Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Ю. Шведов, О релятивистски-ковариантной квантово-полевой теории комплексного роста Маслова, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 3, 492–512

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1873>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 16:03:31

О РЕЛЯТИВИСТСКИ-КОВАРИАНТНОЙ КВАНТОВО-ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНОГО РОСТКА МАСЛОВА

Рассматривается явно ковариантная формулировка квантово-полевой теории комплексного ростка Маслова (квазиклассической теории поля) на примере скалярного поля. Основной объект теории – “квазиклассическое расслоение”, базой которого является множество классических состояний, слоями – пространства состояний квантовой теории во внешнем поле. Квазиклассические состояния, возникающие в теории комплексного ростка Маслова в точке и в теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком, изображаются точками и поверхностями на пространстве квазиклассического расслоения, соответственно. Сформулированы квазиклассические аналоги аксиом квантовой теории поля; установлена взаимосвязь ковариантной квазиклассической теории как с построенной ранее гамильтоновой формулировкой, так и с конструкциями аксиоматической теории поля: источниками Швингера, S -матрицей Боголюбова, R -функциями Лемана–Симанзика–Циммермана. Предложена новая ковариантная формулировка классической теории поля и схема квазиклассического квантования полей без использования постулата о замене скобок Пуассона на коммутаторы.

Ключевые слова: комплексный росток Маслова, аксиоматическая квантовая теория поля, S -матрица Боголюбова, подход Лемана–Симанзика–Циммермана, теория источников Швингера, скобки Пайерлса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квазиклассические методы играют важную роль в квантовой механике и теории поля. Наиболее последовательным подходом к квазиклассической механике является разработанная Масловым теория лагранжевых многообразий с комплексным ростком [1], [2]. Она основана на непосредственной подстановке предполагаемой волновой функции в уравнение Шредингера, допускает математически строгое обоснование (оценку погрешности) и включает в себя в качестве частных случаев другие квазиклассические методы, в частности подход Эренфеста, осцилляторное приближение, методы ВКБ и канонического оператора Маслова [3].

При переносе теории комплексного ростка Маслова на квантовую теорию поля следует учитывать специфику последней, связанную как с расходимостями, так и с релятивистской инвариантностью. При этом непосредственное применение методов Маслова

* Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: shvedov@qs.phys.msu.ru

возможно только в гамильтоновом подходе к теории поля, в котором на основе классического лагранжиана строится гамильтониан и ему с помощью процедуры канонического квантования сопоставляется уравнение Шредингера. Анализ расходимостей и релятивистской инвариантности в данном подходе затруднен.

Сведения из гамильтоновой квантово-полевой теории комплексного роста Маслова приведены в разделе 2. Рассматривается скалярное поле φ с лагранжианом, зависящим от малого параметра $\hbar$ (“постоянной Планка”) как

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{\hbar} V(\sqrt{\hbar} \varphi), \quad (1.1)$$

где потенциал самодействия $V(\Phi) \sim (m^2/2)\Phi^2$ при $\Phi \rightarrow 0$, и соответствующее ему уравнение Шредингера. Метод комплексного роста Маслова в точке [1], [2] (называемый также методом траекторно-когерентных состояний [4]) заключается в подстановке состояния вида [5], [6]

$$\Psi(t) = e^{(i/\hbar)\tilde{S}^t} \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{\hbar}} \int d\mathbf{x} [\Pi^t(\mathbf{x}) \hat{\varphi}(\mathbf{x}) - \Phi^t(\mathbf{x}) \hat{\pi}(\mathbf{x})] \right\} f^t \quad (1.2)$$

при $\hbar \rightarrow 0$ в уравнение Шредингера. Здесь $\tilde{S}^t$ – числовая вещественная функция времени, имеющая смысл классического действия на временном промежутке от 0 до t , $\Pi^t(\mathbf{x})$ и $\Phi^t(\mathbf{x})$ – классические функции пространственных переменных $\mathbf{x}$ и времени t , $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ и $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ – операторы поля и канонически сопряженного импульса, f^t – имеющий предел при $\hbar \rightarrow 0$ вектор состояния, зависящий от времени. Функции $\tilde{S}$, Π , Φ , f должны удовлетворять определенным соотношениям. В частности, для классических поля Φ и импульса Π получаются классические уравнения движения.

Помимо квазиклассической эволюции, в квазиклассической теории поля строятся преобразования Пуанкаре, операторы поля и другие структуры, необходимые для теории лагранжевых многообразий с комплексным ростом. Их перенормировка в главном порядке разложения рассмотрена в работе [7].

В отличие от гамильтонова подхода, аксиоматическое построение квантовой теории поля [8] в подходах Лемана–Симанзика–Циммермана (ЛСЦ) [9], Боголюбова [10] и Боголюбова–Медведева–Поливанова [11] основано на наиболее общих принципах: релятивистской ковариантности, унитарности и причинности. При этом вся теория строится явно ковариантным образом, что облегчает анализ расходимостей, особенно в высших порядках теории возмущений [10], [12], [13].

В п. 3.1 рассмотрена проблема квазиклассического приближения в аксиоматическом подходе. Вместо состояний (1.2), использующих явное разбиение на пространственные и временные компоненты, рассматриваются “сглаженные” по времени векторы состояний вида

$$\Psi = e^{(i/\hbar)\bar{S}} T \exp \left[\frac{i}{\sqrt{\hbar}} \int dx J(x) \hat{\varphi}_\hbar(x) \right] \bar{f} \equiv e^{(i/\hbar)\bar{S}} T_J^h \bar{f}, \quad (1.3)$$

где $\bar{S}$ – некоторое число, $\hat{\varphi}_\hbar(x)$ – гейзенберговский оператор поля, $J(x)$ – числовая функция, имеющая смысл внешнего классического источника (используемого в теории источников Швингера [14]), обращающаяся в нуль вне интервала $x^0 \in [T_-, T_+]$, $\bar{f}$ – имеющий предел при $\hbar \rightarrow 0$ вектор состояния. Через $T \exp$ обозначена хронологическая экспонента [10].

Оказывается, что в главном порядке по $\hbar$ при $t > T_+$ справедливо свойство

$$\hat{\varphi}_h(x) T_J^h \bar{f} \simeq \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \bar{\Phi}(x) T_J^h \bar{f}, \quad (1.4)$$

причем функция $\bar{\Phi}(x) \equiv \bar{\Phi}_J(x)$ является решением задачи Коши

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\Phi} + V'(\bar{\Phi}) = J, \quad \bar{\Phi}|_{t < T_-} = 0, \quad (1.5)$$

и имеет смысл классического поля, порождаемого источником J .

Как показано в разделе 4, состояние (1.3) при определенных условиях, связывающих $(\bar{S}, J, \bar{f})$ и $(\tilde{S}, \Pi, \Phi, f)$, при $\hbar \rightarrow 0$ приближенно совпадает с (1.2). В важном частном случае $T_+ < 0$ функции Φ и Π совпадают соответственно с классическим полем $\bar{\Phi}_J$ и его производной по времени при $t = 0$.

Специфика ковариантного подхода к квазиклассической теории поля заключается в том, что источники $J_1 \neq J_2$ могут давать одно и то же квазиклассическое состояние (1.3), если порождаемые ими поля $\bar{\Phi}_{J_1}$ и $\bar{\Phi}_{J_2}$ при $t > T_+$ совпадают. Учет отношения эквивалентности квазиклассических состояний, напоминающий учет калибровочной инвариантности в калибровочных теориях [13], рассмотрен в п. 3.2. В частности, если поле $\bar{\Phi}_J$ имеет компактный носитель (обращается в нуль при $t > T_+$), то при $\hbar \rightarrow 0$

$$T_J^h \bar{f} \simeq e^{(i/\hbar)\bar{I}} W_J \bar{f} \quad (1.6)$$

для некоторой фазы $\bar{I}$ и оператора W_J , имеющего смысл матрицы рассеяния на классическом поле $\bar{\Phi}$.

Положив соотношение (1.6) в основу теории, можно вывести из первых принципов классические уравнения движения (принцип стационарности действия) и коммутационные соотношения для квазиклассических полей *без использования постулата о замене скобки Пуассона коммутатором* и установить связь аксиоматической теории и гамильтонова формализма. Для оператора W_J получаются аналоги свойств релятивистской ковариантности, унитарности, причинности.

