Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Олышанецкий, В. К. Рогов, dS–AdS структуры на некоммутативных пространствах Минковского, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 3, 513–543

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1874>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 14:45:26

© 2005 г.

М. А. Ольшанецкий*, В.-Б. К. Рогов†

DS–ADS СТРУКТУРЫ НА НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МИНКОВСКОГО

Рассмотрены семейство четырехмерных некоммутативных пространств Минковского сигнатуры $(1, 3)$ и два типа пространств сигнатуры $(2, 2)$. Все пространства определяются общим уравнением отражения и отличаются антиинволюциями. Существуют два элемента Казимира и фиксация одного из них приводит к некоммутативным “однородным” пространствам H_3 , dS_3 , AdS_3 и световым конусам. Приведено квазиклассическое описание пространств Минковского. Существуют три согласованных пуассоновых структуры: квадратичная, линейная и каноническая. Квантование первой из них приводит к рассматриваемым пространствам Минковского. Определены орисферические образующие пространств Минковского. Они приводят к орисферическому описанию пространств H_3 , dS_3 , AdS_3 . Построены неприводимые представления пространств H_3 и dS_3 . Найдены собственные функции оператора Клейна–Гордона в терминах орисферических образующих пространств Минковского. Эта конструкция приводит к описанию собственных функций на пространствах H_3 , dS_3 , AdS_3 и световых конусах.

Ключевые слова: некоммутативная геометрия, уравнение Янга–Бакстера и уравнение отражения, гармонический анализ на некоммутативных пространствах.

1. ВВЕДЕНИЕ

Некоммутативные пространства Минковского (НПМ) появляются естественным образом в теории струн. Причиной некоммутативности является B -поле открытой струны, которая оканчивается на D -бране (см. обзоры [1]). С другой стороны, струна в классических пространствах с кривизной, таких как AdS_3 или эвклидова версия H_3 и dS_3 , детально изучалась последние несколько лет. Эти исследования включают, в частности, AdS–CFT-соответствие и решения $(2 + 1)$ -гравитации типа BTZ черных дыр. Некоммутативная деформация AdS(dS)–CFT-соответствия анализировалась в [2].

Мы рассматриваем некоторое семейство НПМ. Отличительным свойством этих пространств является естественное действие квантовой группы Лоренца $U_q(SL_2)$. НПМ-сигнатуры $(1, 3)$ привлекали активное внимание в течение последних 15 лет, начиная с

*Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, Москва, Россия; Department of Mathematical Science, University of Aarhus, Aarhus, Denmark.
E-mail: olshanet@itep.ru

†Московский государственный университет путей сообщения, Москва, Россия.
E-mail: vrogov@cemi.rssi.ru

первых работ [3]. В настоящее время известна их полная классификация [4]–[6]. НПМ-сигнатуры $(1, 3)$, которые мы рассматриваем, присутствуют в списке [5]. Также как и в [6], коммутационные соотношения в НПМ мы рассматриваем в форме уравнения отражения. Мы строим неприводимые представления ассоциативной алгебры, порожденной некоммутативными координатами НПМ-сигнатуры $(1, 3)$ (см. также [7]). Фиксируя один из операторов Казимира мы определяем некоммутативное пространство Лобачевского (НПЛ) H_3 и некоммутативное мнимое пространство Лобачевского (НМПЛ) dS_3 . Эти алгебры имеют естественное описание в терминах образующих, которые являются некоммутативным аналогом орисферических координат. Элемент Казимира, определяющий однородное пространство, является одной из орисферических образующих. Это позволяет определить соответствующие однородные пространства в терминах орисферических образующих.

Заключительная цель статьи – нахождение решений уравнения Клейна–Гордона в терминах орисферических образующих. По аналогии с классическим случаем решения являются произведением q -цилиндрических функций и q^2 -экспонент. Решения легко могут быть ограничены на НПЛ, НМПЛ и световой конус.

