возникает как специальный случай так называемой U-системы Тоды $UT(m_1, m_2)$ при $m_1 = 1, m_2 = 2$. Вводя дополнительную переменную z и используя следующее преобразование для зависимых переменных:

$$\theta(n) = \frac{f(n+1)f(n-1)}{f(n)^2}, \quad p(n) = \frac{1}{2} \frac{D_x D_y f(n) \cdot f(n)}{f(n+1)f(n-1)},$$

можно переписать уравнения (1) в билинейном виде [9]:

$$(D_y D_z - 2(e^{D_n} - 1))f(n) \cdot f(n) = 0, \quad (2)$$

$$(D_y D_x - 2D_z e^{D_n})f(n) \cdot f(n) = 0, \quad (3)$$

где билинейный дифференциальный оператор Хироты $D_y^m D_t^k$ и билинейный разностный оператор $\exp(\delta D_n)$ определяются соответственно выражениями [10]

$$\begin{aligned} D_y^m D_t^k a \cdot b &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^k a(y, t) b(y', t') \Big|_{y'=y, t'=t}, \\ \exp(\delta D_n) a(n) \cdot b(n) &\equiv \exp \left[\delta \left(\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n'} \right) \right] a(n) b(n') \Big|_{n'=n} = a(n+\delta) b(n-\delta). \end{aligned}$$

2.1. Решения в виде вронскианов для цепочки Лезнова. Покажем теперь, что N -солитонные решения системы (2), (3) могут быть записаны в компактном виде с использованием определителя Вронского

$$f^W(n) = \begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) & \cdots & \phi_1(n+N-1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) & \cdots & \phi_2(n+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(n) & \phi_N(n+1) & \cdots & \phi_N(n+N-1) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где функции $\phi_j(n) = \phi_j(y, z, x, n)$, $j = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяют дисперсионным соотношениям

$$\frac{\partial \phi_j(n)}{\partial y} = \phi_j(n+1), \quad \frac{\partial \phi_j(n)}{\partial z} = -\phi_j(n-1), \quad \frac{\partial \phi_j(n)}{\partial x} = -\phi_j(n-2). \quad (5)$$

Для упрощения записи введем следующее удобное обозначение:

$$\begin{vmatrix} \phi_1(n) & \phi_1(n+1) & \cdots & \phi_1(n+N-1) \\ \phi_2(n) & \phi_2(n+1) & \cdots & \phi_2(n+N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(n) & \phi_N(n+1) & \cdots & \phi_N(n+N-1) \end{vmatrix} \equiv |0, 1, \dots, N-1|.$$

Тогда вронскиан $f^W(n)$ записывается в виде

$$f^W(n) = |0, 1, \dots, N-1|.$$

Используя дисперсионные соотношения (5), получаем

$$\begin{aligned} f^W(n+1) &= |1, 2, \dots, N|, & f^W(n-1) &= |-1, 0, \dots, N-2|, \\ \frac{\partial f^W(n)}{\partial y} &= |0, 1, \dots, N-2, N|, & \frac{\partial f^W(n+1)}{\partial z} &= -|0, 2, \dots, N|, \\ \frac{\partial f^W(n-1)}{\partial z} &= -|-2, 0, \dots, N-2|, \\ \frac{\partial^2 f^W(n)}{\partial y \partial z} &= -|-1, 1, \dots, N-2, N| - |0, 1, \dots, N-1|, \\ \frac{\partial^2 f^W(n)}{\partial y \partial x} &= -|-2, 1, \dots, N-2, N| + |-1, 0, 2, \dots, N-2, N|, \\ \frac{\partial f^W(n)}{\partial x} &= -|-2, 1, \dots, N-1| + |-1, 0, 2, \dots, N-1|. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя эти выражения в билинейное уравнение (2), т.е.

$$\frac{\partial^2 f(n)}{\partial y \partial z} f(n) - \frac{\partial f(n)}{\partial y} \frac{\partial f(n)}{\partial z} - f(n+1)f(n-1) + f(n)^2 = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} &|-1, 0, \dots, N-2| \times |1, 2, \dots, N| - |-1, 1, \dots, N-1| \times |0, 1, \dots, N-2, N| + \\ &+ |-1, 1, \dots, N-2, N| \times |0, 1, \dots, N-1| = 0. \end{aligned}$$

Последнее выражение – не что иное, как соотношение Плюккера для детерминантов. Аналогично можно показать, что уравнение (3) с помощью формул (4) и (6) также сводится к тождеству Плюккера. Таким образом, мы убедились, что цепочка Лезнова (2) и (3) обладает детерминантными решениями в виде вронскианов.