2. СВЕДЕНИЯ ИЗ ГАМИЛЬТОНОВОЙ КВАНТОВО-ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ КОМПЛЕКСНОГО РОСТКА МАСЛОВА

2.1. Рассмотрим уравнение Шредингера для модели с лагранжианом (1.1):

$$i \frac{d}{dt} \Psi(t) = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}^2(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\varphi}(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{\hbar} V(\sqrt{\hbar} \hat{\varphi}(\mathbf{x})) \right] \Psi(t), \quad (2.1)$$

где $\Psi(t)$ – зависящий от времени вектор состояния (элемент гильбертова пространства $\mathcal{H}^h$), $\hat{\varphi}(\mathbf{x})$ и $\hat{\pi}(\mathbf{x})$ – операторы поля и канонически сопряженного импульса, удовлетворяющие каноническим коммутационным соотношениям. В шредингеровском функциональном представлении состояниям в каждый момент времени сопоставляются функционалы $\Psi[\varphi(\cdot)]$; операторы $\hat{\varphi}$ и $\hat{\pi}$ записываются как $\hat{\varphi}(\mathbf{x}) \equiv \varphi(\mathbf{x})$, $\hat{\pi}(\mathbf{x}) \equiv -i\delta/\delta\varphi(\mathbf{x})$. Состояние (1.2) представляется как

$$\begin{aligned} \Psi[t, \varphi(\cdot)] &= e^{(i/\hbar)S^t} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int d\mathbf{x} \Pi^t(\mathbf{x}) [\varphi(\mathbf{x}) \sqrt{\hbar} - \Phi^t(\mathbf{x})] \right\} f^t \left[\varphi(\cdot) - \frac{\Phi^t(\cdot)}{\sqrt{\hbar}} \right] \equiv \\ &\equiv (K_{S^t, \Pi^t, \Phi^t}^h) [\varphi(\cdot)], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $S^t = \tilde{S}^t + (1/2) \int d\mathbf{x} \Pi^t(\mathbf{x}) \Phi^t(\mathbf{x})$, f^t – не зависящий от $\hbar$ функционал. Подстановка функционала (2.2) в уравнение Шредингера приводит к следующим соотношениям [5], [6]:

а) Π , Φ удовлетворяют классическим уравнениям

$$\dot{\Phi}^t = \Pi^t, \quad -\dot{\Pi}^t = -\Delta \Phi^t + V'(\Phi^t); \quad (2.3)$$

б) S – действие на классическом решении, т.е.

$$\dot{S}^t = \int d\mathbf{x} \left[\Pi^t(\mathbf{x}) \dot{\Phi}^t(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} (\Pi^t(\mathbf{x}))^2 - \frac{1}{2} (\nabla \Phi^t(\mathbf{x}))^2 - V(\Phi^t(\mathbf{x})) \right]; \quad (2.4)$$

в) f^t удовлетворяет уравнению Шредингера во внешнем поле $\Phi^t(\mathbf{x})$ с квадратичным гамильтонианом

$$i f^t[\phi(\cdot)] = H_2^t f^t[\phi(\cdot)],$$

$$H_2^t = \int d\mathbf{x} \left[-\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta \phi(\mathbf{x}) \delta \phi(\mathbf{x})} + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\mathbf{x}))^2 + \frac{1}{2} V''(\Phi^t(\mathbf{x})) \phi^2(\mathbf{x}) \right]. \quad (2.5)$$

Для устранения квантово-полевых расходимостей в главном порядке квазиклассического разложения нужно выбрать (вообще говоря, нефоковское) представление коммутационных соотношений и добавить к квадратичному гамильтониану, входящему в (2.5), бесконечное числовое слагаемое, зависящее от классического поля [6], [7].

2.2. Таким образом, состояния, возникающие в квазиклассической гамильтоновой теории комплексного ростка Маслова в точке, можно в каждый момент времени отождествить с упорядоченными парами (X, f) , где $X \equiv (S, \Pi, \Phi)$ – классические переменные в фиксированный момент времени, f – квантовое состояние во внешнем поле – элемент некоторого гильбертова пространства $\mathcal{F}_X$, зависящего от X . Эволюция определяется как совокупность преобразований $u_t: X \mapsto u_t X$, $U_t(u_t X \leftarrow X): \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{u_t X}$. Математически множество наборов (X, f) можно проинтерпретировать [15] как векторное расслоение с базой $\{X\}$ и слоями $\mathcal{F}_X$ (“квазиклассическое расслоение”), а эволюцию – как автоморфизм квазиклассического расслоения. При этом определен оператор $K_X^h: \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{H}^h$, сопоставляющий при каждом X вектору f элемент пространства состояний “точной теории” $\mathcal{H}^h$ вида (2.2). Он называется *каноническим оператором*.

Если $\mathcal{U}_t^h$ – оператор эволюции в “точной” теории поля, действующий в $\mathcal{H}^h$, то можно записать

$$\mathcal{U}_t^h K_X^h f \simeq K_{u_t X}^h U_t(u_t X \leftarrow X) f. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.6) обобщается и на случай преобразования $\mathcal{U}_g^h$, соответствующего элементу группы Пуанкаре $g \in G$:

$$\mathcal{U}_g^h K_X^h f \simeq K_{u_g X}^h U_g(u_g X \leftarrow X) f, \quad (2.7)$$

где

$$u_g: X \mapsto u_g X, \quad U_g(u_g X \leftarrow X): \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{u_g X}. \quad (2.8)$$

Построение перенормированных преобразований (2.8) и проверка группового свойства в гамильтоновом подходе проведены в работе [7].

Сформулируем аналоги аксиом квантовой теории поля для квазиклассической теории комплексного ростка Маслова в точке в гамильтоновом формализме.

A1. *Определено квазиклассическое расслоение, пространство которого является множеством состояний квазиклассической теории, база $\mathcal{X}$ – множеством классических состояний, слои $\mathcal{F}_X$ – гильбертовыми пространствами квантовой системы во внешнем поле $X \in \mathcal{X}$.*

A2 (релятивистская инвариантность). *На квазиклассическом расслоении действует группа Пуанкаре G : элементам $g \in G$ сопоставлены автоморфизмы (2.8) квазиклассического расслоения, удовлетворяющие групповому свойству:*

$$u_{g_1 g_2} = u_{g_1} u_{g_2}, \\ U_{g_1 g_2}(u_{g_1 g_2} X \leftarrow X) = U_{g_1}(u_{g_1 g_2} X \leftarrow u_{g_2} X) U_{g_2}(u_{g_2} X \leftarrow X).$$

Исследуем аналог аксиомы об операторе поля. Поскольку при $t = 0$

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) K_X^h f = K_X^h \left[\frac{\Phi(\mathbf{x})}{\sqrt{h}} + \hat{\phi}(\mathbf{x}) \right] f,$$

где $\hat{\phi}(\mathbf{x})$ – оператор умножения на $\phi(\mathbf{x})$ в функциональном шредингеровском представлении, для гейзенберговского оператора поля имеем

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_h(\mathbf{x}, t) K_X^h f &= \mathcal{U}_{-t}^h \hat{\phi}(\mathbf{x}) \mathcal{U}_t^h K_X^h f \simeq \mathcal{U}_{-t}^h \hat{\phi}(\mathbf{x}) K_{u_t X}^h \mathcal{U}_t(u_t X \leftarrow X) f = \\ &= \mathcal{U}_{-t}^h K_{u_t X}^h \left[\frac{\Phi^t(\mathbf{x})}{\sqrt{h}} + \hat{\phi}(\mathbf{x}) U_t(u_t X \leftarrow X) \right] f = \\ &= K_X^h \left[\frac{\Phi^t(\mathbf{x})}{\sqrt{h}} + U_{-t}(X \leftarrow u_t X) \hat{\phi}(\mathbf{x}) U_t(u_t X \leftarrow X) \right] f. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следовательно, можно записать

$$\hat{\phi}_h(x) K_X^h f \simeq K_X^h \left[\frac{\Phi(x | X)}{\sqrt{h}} + \hat{\phi}(x | X) \right] f, \quad (2.10)$$

где $\Phi(x | X)$ – числовая функция, зависящая от пространственно-временного аргумента x и классического состояния X , $\hat{\phi}(x | X)$ – операторная обобщенная функция в $\mathcal{F}_X$. При этом справедливы уравнения

$$\partial_\mu \partial^\mu \Phi(x | X) + V'(\Phi(x | X)) = 0, \quad \partial_\mu \partial^\mu \hat{\phi}(x | X) + V''(\Phi(x | X)) \hat{\phi}(x | X) = 0,$$

которые можно получить, например, из гейзенберговских уравнений движения для $\hat{\phi}_h(x)$.