Для того чтобы включить в рассмотрение некоммутативные пространства AdS_3 , мы рассматриваем некоммутативные деформации пространств сигнатур $(+, -, +, -)$ и $(+, -, -, +)$. В то время как в классическом случае эти пространства изоморфны, так как их группы симметрий $SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R})$ и $SU(1, 1) \oplus SU(1, 1)$ изоморфны, в некоммутативном случае ситуация другая. Хотя коммутационные соотношения в соответствующих алгебрах совпадают, алгебры отличаются антиинволюциями. Вместо действия квантовой группы Лоренца определено действие неизоморфных алгебр Хопфа $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ с $|q| = 1$ в классическом случае и $\mathcal{U}_q(SU(1, 1)) \oplus \mathcal{U}_q(SU(1, 1))$ с $q \in \mathbb{R}$ в некоммутативном случае. Как и в случае сигнатуры $(1, 3)$, мы даем орисферическое описание и решения уравнения Клейна–Гордона в терминах орисферических образующих для пространств сигнатуры $(+, -, +, -)$.

Свойства некоммутативных однородных пространств собраны в следующей таблице:

Обозначение	q	Алгебра Хопфа	НПМ
H_3	$q \in \mathbb{C}$	$\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$	$\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$
$\mathbb{C}_{\delta, q}^{1,3}$	$q \in \mathbb{C}$	$\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$	$\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$
dS_3	$q \in \mathbb{C}$	$\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$	$\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$
$AdS_3^\pm$	$ q = 1$	$\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R})) \oplus \mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R}))$	$\mathbb{M}_q^{2,2}$
$\mathbb{C}_q^{2,2}$	$ q = 1$	$\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R})) \oplus \mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R}))$	$\mathbb{M}_q^{2,2}$
$\widehat{AdS_3}^\pm$	$q \in (0, 1]$	$\mathcal{U}_q(SU(1, 1)) \oplus \mathcal{U}_q(SU(1, 1))$	$\widetilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$
$\widetilde{\mathbb{C}}_q^{2,2}$	$q \in (0, 1]$	$\mathcal{U}_q(SU(1, 1)) \oplus \mathcal{U}_q(SU(1, 1))$	$\widetilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$

Мы также рассматриваем квазиклассические аппроксимации НПМ. Они описываются квадратичными алгебрами Пуассона с антиинволюциями. Скобки Пуассона задаются классическими уравнениями отражения. Алгебры Пуассона имеют две функ-

пии Казимира. Их симплектические листы в случае сигнатуры $(1, 3)$ – орисферы или сферы пространств H_3 и dS_3 . Мы также предъявляем линейные и канонические скобки, включенные в однопараметрическое семейство с квадратичными.

Обозначения. Классические переменные мы будем обозначать строчными буквами, а их некоммутативные деформации (квантование) – заглавными буквами. Мы не будем вводить специального обозначения для некоммутативного умножения.

Координаты пространства $\mathbb{M}^4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ или $\{y_0, y_1, y_2, y_3\}$ отождествим с матричными элементами матрицы

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = y_0 \text{Id} + \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} y_{\alpha} \sigma_{\alpha}, \quad \varepsilon_{\alpha} = 1 \text{ или } i. \quad (1.1)$$

Выбор 1 или i перед y_{α} определяет сигнатуру пространства $\mathbb{M}^4$. Образующие некоммутативного пространства Минковского будем так же записывать в матричной форме

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Параметром деформации является $q = e^{\theta} \in (0, 1]$ или $q = e^{i\theta}$, $|q| = 1$.

2. ОРИСФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА КЛАССИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Имеются два типа пространств с сигнатурами $(+, -, -, -)$ и $(+, +, -, -)$. В то время как первая сигнатура позволяет описывать пространство Лобачевского H_3 и мнимое пространство Лобачевского dS_3 , вторая приводит к AdS_3 . Мы будем рассматривать их отдельно.

2.1. Орисферическое описание пространства Минковского $\mathbb{M}^{1,3}$. Пространство Минковского $\mathbb{M}^{1,3}$ отождествляется с пространством эрмитовых матриц:

$$\mathbb{M}^{1,3} = \{\mathbf{x} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}} \mid \mathbf{x}^{\dagger} = \mathbf{x}\}, \quad (\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = x_3, \quad \bar{x}_4 = x_4). \quad (2.1)$$