2.2. Решения в виде граммианов для цепочки Лезнова. Ниже будет показано, что N -солитонное решение для двумерной цепочки Лезнова (2), (3) может также быть представлено в компактном виде с использованием определителя Грамма.

Покажем, что цепочка Лезнова (2), (3) обладает решением $f^G(n)$ в виде граммиана

$$f^G(n) = \left| c_{i,j} + (-1)^n \int^y \phi_i^{(n)} \psi_j^{(-n)} dy \right|_{1 \leq i,j \leq N}, \quad (7)$$

где $c_{i,j}$ – константы, а функции $\phi_j^{(n)}, \psi_j^{(-n)}, j = 1, 2, \dots, N$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j^{(n)}}{\partial y} &= \phi_j^{(n+1)}, & \frac{\partial \phi_j^{(n)}}{\partial z} &= -\phi_j^{(n-1)}, & \frac{\partial \phi_j^{(n)}}{\partial x} &= -\phi_j^{(n-2)}, \\ \frac{\partial \psi_j^{(-n)}}{\partial y} &= \psi_j^{(-n+1)}, & \frac{\partial \psi_j^{(-n)}}{\partial z} &= -\psi_j^{(-n-1)}, & \frac{\partial \psi_j^{(-n)}}{\partial x} &= \psi_j^{(-n-2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Известно, что любой детерминант может быть выражен с помощью пфаффиана [2]. Выразим граммиан (7) через следующий пфаффиан:

$$\begin{aligned} f^G(n) &= (1, 2, \dots, N, N^*, \dots, 2^*, 1^*), \\ (i, j^*) &= c_{i,j} + (-1)^n \int^y \phi_i^{(n)} \psi_j^{(-n)} dy, \quad (i, j) = (i^*, j^*) = 0. \end{aligned}$$

Используя соотношения (8), можно вывести формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f^G(n) &= (d_{-n}, d_n^*, \cdot), & \frac{\partial}{\partial z} f^G(n) &= (d_{-n-1}, d_{n-1}^*, \cdot), \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f^G(n) &= (d_{-n-1}, d_n^*, \cdot) - (d_{-n}, d_{n-1}^*, \cdot) + (d_{-n-1}, d_{n-1}^*, d_{-n}, d_n^*, \cdot), \\ \frac{\partial}{\partial x} f^G(n) &= (d_{-n-2}, d_{n-1}^*, \cdot) + (d_{-n-1}, d_{n-2}^*, \cdot), \\ f^G(n+1) &= (\cdot) + (d_{-n-1}, d_n^*, \cdot), & f^G(n-1) &= (\cdot) - (d_{-n}, d_{n-1}^*, \cdot), \\ \frac{\partial}{\partial z} f^G(n+1) &= (d_{-n-2}, d_n^*, \cdot), & \frac{\partial}{\partial z} f^G(n-1) &= (d_{-n}, d_{n-2}^*, \cdot), \end{aligned} \quad (9)$$

где введено обозначение $\{1, \dots, N, N^*, \dots, 1^*\} = \{\cdot\}$, а d -операторы определены следующим образом:

$$(d_{-n}, j^*) = (-1)^n \psi_j^{(-n)}, \quad (d_n^*, j) = \phi_j^{(n)}, \quad (d_{-n}, j) = (d_n^*, j^*) = (d_{-n}, d_m) = 0.$$

Подставляя выражения (9) в левую часть билинейного уравнения (3), имеем

$$\begin{aligned} f(n) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(n) - \frac{\partial}{\partial y} f(n) \frac{\partial}{\partial x} f(n) - f(n-1) \frac{\partial}{\partial z} f(n+1) + f(n+1) \frac{\partial}{\partial z} f(n-1) = \\ = [(\cdot)(d_{-n}, d_n^*, d_{-n-2}, d_{n-1}^*, \cdot) - (d_{-n}, d_n^*, \cdot)(d_{-n-2}, d_{n-1}^*, \cdot) + \\ + (d_{-n}, d_{n-1}^*, \cdot)(d_{-n-2}, d_n^*, \cdot)] + [(\cdot)(d_{-n}, d_n^*, d_{-n-1}, d_{n-2}^*, \cdot) - \\ - (d_{-n}, d_n^*, \cdot)(d_{-n-1}, d_{n-2}^*, \cdot) + (d_{-n}, d_{n-2}^*, \cdot)(d_{-n-1}, d_n^*, \cdot)]. \end{aligned}$$

С учетом тождества Якоби для детерминантов последнее выражение равно нулю, т.е. $f^G(n)$ удовлетворяет уравнению (3). Аналогично можно показать, что $f^G(n)$ удовлетворяет уравнению (2). Таким образом, цепочка Лезнова (2), (3) обладает детерминантным решением в виде граммиана.

3. ПФАФФИАНИЗОВАННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ ЦЕПОЧКИ ЛЕЗНОВА

Получим пфаффианизованную систему для цепочки Лезнова (2), (3). Для этого, прежде всего, обратимся к квадратичным тождествам для пфаффианов, аналогичным тождеству Якоби. Здесь нам потребуется тождество в следующем виде [1], [2]:

$$\begin{aligned} & \text{pf}(a_1, a_2, a_3, a_4, 1, \dots, 2n) \text{pf}(1, \dots, 2n) - \text{pf}(a_1, a_2, 1, \dots, 2n) \text{pf}(a_3, a_4, 1, \dots, 2n) + \\ & + \text{pf}(a_1, a_3, 1, \dots, 2n) \text{pf}(a_2, a_4, 1, \dots, 2n) - \\ & - \text{pf}(a_1, a_4, 1, \dots, 2n) \text{pf}(a_2, a_3, 1, \dots, 2n) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что это тождество состоит из четырех членов вместо трех, как в простейшем тождестве Якоби для детерминантов.

Приступим к пфаффианизации цепочки Лезнова. В разделе 2 было показано, что цепочка Лезнова (2), (3) обладает солитонными решениями как в виде определителя Вронского, так и в виде определителя Грама. В этом разделе мы сначала заменим детерминантное решение в виде вронскиана на пфаффианы вронскианова типа и представим пфаффианизованную систему цепочки Лезнова. Затем мы покажем, что пфаффианизованная система также обладает решениями, выражающимися через пфаффианы грамианова типа.

3.1. Пфаффианизация цепочки Лезнова. Рассмотрим следующие пфаффианы вронскианова типа:

$$f(n) = (1, 2, \dots, N)_n, \quad N \text{ четное,}$$

входы которых удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(i, j)_n &= (i+1, j)_n + (i, j+1)_n, & \frac{\partial}{\partial z}(i, j)_n &= -(i-1, j)_n - (i, j-1)_n, \\ \frac{\partial}{\partial x}(i, j)_n &= -(i-2, j)_n - (i, j-2)_n, & (i, j)_{n+1} &= (i+1, j+1)_n, \end{aligned}$$

где для пфаффиана $\text{pf}(1, 2, \dots, N-1, N)$ использовано обозначение $(1, 2, \dots, N-1, N)_n$. Тогда можно получить следующие формулы:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= (2, 3, \dots, N, N+1), & f(n-1) &= (0, 1, \dots, N-2, N-1), \\ \frac{\partial}{\partial y}f(n) &= (1, 2, \dots, N-1, N+1), & \frac{\partial}{\partial z}f(n) &= -(0, 2, \dots, N-1, N), \\ \frac{\partial}{\partial x}f(n) &= (0, 1, 3, \dots, N) - (-1, 2, \dots, N), \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}f(n) &= -(1, 2, \dots, N-1, N) - (0, 2, \dots, N-1, N+1), \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(n) &= (0, 1, 3, \dots, N-1, N+1) - (-1, 2, \dots, N-1, N+1). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (2), имеем

$$\begin{aligned} f(n) \frac{\partial^2 f(n)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f(n)}{\partial y} \frac{\partial f(n)}{\partial z} - f(n+1)f(n-1) + f^2(n) = \\ = -[(2, 3, \dots, N-1, 0, 1)(2, 3, \dots, N-1, N, N+1) - \\ - (2, 3, \dots, N-1, 0, N)(2, 3, \dots, N-1, 1, N+1) + \\ + (2, 3, \dots, N-1, 0, N+1)(2, 3, \dots, N-1, 1, N)]. \end{aligned}$$

С помощью тождества для пфаффианов (10) получаем

$$f(n) \frac{\partial^2 f(n)}{\partial y \partial z} - \frac{\partial f(n)}{\partial y} \frac{\partial f(n)}{\partial z} - f(n+1)f(n-1) + f^2(n) = -(2, \dots, N-1)(0, 1, \dots, N, N+1).$$

Выбирая $g(n) = (0, 1, \dots, N+1)$, $\hat{g}(n) = (2, \dots, N-1)$, имеем

$$(D_y D_z - 2(e^{D_n} - 1))f(n) \cdot f(n) = -2g(n)\hat{g}(n). \quad (11)$$

Аналогично выводим, что

$$\begin{aligned} (D_x D_y - 2D_z e^{D_n})f(n) \cdot f(n) &= 2D_z g(n) \cdot \hat{g}(n), \\ D_y e^{-D_n/2} g(n) \cdot f(n) &= -D_z e^{D_n/2} g(n) \cdot f(n), \\ D_y e^{-D_n/2} f(n) \cdot \hat{g}(n) &= -D_z e^{D_n/2} f(n) \cdot \hat{g}(n). \end{aligned} \quad (12)$$