Рассмотрим свойство релятивистской ковариантности полей в квазиклассическом приближении. В “точной” теории для преобразования Пуанкаре $g = (a, \Lambda)$ вида $x' = \Lambda x + a$ справедливо свойство

$$\mathcal{U}_{g^{-1}}^h \hat{\phi}_h(x) \mathcal{U}_g^h = \hat{\phi}_h(w_g x), \quad w_g x = \Lambda^{-1}(x - a). \quad (2.11)$$

Проводя выкладки, аналогичные (2.9), получаем отсюда соотношение

$$\hat{\varphi}_h(w_g x) K_X^h f \simeq K_X^h \left[\frac{\Phi(w_g x | X)}{\sqrt{h}} + \hat{\phi}(w_g x | X) \right] f.$$

Приходим к следующим квазиклассическим аналогам полевых аксиом.

A3 (оператор поля). Каждому классическому состоянию $X \in \mathcal{X}$ соответствуют числовая функция $\Phi(x | X)$ и операторная обобщенная функция $\hat{\phi}(x | X)$, действующая в пространстве $\mathcal{F}_X$.

A4 (релятивистская инвариантность полей). Справедливы свойства:

$$\begin{aligned} \Phi(w_g x | X) &= \Phi(x | u_g X); \\ \hat{\phi}(w_g x | X) &= U_{g^{-1}}(X \leftarrow u_g X) \hat{\phi}(x | u_g X) U_g(u_g X \leftarrow X). \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.3. На квазиклассическом расслоении можно ввести и структуры [15], связанные непосредственно с квазиклассическим приближением, а не с квантовыми полями и релятивистской инвариантностью.

Заметим, что при сдвиге классического состояния $X \in \mathcal{X}$ на малую величину $h\delta X$ порядка h состояние $K_X^h f$ в главном порядке по h умножается на число, которое будем обозначать как $e^{-i\omega_X[\delta X]}$:

$$K_{X+\delta X}^h f \simeq e^{-i\omega_X[\delta X]} K_X^h f; \quad (2.13)$$

при сдвиге же на величину порядка $\sqrt{h}$ преобразование канонического оператора является более сложным:

$$K_{X+\sqrt{h}\delta X}^h f \simeq \text{const } K_X^h e^{i\Omega_X[\delta X]} f, \quad (2.14)$$

где const – числовой множитель, $\Omega_X[\delta X]$ – некоторый эрмитов оператор. При этом ω_X и Ω_X являются соответственно числовой и операторнозначной дифференциальной 1-формами на $\mathcal{X}$. Можно показать [15], [16], что при достаточно общих предположениях коммутатор операторов $\Omega_X[\delta X]$ является оператором умножения на число и связан с 2-формой $d\omega_X$ – дифференциалом 1-формы ω_X :

$$[\Omega_X[\delta X]; \Omega_X[\delta X']] = -i d\omega_X(\delta X, \delta X'). \quad (2.15)$$

Для рассматриваемого случая

$$\omega_X[\delta X] = \int d\mathbf{x} \Pi(\mathbf{x}) \delta\Phi(\mathbf{x}) - \delta S, \quad (2.16)$$

$$\Omega_X[\delta X] = \int d\mathbf{x} [\delta\Pi(\mathbf{x}) \hat{\varphi}(\mathbf{x}) - \delta\Phi(\mathbf{x}) \hat{\pi}(\mathbf{x})]. \quad (2.17)$$

Важным свойством 1-форм ω и Ω является их инвариантность относительно эволюции, которая связана с тем, что векторы $K_{X^t+h\delta X^t}^h f^t$ и $K_{X^t+\sqrt{h}\delta X^t}^h f^t$ должны приближенно удовлетворять уравнению Шредингера, если δX^t – решение уравнения в вариациях, отвечающего классическому уравнению эволюции для X^t . Аналогичное свойство справедливо и для преобразований Пуанкаре.

Приходим к следующим аксиомам.

А5. На классическом пространстве $\mathcal{X}$ определены 1-формы ω (со значениями в $\mathbb{R}$) и Ω (со значениями в пространстве операторов в $\mathcal{F}_X$). При этом справедливо коммутационное соотношение (2.15).

А6 (релятивистская инвариантность 1-форм). Пусть $u_g(X + \delta X) \simeq X' + \delta X'$. Тогда

$$\omega_{X'}[\delta X'] = \omega_X[\delta X], \quad (2.18)$$

$$\Omega_{X'}[\delta X'] U_g(X' \leftarrow X) = U_g(X' \leftarrow X) \Omega_X[\delta X]. \quad (2.19)$$

2.4. Разработанная Масловым теория лагранжевых многообразий с комплексным ростком [1], [2] является обобщением теории комплексного ростка Маслова в точке. Одна из возможных формулировок заключается в следующем [5], [15], [17]. Рассматриваются состояния, являющиеся суперпозициями состояний (2.2):

$$\int d\alpha K_{X(\alpha)}^h f(\alpha); \quad (2.20)$$

здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, $(X(\alpha), f(\alpha))$ — k -мерная поверхность в пространстве квазиклассического расслоения. Оказывается, что состояние (2.20) имеет экспоненциально малую при $h \rightarrow 0$ норму всегда, кроме специального случая

$$\omega_X \left[\frac{\partial X}{\partial \alpha_a} \right] = 0, \quad (2.21)$$

и только этот случай рассматривается. При выполнении условия (2.21) (“условия изотропности Маслова”) квадрат нормы вектора (2.20) равен

$$h^{k/2} \int d\alpha \left(f(\alpha), \prod_a 2\pi\delta \left(\Omega_X \left[\frac{\partial X}{\partial \alpha_a} \right] \right) f(\alpha) \right). \quad (2.22)$$

Следовательно, для нормировки на единицу состояние (2.20) следует разделить на $h^{k/4}$. Входящие в (2.22) дельта-функции коммутируют ввиду свойств (2.15) и (2.21).

Отметим, что формула (2.22) напоминает скалярное произведение, используемое в одном из способов квантования систем со связями [18].

При преобразованиях Пуанкаре состояние (2.20) переходит в

$$h^{-k/4} \int d\alpha K_{X(\alpha)}^h f(\alpha) \mapsto h^{-k/4} \int d\alpha K_{u_g X(\alpha)}^h U_g(u_g X(\alpha) \leftarrow X(\alpha)) f(\alpha).$$

Инвариантность 1-форм ω и Ω является важным условием самосогласованности теории лагранжевых многообразий с комплексным ростком, поскольку условие изотропности Маслова (2.21) и скалярное произведение (2.22) должны сохраняться при преобразованиях Пуанкаре.

2.5. Развиваемая ниже ковариантная формулировка квантово-полевой теории комплексного ростка Маслова во многом напоминает квазиклассическую механику систем со связями (калибровочных теорий) [19]. Ее специфика заключается в том, что некоторые классические состояния объявляются эквивалентными друг другу. Для любой пары классически эквивалентных состояний $X \sim X'$ определен изоморфизм слоев $V(X' \leftarrow X): \mathcal{F}_X \rightarrow \mathcal{F}_{X'}$, удовлетворяющий свойству

$$V(X'' \leftarrow X) = X(X'' \leftarrow X')V(X' \leftarrow X). \quad (2.23)$$

Точки на квазиклассическом расслоении $(X, f) \sim (X', V(X' \leftarrow X)f)$ называются калибровочно-эквивалентными.

Квазиклассические преобразования Пуанкаре, 1-формы ω и Ω , функции Φ и $\hat{\phi}$ должны сохранять отношение калибровочной эквивалентности. Следовательно,

$$\begin{aligned} u_g X &\sim u_g X', \\ V(u_g X' \leftarrow u_g X)U_g(u_g X \leftarrow X) &= U_g(u_g X' \leftarrow X')V(X' \leftarrow X) \quad \text{при } X \sim X'; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \Phi(x | X) &= \Phi(x | X'), \\ V(X' \leftarrow X)\hat{\phi}(x | X) &= \hat{\phi}(x | X')V(X' \leftarrow X) \quad \text{при } X \sim X'; \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \omega_X[\delta X] &= \omega_{X'}[\delta X'], \\ V(X' \leftarrow X)\Omega_X[\delta X] &= \Omega_{X'}[\delta X']V(X' \leftarrow X) \quad \text{при } \begin{matrix} X \sim X', \\ X + \delta X \sim X' + \delta X'. \end{matrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

В частности, при бесконечно малом калибровочном преобразовании $X + \delta X \sim X$ должны выполняться соотношения $\omega_X[\delta X] = 0$, $\Omega_X[\delta X] = 0$. Условия (2.23)–(2.26) связаны с внутренней самосогласованностью квазиклассической теории.

3. ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ В КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

3.1. Квазиклассические состояния. При аксиоматическом построении ковариантной квазиклассической теории поля мы не будем пользоваться какими-либо эволюционными уравнениями движения, а ограничимся обычными предположениями аксиоматического подхода [8] о пуанкаре-ковариантности теории, существовании вакуумного вектора $|0\rangle$, пуанкаре-инвариантности оператора поля $\hat{\phi}_h(x)$ и хронологической экспоненты

$$T_J^h = T \exp \left\{ \frac{i}{\sqrt{\hbar}} \int dx J(x) \hat{\phi}_h(x) \right\}. \quad (3.1)$$

Остальные предположения будем оговаривать особо.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Гильбертовы пространства $\mathcal{H}^h$ совпадают, а операторы $\hat{\phi}_h(x)$ и $\mathcal{U}_g^h$ разлагаются в асимптотические ряды по $\sqrt{\hbar}$.

Это предположение фактически используется, например, при построении формальной теории возмущений при использовании асимптотического *in*-представления в *S*-матричном подходе.

Обозначим эти операторы в главном порядке по $\hbar$ как $\hat{\phi}_0(x)$ и U_g , а соответствующее гильбертово пространство – как $\mathcal{H}$.

Будем рассматривать состояния вида (1.3)

$$\Psi = e^{(i/\hbar)\bar{S}} T_J^h \bar{f} \equiv \bar{K}_{\bar{S}, J}^h \bar{f}, \quad (3.2)$$

где $\bar{S}$ – вещественное число, а $J(x)$ имеет компактный носитель $\text{supp } J$ в области $x^0 \in [T_-, T_+]$.

Для дальнейшего введем следующее обозначение. Для точек x и y пространства Минковского будем писать $x < y$, $x > y$ и $x \sim y$, если $x^0 > y^0$, $x^0 < y^0$ и $(x - y)^2 < 0$, соответственно; $x \gtrsim y$, если $x > y$ или $x \sim y$. Аналогичные обозначения введем и для подмножеств: например, $x \gtrsim \text{supp } J$, если $x \gtrsim y$ при всех $y \in \text{supp } J$.

Отождествим состояния (3.2) с точками на квазиклассическом расслоении, базой которого является множество наборов $\bar{X} = \{\bar{S}, J(x)\}$, а слоями – гильбертовы пространства $\mathcal{H}$. Исследуем сформулированные в предыдущем разделе аксиомы квазиклассической теории поля.

Аксиома А2. Поскольку $\mathcal{U}_g^h T_J^h \bar{f} = T_{u_g J}^h \mathcal{U}_g^h \bar{f} \simeq T_{u_g J}^h U_g \bar{f}$, где $u_g J(x) = J(w_g x)$, w_g имеет вид (2.11), группа Пуанкаре действует на квазиклассическом расслоении как $(\bar{S}, J, \bar{f}) \mapsto (\bar{S}, u_g J, U_g \bar{f})$.

Аксиома А3. Исследуем оператор поля при $x > \text{supp } J$. Можно записать

$$\hat{\varphi}_h(x) T_J^h = \frac{\sqrt{\hbar}}{i} \frac{\delta T_J^h}{\delta J(x)}$$

и

$$\hat{\varphi}_h(x) T_J^h \bar{f} = T_J^h \frac{1}{\sqrt{\hbar}} R(x | J) \bar{f}, \quad (3.3)$$

где

$$R(x | J) = -i\hbar (T_J^h)^+ \frac{\delta T_J^h}{\delta J(x)} \quad (3.4)$$

– известная в аксиоматической теории поля R -функция ЛСП [8], [9]. Наложим на нее следующее условие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. R -функция разлагается в асимптотический ряд по $\sqrt{\hbar}$:

$$R(x | J) = \bar{\Phi}(x | J) + \sqrt{\hbar} R^{(1)}(x | J) + \dots,$$

и в нулевом порядке теории возмущений является оператором умножения на числовую функцию $\bar{\Phi}(x | J)$.

При данном предположении числовая функция $\Phi(x | \bar{X})$ и операторная обобщенная функция $\hat{\phi}(x | \bar{X})$ при $x > \text{supp } J$ имеют вид

$$\Phi(x | \bar{X}) = \bar{\Phi}(x | J), \quad \hat{\phi}(x | \bar{X}) = R^{(1)}(x | J), \quad x > \text{supp } J. \quad (3.5)$$

Аксиома **A5**. 1-формы ω и Ω можно ввести из определения [16]

$$ih\delta\{e^{(i/\hbar)\bar{S}}T_J^h\} \simeq T_J^h\{\bar{\omega}_{\bar{X}}[\delta\bar{X}] - \sqrt{\hbar}\bar{\Omega}_{\bar{X}}[\delta\bar{X}]\};$$

отсюда получаем

$$\bar{\omega}_{\bar{X}}[\delta\bar{X}] - \sqrt{\hbar}\bar{\Omega}_{\bar{X}}[\delta\bar{X}] \simeq - \int dx R(x | J)\delta J(x) - \delta\bar{S}$$

и

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_{\bar{X}}[\delta\bar{X}] &= - \int dx \bar{\Phi}(x | J)\delta J(x) - \delta\bar{S}, \\ \bar{\Omega}_{\bar{X}}[\delta\bar{X}] &= \int dx R^{(1)}(x | J)\delta J(x).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Тем самым основные объекты квазиклассической теории поля представляются через R -функции ЛСЦ. Следующие их свойства хорошо известны [8].

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. 1. $R(x|J)$ – эрмитова операторная обобщенная функция, зависящая только от $J(y)$ в предшествующие моменты времени (микропричинность Боголюбова); при $x < \text{supp } J$ она имеет вид $R(x | J) = \hat{\varphi}_h(x)\sqrt{\hbar}$.

2. R -Функция релятивистски-ковариантна: $\mathcal{U}_{g^{-1}}^h R(x | u_g J) \mathcal{U}_g^h = R(w_g x | J)$.

3. Справедливо коммутационное свойство

$$[R(x | J); R(y | J)] = -ih \left(\frac{\delta R(x | J)}{\delta J(y)} - \frac{\delta R(y | J)}{\delta J(x)} \right).\tag{3.7}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. 1. Функция $\bar{\Phi}(x | J)$ вещественна, обращается в нуль при $x < \text{supp } J$, зависит только от $J(y)$ при $y^0 < x^0$ и удовлетворяет свойству релятивистской инвариантности $\bar{\Phi}(w_g x | J) = \bar{\Phi}(x | u_g J)$.

2. Операторная функция $R^{(1)}(x | J)$ эрмитова, совпадает с $\hat{\varphi}_0(x)$ при $x < \text{supp } J$, зависит только от $J(y)$ при $y^0 < x^0$, удовлетворяет свойству релятивистской инвариантности

$$U_{g^{-1}} R^{(1)}(x | u_g J) U_g = R^{(1)}(w_g x | J)\tag{3.8}$$

и коммутационному соотношению

$$[R^{(1)}(x | J); R^{(1)}(y | J)] = -i \left(\frac{\delta \bar{\Phi}(x | J)}{\delta J(y)} - \frac{\delta \bar{\Phi}(y | J)}{\delta J(x)} \right).\tag{3.9}$$

Таким образом, релятивистская инвариантность полей и 1-форм вытекает из общих свойств R -функций ЛСЦ. Коммутационное соотношение (3.9) совпадает с (2.15).

3.2. Эквивалентность квазиклассических состояний. Как сказано во введении, в ковариантном подходе квазиклассические состояния могут быть эквивалентны друг другу. Будем говорить, что $J \sim 0$, если

$$T_J^h \bar{f} \simeq e^{(i/\hbar)\bar{I}_J} W_J \bar{f}\tag{3.10}$$

для некоторого числа $\bar{I}_J$ и оператора W_J , допускающего разложение в асимптотический ряд по $\sqrt{\hbar}$.

Обозначим через W_J^0 оператор W_J в главном порядке по $\sqrt{\hbar}$. Исследуем свойства $\bar{I}_J$ и W_J .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. 1. Оператор W_J унитарен.