Метрика определяется формой $ds^2 = \det(d\mathbf{x}) = dx_1 dx_4 - dx_2 dx_3$. Совокупность координат y_a , $a = 0, \dots, 3$, соответствует выбору $\varepsilon_{\alpha} = 1$ в (1.1):

$$\mathbf{x} = \sum_{a=0}^3 y_a \sigma_a, \quad \sigma_0 = \text{Id}.$$

Она приводит к метрике

$$ds^2 = dy_0^2 - \sum_{j=1}^3 dy_j^2. \quad (2.2)$$

Группа $SL(2, \mathbb{C})$ является двойным накрытием собственной группы Лоренца $SO(1, 3)$ и действует на пространстве Минковского $\mathbb{M}^{1,3} = \{y_0, \dots, y_3\}$ следующим образом:

$$\mathbf{x} \rightarrow g^{\dagger} \mathbf{x} g, \quad g \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (2.3)$$

где $g^\dagger$ означает эрмитово сопряженную матрицу. Действие этой группы сохраняет

$$\det \mathbf{x} = y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = x_1 x_4 - x_3 x_2 \quad (2.4)$$

и, тем самым, метрику (2.2) на $\mathbb{M}^{1,3}$.

Времениподобной части $\mathbb{M}^{1,3+}$ пространства $\mathbb{M}^{1,3}$ соответствуют матрицы с $\det \mathbf{x} > 0$, в то время как случай $\det \mathbf{x} < 0$ соответствует пространственноподобной части $\mathbb{M}^{1,3-}$. Уравнение $\det \mathbf{x} = 0$ выделяет световой конус

$$\mathbf{C}^{1,3} = \{\det \mathbf{x} = x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0\}. \quad (2.5)$$

Введем *орисферические координаты* $\mathbf{x} \sim (r, h, z, \bar{z})$. Если $x_1 \neq 0$, то

$$x_1 = rh, \quad x_2 = rhz, \quad x_3 = rh\bar{z}, \quad (2.6)$$

$$x_4 = r(h|z|^2 + \varepsilon h^{-1}). \quad (2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} z &\in \mathbb{C}, \quad h \in \mathbb{R} \setminus 0, \quad \varepsilon = \pm 1, 0, \quad r^2 \varepsilon = \det \mathbf{x}, \\ z &= x_2 x_1^{-1}, \quad \bar{z} = x_3 x_1^{-1}, \quad r = \sqrt{|\det \mathbf{x}|} \quad \text{при} \quad \det \mathbf{x} \neq 0, \\ h &= \begin{cases} x_1 (|\det \mathbf{x}|)^{-\frac{1}{2}} & \text{при} \quad \varepsilon = \pm 1, \\ x_1 & \text{при} \quad \varepsilon = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Случай $\varepsilon = 1$ соответствует времениподобной части $\mathbb{M}^{1,3}$, $\varepsilon = -1$ соответствует пространственноподобной части, а $\varepsilon = 0$ – световому конусу $\mathbf{C}^{1,3}$. Орисферическими координатами на световом конусе $\mathbf{C}^{1,3}$ являются $(h, z, \bar{z})$:

$$x_1 = h, \quad x_2 = hz, \quad x_3 = h\bar{z}, \quad x_4 = h|z|^2. \quad (2.9)$$

Для того, чтобы описать случай $x_1 = 0$ положим $\varepsilon = -1$, $h \rightarrow 0$, $r < \infty$ и $z \rightarrow \infty$, тогда $\lim hz = e^{it}$, $x_2 = re^{it}$. При этом x_4 принимает произвольное вещественное значение. Таким образом, орисферическое описание имеет вид

$$(r, e^{it}, x_4), \quad x_2 = re^{it}, \quad x_3 = re^{-it}.$$

Рассмотрим коммутативную алгебру $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})$ функций Шварца на $\mathbb{M}^{1,3}$. Интеграл, инвариантный относительно действия $SL(2, \mathbb{C})$ на $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})$,

$$I(f) = \int f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4,$$

в орисферической системе координат принимает вид

$$I(g) = \varepsilon \int g(z, \bar{z}, h, r) r^3 h dr dh dz d\bar{z}, \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3}). \quad (2.10)$$