Таким образом, уравнения (11), (12) составляют записанную в билинейном виде пфаффианизованную цепочку Лезнова. Используя билинейное тождество

$$D_y(D_z e^{D_n} a \cdot a) \cdot (e^{D_n} a \cdot a) = \text{sh}(D_n)(D_y D_z a \cdot a) \cdot a^2$$

и следующее преобразование для зависимых переменных:

$$\begin{aligned} \theta(n) &= \frac{f(n+1)f(n-1)}{f^2(n)}, & p(n) &= \frac{D_z e^{D_n} f(n) \cdot f(n)}{f(n+1)f(n-1)}, \\ v(n+1) &= \frac{g(n)}{f(n+1)}, & w(n-1) &= \frac{\hat{g}(n)}{f(n-1)}, \end{aligned}$$

можно преобразовать уравнения (11), (12) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} p(n) &= (1 - w(n)v(n+2))\theta(n+1) - (1 - w(n-2)v(n))\theta(n-1), \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \ln \theta(n) &= \theta(n+1)(1 + w(n)v(n+2))p(n+1) + \\ &+ \theta(n-1)(1 + w(n-2)v(n))p(n-1) - \\ &- 2\theta(n)(1 + w(n-1)v(n+1))p(n) + \frac{\partial w(n+1)}{\partial y} v(n+2) + \\ &+ 3 \frac{\partial w(n-1)}{\partial y} v(n) - 3 \frac{\partial v(n+1)}{\partial y} w(n) - \frac{\partial v(n-1)}{\partial y} w(n-2), \\ \theta(n)v(n+1)p(n) + \theta(n) \frac{\partial v(n+1)}{\partial z} - \frac{\partial v(n)}{\partial y} &= 0, \\ \theta(n)w(n-1)p(n) + \theta(n) \frac{\partial w(n-1)}{\partial z} - \frac{\partial w(n)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Фактически цепочка Лезнова может рассматриваться как редукция этих пфаффианизованных уравнений (11), (12) или (13). Будем называть пфаффианизованную систему (11), (12) или (13) связанной цепочкой Лезнова.

3.2. Пфаффианные решения граммианова типа для связанной цепочки Лезнова. Известно, что связанное уравнение КП, получаемое с помощью пфаффианизации, обладает решениями, выражаемыми через пфаффианы граммианова типа [2]. Можно ожидать, что представленная выше связанная система (11), (12) ведет себя подобным же образом и обладает решением вида

$$\begin{aligned} f(n) &= (1, 2, \dots, 2N)_n, \\ g(n) &= (d_{n-1}, d_n, 1, \dots, 2N)_n, \\ \hat{g}(n) &= (c_{-n-1}, c_{-n}, 1, \dots, 2N)_n. \end{aligned} \quad (14)$$

Каждый элемент пфаффиана определяется выражениями

$$\begin{aligned} (i, j)_n &= c_{ij} + (-1)^n \int^x (\phi_i^{(n)} \psi_j^{(-n)} - \phi_j^{(n)} \psi_i^{(-n)}) dx, \quad c_{ij} = -c_{ji}, \\ (d_n, i)_n &= \phi_i^{(n)}, \quad (c_{-n}, i)_n = (-1)^n \psi_i^{(-n)}, \quad (d_l, c_m)_n = (d_l, d_m)_n = (c_l, c_m)_n = 0, \end{aligned}$$

где величины $\phi_i^{(n)}$, $\psi_i^{(-n)}$ удовлетворяют уравнениям, таким же как (8). Таким образом, мы получаем следующие дифференциалы по x , s и разности по n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} f(n) &= (c_{-n}, d_n, *)_n, \quad \frac{\partial}{\partial z} f(n) = (c_{-n-1}, d_{n-1}, *)_n, \\ \frac{\partial}{\partial x} f(n) &= (c_{-n-2}, d_{n-1}, *)_n + (c_{-n-1}, d_{n-2}, *)_n, \\ \frac{\partial}{\partial z} f(n-1) &= (c_{-n}, d_{n-2}, *)_n, \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} f(n) &= (c_{-n-1}, d_n, *)_n - (c_{-n}, d_{n-1}, *)_n + (c_{-n-1}, d_{n-1}, c_{-n}, d_n, *)_n, \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(n) &= (c_{-n-2}, d_n, *)_n - (c_{-n}, d_{n-2}, *)_n + \\ &\quad + (c_{-n-2}, d_{n-1}, c_{-n}, d_n, *)_n + (c_{-n-1}, d_{n-2}, c_{-n}, d_n, *)_n, \\ f(n+1) &= (*)_n + (c_{-n-1}, d_n, *)_n, \quad f(n-1) = (*)_n - (c_{-n}, d_{n-1}, *)_n, \\ \frac{\partial}{\partial y} f(n+1) &= (c_{-n-1}, d_{n+1}, *)_n, \quad \frac{\partial}{\partial z} f(n+1) = (c_{-n-2}, d_n, *)_n, \end{aligned}$$