2. Пусть $J \sim 0$. Тогда $u_g J \sim 0$, причем

$$\bar{I}_{u_g J} = \bar{I}_J, \quad U_g W_J^0 U_g^{-1} = W_{u_g J}^0. \quad (3.11)$$

3. При $x \gtrsim \text{supp } J$ справедливы свойства

$$\bar{\Phi}(x | J) = 0, \quad R^{(1)}(x | J) = (W_J^0)^+ \hat{\varphi}_0(x) W_J^0. \quad (3.12)$$

Первое свойство следует из унитарности оператора T_J^h , второе получается применением оператора $\mathcal{U}_g^h$ к соотношению (3.10), свойства же (3.12) вытекают из соотношения $T_J^h R(x | J) \bar{f} = \sqrt{h} \hat{\varphi}_h(x) T_J^h \bar{f}$, $x \gtrsim \text{supp } J$, которое приводится к виду $R(x | J) = \sqrt{h} W_J^+ \hat{\varphi}(x) W_J$ и разлагается в ряд теории возмущений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. При $J \sim 0$, $J + \delta J \sim 0$

$$\delta \bar{I} = \int dx \bar{\Phi}(x | J) \delta J(x), \quad \int dx R^{(1)}(x | J) \delta J(x) = 0. \quad (3.13)$$

Для доказательства рассмотрим вариацию соотношения (3.10):

$$\delta T_J^h \cdot \bar{f} \simeq \frac{i}{h} \delta \bar{I}_J T_J^h \bar{f} + T_J^h W_J^+ \delta W_J \bar{f}.$$

Следовательно,

$$-ih(T_J^h)^+ \delta T_J^h = \delta \bar{I}_J - ih W_J^+ \delta W_J. \quad (3.14)$$

С другой стороны, согласно (3.4)

$$-ih(T_J^h)^+ \delta T_J^h = \int dx R(x | J) \delta J(x). \quad (3.15)$$

Сравнивая (3.14) и (3.15), получаем (3.13).

Следующее утверждение выражает принцип причинности для W_J^0 .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть $J + \Delta J_2 \sim 0$, $J + \Delta J_1 + \Delta J_2 \sim 0$, $\text{supp } \Delta J_2 \gtrsim \text{supp } \Delta J_1$. Тогда оператор $(W_{J+\Delta J_2}^0)^+ W_{J+\Delta J_1+\Delta J_2}^0$ и число $-\bar{I}_{J+\Delta J_2} + \bar{I}_{J+\Delta J_1+\Delta J_2}$ не зависят от ΔJ_2 .

Для доказательства достаточно рассмотреть оператор

$$(T_{J+\Delta J_2}^h)^+ T_{J+\Delta J_1+\Delta J_2}^h \simeq e^{(i/h)[- \bar{I}_{J+\Delta J_2} + \bar{I}_{J+\Delta J_1+\Delta J_2}]} (W_{J+\Delta J_2}^0)^+ W_{J+\Delta J_1+\Delta J_2}^0,$$

который не зависит от ΔJ_2 .

Введем теперь отношения эквивалентности на квазиклассическом расслоении. Будем говорить, что $J_1 \sim J_2$, если для некоторого источника J_+ с носителем в будущем от источников J_1 и J_2 ($\text{supp } J_+ \gtrsim \text{supp } J_1 \cup \text{supp } J_2$) справедливы свойства $J_1 + J_+ \sim 0$, $J_2 + J_+ \sim 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Если $J_1 \sim J_2$ и J'_+ — функция, удовлетворяющая свойствам $\text{supp } J'_+ \supseteq \text{supp } J_1 \cup \text{supp } J_2$ и $J_1 + J'_+ \sim 0$, то и $J_2 + J'_+ \sim 0$.

Для доказательства достаточно воспользоваться свойством

$$T_{J_2+J'_+}^h = T_{J_1+J'_+}^h (T_{J_2+J_+}^h)^+ T_{J_1+J_+}^h.$$

Следствие 2. При $J_1 \sim J_2$ и $J_2 \sim J_3$ справедливо свойство $J_1 \sim J_3$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Пусть $J_1 \sim J_2$. Тогда свойство

$$e^{(i/h)\bar{S}_1} T_{J_1}^h \bar{f}_1 \simeq e^{(i/h)\bar{S}_2} T_{J_2}^h \bar{f}_2 \quad (3.16)$$

справедливо тогда и только тогда, когда

$$\bar{S}_1 + \bar{I}_{J_1+J_+} = \bar{S}_2 + \bar{I}_{J_2+J_+}, \quad \bar{f}_2 = (W_{J_2+J_+}^0)^+ W_{J_1+J_+}^0 \bar{f}_1. \quad (3.17)$$

Для доказательства достаточно подействовать оператором $T_{J_+}^h$ на левую и правую части соотношения (3.16).

Назовем два квазиклассических состояния $(\bar{X}_1, \bar{f}_1) \sim (\bar{X}_2, \bar{f}_2)$ эквивалентными при условии (3.17). Во введенных выше обозначениях

$$V(\bar{X}_2 \leftarrow \bar{X}_1) = (W_{J_2+J_+}^0)^+ W_{J_1+J_+}^0 \equiv V(J_2 \leftarrow J_1). \quad (3.18)$$

Из свойства причинности (утверждение 4) вытекает, что определение (3.18) не зависит от выбора источника J_+ .

Проверим свойства (2.23)–(2.26). Свойство (2.23) очевидно. Свойство (2.24) вытекает из релятивистской инвариантности (утверждение 2). Свойство (2.26) для ω проверяется следующим образом. Пусть $(\bar{S}_1, J_1) \sim (\bar{S}_2, J_2)$, $(\bar{S}_1 + \delta\bar{S}_1, J_1 + \delta J_1) \sim (\bar{S}_2 + \delta\bar{S}_2, J_2 + \delta J_2)$. Согласно (3.17) это означает, что

$$\delta\bar{S}_1 + \int dx \bar{\Phi}(x | J_1) \delta J_1 = \delta\bar{S}_2 + \int dx \bar{\Phi}(x | J_2) \delta J_2,$$

или $\omega_{\bar{X}_1}[\delta\bar{X}_1] \omega_{\bar{X}_2}[\delta\bar{X}_2]$.

Далее, подействуем на равенство (3.16) оператором $\hat{\varphi}_h(x)$. Получим

$$e^{(i/h)\bar{S}_1} T_{J_1}^h R(x | J_1) \bar{f}_1 = e^{(i/h)\bar{S}_2} T_{J_2}^h R(x | J_2) \bar{f}_2.$$

Отсюда

$$R(x | J_2) V(J_2 \leftarrow J_1) = V(J_2 \leftarrow J_1) R(x | J_1).$$

Разлагая данное соотношение по теории возмущений, при $x \gtrsim \text{supp } J_1 \cup \text{supp } J_2$ находим

$$\bar{\Phi}(x | J_1) = \bar{\Phi}(x | J_2), \quad R^{(1)}(x | J_2) V(J_2 \leftarrow J_1) = V(J_2 \leftarrow J_1) R^{(1)}(x | J_1). \quad (3.19)$$

Следовательно, свойство (2.25) проверено при $x \gtrsim \text{supp } J$ (при тех x , при которых были определены $\bar{\Phi}$ и $\hat{\varphi}$ выше). Свойства (2.25) можно использовать для доопределения $\bar{\Phi}$ и $\hat{\varphi}$ и при остальных x : для этого нужно подобрать источник $J' \sim J$, удовлетворяющий условию $\text{supp } J \lesssim x$, и положить

$$\Phi(x | \bar{X}) \equiv \bar{\Phi}(x | J'); \quad \hat{\varphi}(x | \bar{X}) \equiv V(J \leftarrow J') R^{(1)}(x | J') V(J' \leftarrow J). \quad (3.20)$$

Свойства (2.25) при таком доопределении останутся справедливыми.

Проверим свойство (2.26) для Ω .

УТВЕРЖДЕНИЕ 7. Пусть $J_1 \sim J_2$, $J_1 + \delta J_1 \sim J_2 + \delta J_2$. Тогда

$$\int dx R^{(1)}(x | J_2) \delta J_2 V(J_2 \leftarrow J_1) = V(J_2 \leftarrow J_1) \int dx R^{(1)}(x | J_1) \delta J_1(x). \quad (3.21)$$

Для доказательства введем операторную функцию

$$\tilde{R}(x | J) = T_J^h R(x | J) (T_J^h)^+. \quad (3.22)$$

Она зависит только от $J(y)$ в последующие моменты времени, удовлетворяет граничному условию $\tilde{R}(x | J) = \hat{\varphi}(x) \sqrt{\hbar}$ при $x \gtrsim \text{supp } J$. При $J \sim 0$ $\tilde{R}$ -функция имеет вид $\tilde{R}(x | J) = W_J R(x | J) W_J^+$, разлагается в асимптотический ряд

$$\tilde{R}(x | J) = \tilde{\Phi}(x | J) + \sqrt{\hbar} \tilde{R}^{(1)}(x | J) + \dots,$$

причем

$$\tilde{\Phi}(x | J) = \Phi(x | J), \quad \tilde{R}^{(1)}(x | J) = W_J^0 R^{(1)}(x | J) (W_J^0)^+. \quad (3.23)$$

Пусть $J_1 \sim J_2$ и $J_1 + \delta J_1 \sim J_2 + \delta J_2$. Это означает, что $J_1 + J_+ \sim 0$, $J_2 + J_+ \sim 0$, $J_1 + \delta J_1 + J_+ + \delta J_+ \sim 0$, $J_2 + \delta J_2 + J_+ + \delta J_+ \sim 0$ при $\text{supp } J_+ \cup \text{supp } \delta J_+ \gtrsim \text{supp } J_1 \cup \text{supp } J_2 \cup \text{supp } \delta J_1 \cup \text{supp } \delta J_2$. Как вытекает из (3.13), (3.18), (3.23), свойство (3.21) равносильно следующему:

$$\begin{aligned} (W_{J_2+J_+}^0)^+ \int dx \tilde{R}^{(1)}(x | J_2 + J_+) \delta J_+(x) W_{J_1+J_+}^0 &= \\ = (W_{J_2+J_+}^0)^+ \int dx \tilde{R}^{(1)}(x | J_1 + J_+) \delta J_+(x) W_{J_1+J_+}^0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

которое следует из условия причинности для $\tilde{R}^{(1)}$:

$$\tilde{R}^{(1)}(x | J_1 + J_+) = \tilde{R}^{(1)}(x | J_2 + J_+) = \tilde{R}^{(1)}(x | J_+).$$

Утверждение доказано.