2.2. Однородные пространства, вложенные в $\mathbb{M}^{1,3}$. Действие $SL(2, \mathbb{C})$, задаваемое (2.3), приводит к слоению $\mathbb{M}^{1,3}$. Орбиты определяются фиксированием $\det \mathbf{x}$. Квадрика

$$\mathbf{L} = \{\det \mathbf{x} = r_0^2 > 0, \ x_1 > 0\}$$

является верхней полый двуполостного гиперboloида. Это модель пространства Лобачевского $\mathbf{L}$, или H_3 . Метрикой на H_3 служит сужение инвариантной метрики $dx_1 dx_4 - dx_2 dx_3$ на $r = \text{const}$. Следовательно, можно положить $r_0 = 1$. Орисферические координаты на $\mathbf{L}$ имеют ограничение $h > 0$. Так как $SU(2)$ оставляет неподвижной точку $y_0 = 1, y_\alpha = 0$, пространство Лобачевского является косетом

$$\mathbf{L} \sim SL(2, \mathbb{C})/SU(2) \sim SO(1, 3)/SO(3).$$

Рассмотрим коммутативную алгебру $\mathcal{S}(\mathbf{L})$ функций Шварца на $\mathbf{L}$. Функции из $\mathcal{S}(\mathbf{L})$ — это бесконечно дифференцируемые функции, стремящиеся к нулю вместе со всеми производными при $|z| \rightarrow \infty$, $h \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ быстрее любой степени. Пусть $I_{r_0^2}$ — идеал в $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})$, порождаемый $f(\det \mathbf{x} - r_0^2) = 0$. Алгебру $\mathcal{S}(\mathbf{L})$ можно рассматривать как фактор-алгебру $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})/I_1$ с дополнительным условием $x_1 > 0$.

Подобным образом описывается верхняя пола светового конуса $\mathbf{C}^{1,3}$ как $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})/I_0$. Орисферические координаты (2.6) на конусе $\mathbf{C}^{1,3+}$ удовлетворяют условиям $r = 1$, $h > 0$, $\varepsilon = 0$. Этот конус является фактор-пространством $SL(2, \mathbb{C})/\tilde{B}_{\mathbb{C}}$, где $\tilde{B}_{\mathbb{C}}$ — подгруппа вида

$$\tilde{B}_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\phi} & w \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \ w \in \mathbb{C} \right\}.$$

Пространство

$$\mathbf{IL} = \{\det \mathbf{x} = -1\}$$

называется *мнимым пространством Лобачевского*. Соответствующей квадрикой будет $y_0^2 - \sum_{\alpha} y_{\alpha}^2 = -1$. Это пространство де Ситтера $\mathbf{IL} \sim dS_3 = SL(2, \mathbb{C})/SU(1, 1) \sim SO(1, 3)/SO(1, 2)$, так как

$$g^{\dagger} \sigma_3 g = \sigma_3, \quad g \in SU(1, 1).$$

Как и выше, $\mathcal{S}(\mathbf{IL}) \sim \mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})/I_{-1}$, но, в отличие от $\mathbf{L}$ и $\mathbf{C}^+$, орисферический радиус h на $\mathbf{IL}$ может принимать любые значения из $\mathbb{R} \setminus 0$.

Мы частично компактифицируем пространство $\mathbf{IL}$ относительно координаты h . Два “предельных” пространства $\Xi^{\pm} = \{h \rightarrow \pm\infty\}$ называются *абсолютами*. Из (2.5) и (2.9) следует, что $\Xi^{\pm}$ можно рассматривать как проективизацию конуса $\mathbf{C}$. Оба абсолюта гомеоморфны $\mathbb{C}$ и, следовательно, могут быть компактифицированы: $\Xi^{\pm} \sim \mathbb{C}P^1$. Заметим, что в то время как $\Xi^{\pm}$ являются двумя компонентами границы $\mathbf{IL}$, Ξ^+ является границей $\mathbf{C}^+$ и $\mathbf{L}$.

2.3. Орисферическое описание пространства $\mathbb{M}^{2,2}$. отождествим пространство $\mathbb{M}^{2,2}$ с пространством матриц $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2)$. Оно получается из $\mathbb{M}^{1,3}$ заменой $y_2 \rightarrow -iy_2$,

$$\mathbb{M}^{2,2} = \{\mathbf{x} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(2)\}, \quad \mathbf{x} = y_0 \text{Id} + y_1 \sigma_1 + iy_2 \sigma_2 + y_3 \sigma_3. \quad (2.11)$$

Метрика на $\mathbb{M}^{2,2}$ определяется формой

$$ds^2 = dx_1 dx_4 - dx_2 dx_3 = dy_0^2 - dy_1^2 + dy_2^2 - dy_3^2. \quad (2.12)$$

Значит, $\mathbb{M}^{2,2}$ имеет сигнатуру $(+ - + -)$. Группа $G = SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R})$ действует на $\mathbb{M}^{2,2}$ следующим образом:

$$\mathbf{x} \rightarrow g_2^{-1} \mathbf{x} g_1, \quad g_k \in SL(2, \mathbb{R}). \quad (2.13)$$

Так как $g_1, g_2 \in SL(2, \mathbb{R})$, преобразованная матрица принадлежит $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2)$. Кроме того, действие (2.13) сохраняет $\det \mathbf{x}$, а следовательно, и метрику.