где использовано обозначение $\{*\} = \{1, 2, \dots, 2N\}$. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} g(n+1) &= (d_n, d_{n+1}, *)_n, \quad \frac{\partial}{\partial y} g(n) = (d_{n-1}, d_{n+1}, *)_n, \\ \frac{\partial}{\partial z} g(n) &= (d_n, d_{n-2}, *)_n, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}g(n+1) &= (d_{n+1}, d_{n-1}, *)_n + (d_n, d_{n+1}, c_{-n-1}, d_{n-1}, *)_n, \\ \hat{g}(n+1) &= (c_{-n-2}, c_{-n-1}, *)_n, \quad \frac{\partial}{\partial z}\hat{g}(n) = (c_{-n-2}, c_{-n}, *)_n, \\ \frac{\partial}{\partial y}\hat{g}(n+1) &= (c_{-n-2}, c_{-n-1}, c_{-n}, d_n, *)_n - (c_{-n-2}, c_{-n}, *)_n.\end{aligned}$$

С использованием приведенных выше выражений уравнение (11) сводится к тождеству для пфаффианов

$$\begin{aligned}(c_{-n-1}, d_{n-1}, c_{-n}, d_n, *)_n (*)_n - (c_{-n-1}, d_{n-1}, *)_n (c_{-n}, d_n, *)_n + \\ + (c_{-n-1}, c_{-n}, *)_n (d_{n-1}, d_n, *)_n - (c_{-n-1}, d_n, *)_n (d_{n-1}, c_{-n}, *)_n = 0.\end{aligned}$$

Это означает, что заданные выражениями (14) величины удовлетворяют уравнению (11). Аналогично можно показать, что эти величины удовлетворяют также уравнениям (12). Таким образом, связанная система (11), (12) обладает пфаффианным решением граммiana типа, которое дается формулами (14).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы представили детерминантные решения для двумерной цепочки Лезнова как вронскианова, так и граммiana типа. Основываясь на этих результатах, мы вывели пфаффианизованную систему для двумерной цепочки Лезнова. Мы показали, что аналогично связанному уравнению КП, полученному Хиротой и Охтой в работе [1], эта пфаффианизованная система также обладает решениями, выражающимися в виде пфаффианов граммiana типа.

Благодарности. Данная работа была частично поддержана National Natural Science Foundation of China (грант № 10471139), грантом CAS President, познавательной инновационной программой Institute of Computational Math., AMSS and Hong Kong RGC (грант № HKBU2016/03P).

Список литературы

- [1] *R. Hirota, Y. Ohta.* J. Phys. Soc. Japan. 1991. V. 60. P. 798–809.
- [2] *R. Hirota.* Direct Methods in Soliton Theory (in Japanese). Tokyo: Iwanami Shoten, 1992.
- [3] *K. P. Гилсон, Дж. Дж. К. Ниммо.* ТМФ. 2001. Т. 128. № 1. С. 43–55.
- [4] *Y. Ohta, J. J. C. Nimmo, C. R. Gilson.* Glasg. Math. J. A. 2001. V. 43. P. 99–108.
- [5] *C. R. Gilson, J. J. C. Nimmo, S. Tsujimoto.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 10569–10575.
- [6] *X.-B. Hu, J.-X. Zhao, W.-H. Tam.* J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 296. № 1. P. 256–261.
- [7] *K. P. Гилсон.* ТМФ. 2002. Т. 133. № 3. С. 405–418.
- [8] *А. Н. Лезнов.* ТМФ. 2000. Т. 122. № 2. С. 251–271.
- [9] *X.-B. Hu, H.-W. Tam.* Phys. Lett. A. 2000. V. 276. P. 65–72.
- [10] *Р. Хирота.* Прямые методы в теории солитонов. В сб.: Солитоны. Ред. Р. К. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 175–192.

Поступила в редакцию 6.Х.2004 г.