3.3. О квазиклассическом ковариантном квантовании полей. Развиваемая аксиоматика квазиклассической теории поля может быть положена в основу квазиклассического квантования полей. Чтобы получить “из первых принципов” классические уравнения поля, наложим следующее условие.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. Для любой полевой конфигурации $\Phi(x)$ с компактным носителем можно однозначно подобрать источник $J \sim 0$ (обозначим его как $J = J(x | \Phi)$), порождающий конфигурацию Φ : $\Phi(x) = \bar{\Phi}(x | J)$. Он удовлетворяет условию локальности:

$$\frac{\delta J(x | \Phi)}{\delta \Phi(y)} = 0, \quad y \neq x. \quad (3.25)$$

Из данного предположения и формулы (3.13) вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 8. 1. Функционал $I[\Phi] = \bar{I}_J - \int dx J(x)\Phi(x)$ удовлетворяет свойству локальности

$$I[\Phi] = \int dx \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \Phi(x))$$

и принципу стационарного действия

$$\frac{\delta I[\bar{\Phi}]}{\delta \Phi(x)} = -J(x). \quad (3.26)$$

2. Операторная обобщенная функция $R^{(1)}(x | J)$ удовлетворяет уравнению

$$\int dy \frac{\delta^2 I[\bar{\Phi}]}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} R^{(1)}(y | J) = 0. \quad (3.27)$$

3. Обозначим через $D_{\bar{\Phi}}^{\text{ret}}(x, y)$ запаздывающую функцию Грина задачи

$$\int dy \frac{\delta^2 I[\bar{\Phi}]}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \delta \Phi(y) = -\delta J(x), \quad \delta \Phi|_{x^0 < T_-} = 0,$$

определяемую из соотношения $\delta \Phi(x) = \int dy D_{\bar{\Phi}}^{\text{ret}}(x, y) \delta J(y)$. Тогда

$$[R^{(1)}(x | J); R^{(1)}(y | J)] = -i(D_{\bar{\Phi}}^{\text{ret}}(x, y) - D_{\bar{\Phi}}^{\text{ret}}(y, x)). \quad (3.28)$$

Свойство (3.26) является другой записью (3.13), поскольку

$$\delta I = \delta \bar{I} - \int dx (\delta J \bar{\Phi} + J \delta \bar{\Phi}) = - \int dx J \delta \bar{\Phi}.$$

Свойство локальности I вытекает из (3.25). Далее, пусть Φ и $\Phi + \delta \Phi$ — две полевые конфигурации с компактным носителем. Тогда для соответствующих источников J , $J + \delta J$ имеем

$$\delta J(y) = - \int dx \frac{\delta^2 I[\bar{\Phi}]}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \delta \Phi(x),$$

и свойство (3.13) записывается как

$$- \int dx dy R^{(1)}(y | J) \frac{\delta^2 I[\bar{\Phi}]}{\delta \Phi(x) \delta \Phi(y)} \delta \Phi(x) = 0,$$

откуда получаем (3.27). Коммутационное соотношение (3.28) является другой записью (3.9). Утверждение доказано.

Из изложенного вытекает, что квазиклассическая теория в главном порядке по $\hbar$ восстанавливается по функционалу действия $I[\Phi]$ без использования постулатов канонического квантования. Проясняется и физический смысл функционала действия: если $\Phi(x)$ — полевая конфигурация с компактным носителем, то ей однозначно сопоставляется источник $J \sim 0$, а соответствующая ему Т-экспонента T_J^h равна произведению множителя $e^{(i/\hbar)\bar{I}_J}$ на имеющий предел при $\hbar \rightarrow 0$ оператор; величина $\bar{I}_J = \int dx J \Phi$ является классическим действием.

При этом по известному $I[\Phi]$ строится классическое уравнение движения (3.26) для $\overline{\Phi}$, из которого с учетом граничного условия $\Phi|_{x < \sup J} = 0$ однозначно находится $\overline{\Phi}(x | J)$, а также уравнение движения (3.27) для операторов $R^{(1)}(x | J)$ и коммутационное соотношение (3.28) для этих операторов.

Для свободной классической теории поля

$$I[\Phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{m^2}{2} \Phi^2 \right]; \quad (3.29)$$

следовательно, классическое уравнение (3.26) имеет вид

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \overline{\Phi}(x) = J(x). \quad (3.30)$$

Оператор $R^{(1)}(x | J)$ удовлетворяет уравнению (3.27)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) R^{(1)}(x | J) = 0. \quad (3.31)$$

Поскольку функция $D_{\overline{\Phi}}^{\text{ret}}(x, y)$ в данном случае совпадает с запаздывающей функцией Грина для уравнения (3.30) $D_0^{\text{ret}}(x, y)$, приводим коммутационное соотношение (3.28) к виду

$$[R^{(1)}(x | J), R^{(1)}(y | J)] = -i(D_0^{\text{ret}}(x, y) - D_0^{\text{ret}}(y, x)) = -iD_0(x, y). \quad (3.32)$$

Здесь $D_0(x, y)$ – перестановочная функция свободного поля.

Как вытекает из (3.5), при $x \gtrsim \sup J$ оператор поля $\hat{\phi}(x | \overline{X}) = R^{(1)}(x | J)$ также удовлетворяет уравнению (3.31):

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \hat{\phi}(x | \overline{X}) = 0; \quad (3.33)$$

при $x \gtrsim \sup J$ и $y \gtrsim \sup J$ справедливо коммутационное соотношение

$$[\hat{\phi}(x | \overline{X}), \hat{\phi}(y | \overline{X})] = -iD_0(x, y). \quad (3.34)$$

Ввиду формулы (3.20), продолжающей определение квазиклассического поля $\hat{\phi}(x | \overline{X})$ на остальные значения x , уравнения (3.33) и коммутационное соотношение (3.34) справедливы при всех x и y .

Если принять во внимание также и аксиому о существовании и единственности вакуума, то соотношения (3.33) и (3.34) однозначно определяют, что $\hat{\phi}(x | \overline{X})$ – свободное скалярное поле $\hat{\phi}_0(x)$. Оператор U_g преобразования Пуанкаре однозначно определяется соотношениями

$$U_{g^{-1}} \hat{\phi}_0(x) U_g = \hat{\phi}_0(w_g x), \quad U_g |0\rangle = |0\rangle.$$

Поскольку $R^{(1)}(x | J) = \hat{\phi}_0(x)$ как при $x \lesssim \sup J$, так и при $x \gtrsim \sup J$, из свойства (3.12) вытекает, что оператор W_J^0 является оператором умножения на числовой фазовый множитель.

Таким образом, квазиклассическое квантование свободной теории поля (с действием (3.29)) совпадает с другими, “точными” способами квантования.

Для теории самодействующего скалярного поля с классическим действием

$$I[\Phi] = \int dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - V(\Phi) \right],$$

где $V(\Phi) \sim (m^2/2)\Phi^2$ при $\Phi \rightarrow 0$, уравнения (3.26) и (3.27) запишутся как

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \bar{\Phi} + V'(\bar{\Phi}) &= J, \\ (\partial_\mu \partial^\mu + V''(\bar{\Phi}(x))) R^{(1)}(x | J) &= 0; \end{aligned} \quad (3.35)$$

$D_{\bar{\Phi}}^{\text{ret}}(x, y)$ оказывается запаздывающей функцией Грина для уравнения

$$(\partial_\mu \partial^\mu + V''(\bar{\Phi}(x))) \delta \Phi(x) = \delta J(x).$$

Ввиду граничного условия $R^{(1)}(x | J) = \hat{\varphi}_0(x)$ при $x \lesssim \text{supp } J$ операторы $R^{(1)}(x | J)$ однозначно определяются из (3.35). Оператор W_J^0 однозначно определяется из соотношения (3.12) (при $x \gtrsim \text{supp } J$) с точностью до фазового множителя c_J , который, как вытекает из свойства причинности, имеет вид

$$\exp \left[i \int dx \mathcal{L}_1(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x), \dots, \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \Phi(x)) \right],$$

где $\mathcal{L}_1$ — однопетлевой контрчлен. При этом формально можно записать

$$W_J^0 = T \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int dx V''(\bar{\Phi}(x)) \hat{\varphi}_0^2(x) \right\},$$

так как унитарный оператор W_J^0 , связывающий поля при $x^0 \rightarrow \pm\infty$, является матрицей рассеяния на внешнем классическом поле $\bar{\Phi}(x)$. Построение оператора W_J^0 эквивалентно анализу расходимостей в однопетлевом приближении.

Отметим, что введенное здесь соотношение (3.28), содержащее в правой части скобку Пайерлса [20] (см. также [21], [22]) классических полей в точках x и y , рассматривалось в монографии [21] в качестве основного постулата квантования полей.

4. ВЗАИМОСВЯЗЬ ГАМИЛЬТОНОВА И АКСИОМАТИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ

4.1. В двух предыдущих разделах рассмотрены гамильтонова и аксиоматическая формулировки квазиклассической теории поля. Исследуем их взаимосвязь.

Прежде всего покажем, что состояние (1.3), рассматриваемое в ковариантном подходе, может быть приведено к виду (2.2). Для этого заметим, что оператор

$$T_J^h = T \exp \left[\frac{i}{\sqrt{h}} \int dx J(x) \hat{\varphi}_h(x) \right]$$

связан с оператором эволюции $U_J(0, t_-)$ для системы с гамильтонианом

$$H_J(t) = H - \frac{1}{\sqrt{h}} \int d\mathbf{x} J(\mathbf{x}, t) \hat{\varphi}(\mathbf{x})$$

стандартной формулой перехода в представление взаимодействия

$$T_J^h = U_J(0, t_-) e^{-iHt_-}, \quad t_- < (\text{supp } J)^0.$$

При этом

$$e^{-iHt_-} \bar{f} \simeq e^{-iH_0 t_-} \bar{f}, \quad (4.1)$$

где H_0 — гамильтониан свободного поля массы m . При квазиклассической эволюции с гамильтонианом H_J квазиклассическое состояние (4.1) переходит в состояние (2.2); при этом для S , Π , Φ , f получаем систему уравнений, связанную с (2.3)–(2.5) заменой $V(\Phi) \Rightarrow V(\Phi) - J\Phi$. Если обозначить через $U_2(0, t_-)$ оператор эволюции для уравнения (2.5), то окажется, что

$$e^{(i/\hbar)\bar{S}} T_J^h \bar{f} \simeq K_{S, \Pi, \Phi}^h f, \quad (\text{supp } J)^0 = [T_-, T_+] \subset (-\infty, 0),$$

где в обозначениях предыдущего раздела

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{x}) &= \dot{\bar{\Phi}}(x | J), \quad \Phi(\mathbf{x}) = \bar{\Phi}(x | J), \quad S = \bar{S} + I_-[\Phi], \quad x^0 = 0, \\ I_-[\bar{\Phi}] &= \int_{x^0 < 0} dx \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \bar{\Phi} \partial^\mu \bar{\Phi} - V(\bar{\Phi}) + J\bar{\Phi} \right], \\ f &= \mathcal{V}_{\bar{X}} \bar{f}, \quad \mathcal{V}_{\bar{X}} = U_2(0, t_-) e^{-iH_0 t_-}, \quad t_- < T_-. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отсюда получаем свойство (1.4).

4.2. Исследуем взаимосвязь классических теорий поля в гамильтоновом и ковариантном подходах. В первом случае расширенным фазовым пространством (базой квазиклассического расслоения) является множество наборов $(S, \Pi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}))$ с 1-формой действия

$$\omega_X[\delta X] = \int d\mathbf{x} \Pi(\mathbf{x}) \delta \Phi(\mathbf{x}) - \delta S. \quad (4.3)$$

Во втором случае расширенное фазовое пространство можно рассматривать как поверхность в пространстве наборов $\{\bar{X} = (S, J(x), \bar{\Phi}(x))\}$, заданную уравнением (3.26):

$$\partial_\mu \partial^\mu \bar{\Phi}(x) + V'(\bar{\Phi}(x)) = J(x), \quad \Phi|_{x^0 < T_-} = 0; \quad (4.4)$$

1-форма действия записывается в виде

$$\bar{\omega}_X[\delta \bar{X}] = - \int dx \bar{\Phi}(x) \delta J(x) - \delta \bar{S}. \quad (4.5)$$

Соотношения (4.4) и (4.5) позволяют интерпретировать $J(x)$ и $\bar{\Phi}(x)$ как импульсы и координаты, соответственно, при этом соотношение (4.4) задает связи первого рода.

Эквивалентность гамильтоновой и ковариантной формулировок классической теории поля вытекает из соотношения $\bar{\omega}_{\bar{X}}[\delta \bar{X}] = \omega_X[\delta X]$, проверяемого непосредственным вычислением с использованием свойств (4.2) ввиду $\delta S = \delta \bar{S} + \delta I_-[\bar{\Phi}]$. Дифференциалы

$d\omega$, задающие симплектическую структуру, также совпадают, что выражается равенством

$$\int d\mathbf{x} [\delta\Pi_1(\mathbf{x})\delta\Phi_2(\mathbf{x}) - \delta\Pi_2(\mathbf{x})\delta\Phi_1(\mathbf{x})] = \int dx [\delta J_1(x)\delta\Phi_2(x) - \delta J_2(x)\delta\Phi_1(x)].$$

Отметим, что генераторы преобразований Пуанкаре имеют в ковариантной формулировке простой вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\mu &= \int dx J(x) \partial^\mu \bar{\Phi}(x), \\ \mathcal{M}^{\mu\nu} &= \int dx J(x) (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) \bar{\Phi}(x); \end{aligned} \quad (4.6)$$

с помощью уравнения (4.4) нетрудно привести эти генераторы к виду, используемому в гамильтоновой теории поля (в частности, $\mathcal{P}^\mu$ представляется в виде интеграла от тензора энергии-импульса $T^{\mu 0}$ по пространству). По аналогии с (4.6) можно записывать и генераторы любых преобразований, сохраняющих действие, которые совпадают с нетеровскими интегралами движения.

4.3. Исследуем теперь взаимосвязь других объектов квазиклассической теории в гамильтоновом и аксиоматическом подходах: квазиклассических преобразований Пуанкаре $U_g(u_g X \leftarrow X)$, полей $\hat{\Phi}(x | X)$, 1-форм Ω . Эквивалентность подходов означает, что должны выполняться соотношения

$$\mathcal{V}_{u_g \bar{X}} U_g \bar{f} = U_g(u_g X \leftarrow X) \mathcal{V}_{\bar{X}} \bar{f}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{V}_{\bar{X}} R^{(1)}(x | J) \bar{f} = \hat{\phi}(x | X) \mathcal{V}_{\bar{X}} \bar{f}; \quad x \gtrsim \text{supp } J, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{V}_{\bar{X}} \int dx R^{(1)}(x | J) \delta J(x) \bar{f} = \int d\mathbf{x} \left[\delta\Pi(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) - \delta\Phi(\mathbf{x}) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\phi(\mathbf{x})} \right] \mathcal{V}_{\bar{X}} \bar{f}. \quad (4.9)$$

Соотношение (4.9) проверяется следующим образом. Прежде всего, учтем соотношение (4.4) и вытекающее из него свойство

$$\partial_\mu \partial^\mu \delta \bar{\Phi} + V''(\bar{\Phi}) \delta \bar{\Phi} = \delta J, \quad \delta \bar{\Phi}|_{x \lesssim \text{supp } \delta J} = 0, \quad (4.10)$$

и запишем оператор в левой части в виде:

$$\begin{aligned} \int dx R^{(1)}(x | J) \delta J(x) &= \int dx R^{(1)}(x | J) (\partial_\mu \partial^\mu \delta \bar{\Phi}(x) + V''(\bar{\Phi}) \delta \bar{\Phi}(x)) = \\ &= \int dx [R^{(1)}(x | J) \partial_\mu \partial^\mu \delta \bar{\Phi}(x) - \delta \bar{\Phi}(x) \partial_\mu \partial^\mu R^{(1)}(x | J)] = \\ &= \int d\sigma^\mu [R^{(1)}(x | J) \partial^\mu \delta \bar{\Phi}(x) - \delta \bar{\Phi}(x) \partial^\mu R^{(1)}(x | J)]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В формуле (4.11) интегрирование осуществляется по любой пространственноподобной поверхности, удовлетворяющей условию $x \gtrsim \text{supp } J$.

Обозначим через $\delta\Phi_+(x)$ решение задачи

$$[\partial_\mu \partial^\mu + V''(\bar{\Phi}(x))]\delta\Phi_+ = 0, \quad \delta\Phi_+|_{x^0 > T_+} = \delta\bar{\Phi}; \quad (4.12)$$

тогда формулу (4.11) можно преобразовать к виду

$$\int dx R^{(1)}(x | J) \delta J(x) = \int d\sigma^\mu [R^{(1)}(x | J) \partial^\mu \delta\Phi_+(x) - \delta\Phi_+(x) \partial^\mu R^{(1)}(x | J)], \quad (4.13)$$

или

$$\int dx R^{(1)}(x | J) \delta J(x) = \int d\sigma^\mu [\hat{\varphi}_0(x) \partial^\mu \delta\Phi_+(x) - \delta\Phi_+(x) \partial^\mu \hat{\varphi}_0(x)]. \quad (4.14)$$

Пространственноподобная поверхность, по которой производится интегрирование, в формуле (4.13) произвольна, а в формуле (4.14) удовлетворяет условию $x \lesssim \text{supp } J$.

Заметим теперь, что оператор

$$A(t) = \int_{x^0=t} d\mathbf{x} [\delta\dot{\Phi}_+(\mathbf{x}, t) \hat{\varphi}(\mathbf{x}) - \delta\Phi_+(\mathbf{x}, t) \hat{\pi}(\mathbf{x})]$$

коммутирует с оператором $id/dt - H_2^t$ и поэтому переводит решения уравнения (2.5) в решения этого же уравнения. Следовательно, левая часть (4.9) равна

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\bar{X}} e^{iH_0 t_-} A(t_-) e^{-iH_0 t_-} \bar{f} &= U_2(0, t_-) A(t_-) e^{-iH_0 t_-} \bar{f} = \\ &= A(0) U_2(0, t_-) e^{-iH_0 t_-} \bar{f} = A(0) \mathcal{V}_{\bar{X}} \bar{f} \end{aligned}$$

и совпадает с правой частью. Соотношение (4.9) проверено. Представляя его левую часть в виде интеграла (4.11) по поверхности $x^0 = 0$, приходим к соотношениям

$$\mathcal{V}_{\bar{X}} R^{(1)}(x | J) = \hat{\phi}(x) \mathcal{V}_{\bar{X}}, \quad \mathcal{V}_{\bar{X}} \partial_0 R^{(1)}(x | J) = \partial_0 \hat{\phi}(x) \mathcal{V}_{\bar{X}},$$

справедливым при $x^0 = 0$. Поскольку $\hat{\phi}(x)$ и $R^{(1)}(x | J)$ при $x \gtrsim \text{supp } J$ удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению второго порядка, получаем свойство (4.8).

С точностью до числового множителя, зависящего от способа перенормировки, свойство (4.7) можно получить из пуанкаре-инвариантности полей. Действительно, операторы $U_g(u_g X \leftarrow X)$ определяются из (2.12) с точностью до мультипликативной константы, а оператор $\mathcal{V}_{u_g \bar{X}} U_g \mathcal{V}_{\bar{X}}^{-1}$ удовлетворяет (2.12). Исследование числового множителя требует более детального анализа перенормировки преобразований Лоренца.

Отметим также, что формулы (4.8) и (4.9) позволяют получить полезные соотношения, выражающие квазиклассический оператор поля $\hat{\phi}(x | X)$ через 1-форму Ω . Обозначим для краткости

$$\Omega\{\delta\Phi(\cdot)\} = \Omega(\delta\Phi, \delta\dot{\Phi}) = \int d\mathbf{x} [\delta\dot{\Phi}(\mathbf{x}, 0) \hat{\phi}(\mathbf{x}) - \delta\Phi(\mathbf{x}, 0) \hat{\pi}(\mathbf{x})],$$

если $\delta\Phi$ — решение уравнения

$$\partial_\mu \partial^\mu \delta\Phi + V''(\Phi(x)) \delta\Phi = 0.$$

Как вытекает из (4.8), (4.9), (4.13),

$$\int dx \hat{\phi}(x | X) \delta J(x) = \Omega \{ \delta \Phi_+ (\cdot) \}, \quad (4.15)$$

где $\delta \Phi_+$ определяется из соотношений (4.10) и (4.12).

Соотношение (4.15) показывает, что аксиомы существования квазиклассического поля и его инвариантности не являются независимыми от остальных аксиом: если в качестве определения квазиклассического поля $\hat{\phi}(x | X)$ принять соотношение (4.15), его релятивистская инвариантность будет следовать из релятивистской инвариантности 1-формы Ω .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показано в работе, из первых принципов аксиоматического подхода при достаточно общих предположениях удастся получить основные формулы классической и квазиклассической теории поля, включая принцип наименьшего действия, уравнения движения и коммутационные соотношения для квазиклассических полей.

Основной трудностью аксиоматического подхода к квантовой теории поля является построение нетривиальной модели, удовлетворяющей всем аксиомам. Поэтому при построении конкретных моделей квазиклассической теории поля имеет смысл выделять те свойства, которые существенны в главном порядке по $\hbar$, и проверять только их. Такими свойствами являются аксиомы A1–A6 в гамильтоновом подходе и дополнительно к ним свойства (2.23)–(2.26) – в ковариантном.

В настоящей работе рассмотрен только главный порядок квазиклассического разложения. Обобщение приведенных конструкций, учитывающее поправки по $\sqrt{\hbar}$, исследовано в нашей работе [23]. Там же изучена связь аксиом квазиклассической теории и S -матричного подхода в рамках теории возмущений, рассмотрены примеры исследования процессов распада и рассеяния частиц в данном подходе.

Автор надеется рассмотреть в последующих публикациях вопросы об аксиоматическом построении квазиклассических калибровочных теорий и ферми-полей и о взаимосвязи предложенных конструкций с моделями конструктивной теории поля.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 02-01-01062.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
- [2] В. П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [3] В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: МГУ, 1965.
- [4] В. Г. Багров, В. В. Белов, И. М. Тернов. ТМФ. 1982. Т. 50. С. 390.
- [5] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов. Метод комплексного роста в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М.: УРСС, 2000.
- [6] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов. ТМФ. 1998. Т. 114. С. 233.
- [7] О. Yu. Shvedov. J. Math. Phys. 2002. V. 43. P. 1809.
- [8] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.

- [9] *H. Lehmann, K. Symanzik, W. Zimmermann.* Nuovo Cimento. 1957. V. 6. P. 319; *K. Nishijima.* Phys. Rev. 1960. V. 119. P. 485.
- [10] *Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.
- [11] *Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Физматгиз, 1958; *Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, В. П. Павлов, А. Д. Суханов.* ТМФ. 1972. Т. 13. С. 3.
- [12] *О. И. Завьялов.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979.
- [13] *А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев.* Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988.
- [14] *Ю. Швингер.* Частицы. Источники. Поля. М.: Мир, 1973.
- [15] *О. Ю. Шведов.* Матем. заметки. 1999. Т. 65. С. 437; Матем. сб. 1999. Т. 190. № 10. С. 123.
- [16] *O. Yu. Shvedov.* Ann. Phys. 2002. V. 296. P. 51.
- [17] *В. П. Маслов, О. Ю. Шведов.* ТМФ. 1995. Т. 104. С. 479.
- [18] *A. Ashtekar, J. Lewandowski, D. Marolf, J. Mourao, T. Thiemann.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 6456; *D. Giulini, D. Marolf.* Class. Q. Grav. 1999. V. 16. P. 2489; *O. Yu. Shvedov.* Ann. Phys. 2002. V. 302. P. 2.
- [19] *О. Ю. Шведов.* ТМФ. 2003. Т. 136. С. 418; hep-th/0111265.
- [20] *R. Peierls.* Proc. Roy. Soc. Lond. A. 1952. V. 214. P. 143.
- [21] *Б. С. ДеВитт.* Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987.
- [22] *D. Marolf.* Ann. Phys. 1994. V. 236. P. 392.
- [23] *O. Yu. Shvedov.* An axiomatic approach to semiclassical field perturbation theory. hep-th/0412302.

Поступила в редакцию 16.IX.2004 г.,
после доработки 18.III.2005 г.