Орисферические координаты имеют такой же вид, как и в случае пространства $\mathbb{M}^{1,3}$, с заменами в (2.6), (2.7) $z \rightarrow z_1$, $\bar{z} \rightarrow z_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 = rh, \quad x_2 = rhz_1, \quad x_3 = rhz_2, \quad (2.14)$$

$$x_4 = r(hz_1 z_2 + \varepsilon h^{-1}). \quad (2.15)$$

Инвариантный интеграл на $\mathbb{M}^{2,2}$ тот же самый, что и на пространстве $\mathbb{M}^{1,3}$ (2.10).

2.4. Однородные пространства, вложенные в $\mathbb{M}^{2,2}$. Действие $G = SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R})$ на $\mathbb{M}^{2,2}$ сохраняет $\det \mathbf{x}$. Таким образом, мы имеем два типа нетривиальных G -орбит.

1. Пространства AdS_3 ,

$$AdS_3^{\pm} = \{\mathbf{x} \mid \det \mathbf{x} = \varepsilon r_0^2, \varepsilon = \pm 1\}. \quad (2.16)$$

В коммутативном случае пространства AdS_3^{+} и AdS_3^{-} изоморфны. Пространства $AdS_3^{\pm}$ отождествляются с фактор-пространством $(SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R}))/SL(2, \mathbb{R})$, поэтому $AdS_3^{\pm} \sim SL(2, \mathbb{R})$.

2. Конус

$$\mathbf{C}^{2,2} = \{\mathbf{x} \mid \det \mathbf{x} = 0\},$$

который является фактор-пространством $\mathbf{C}^{2,2} \sim (SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R}))/(\tilde{B}_{\mathbb{R}} \oplus \tilde{B}_{\mathbb{R}})$, где $\tilde{B}_{\mathbb{R}}$ — это подгруппа в $SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R})$, сохраняющая точку конуса $\mathbf{C}^{2,2}$. Например, она может быть определена следующим образом:

$$\tilde{B} = \left\{ (g_2, g_1) : \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g_1 = g_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

2.5. Орисферическое описание пространства $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$. Рассмотрим пространство $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$ с сигнатурой $(+ - - +)$. Хотя $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$ изоморфно $\mathbb{M}^{2,2}$, мы рассмотрим эти пространства отдельно, так как они становятся неизоморфными в некоммутативном случае. Отождествим пространство $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$ с пространством матриц:

$$\tilde{\mathbb{M}}^{2,2} = \{\mathbf{x} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}} \mid \bar{x}_1 = x_4, \bar{x}_2 = x_3\}. \quad (2.17)$$

Оно получается из $\mathbb{M}^{1,3}$ заменой $y_3 \rightarrow iy_3$, при этом

$$\mathbf{x} = y_0 \text{Id} + y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 + iy_3 \sigma_3.$$

Определение (2.17) эквивалентно определению

$$\tilde{\mathbb{M}}^{2,2} = \{\mathbf{x} \in \text{Mat}_{\mathbb{C}} \mid \mathbf{x} \sigma_3 \mathbf{x}^\dagger = \sigma_3\}. \quad (2.18)$$

Изоморфизм $\mathbb{M}^{2,2}$ (2.11) и $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$ задается сопряжением:

$$\tilde{x} = g x g^{-1}, \quad \tilde{x} \in \tilde{\mathbb{M}}^{2,2}, \quad x \in \mathbb{M}^{2,2}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Из (2.18) следует, что группа $G = SU(1, 1) \oplus SU(1, 1)$ действует на $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$ следующим образом:

$$\mathbf{x} \rightarrow g_2^{-1} \mathbf{x} g_1, \quad g_k \in SU(1, 1). \quad (2.19)$$

Поэтому $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2} \sim (SU(1, 1) \oplus SU(1, 1))/SU(1, 1)$. Действие (2.19) сохраняет $\det \mathbf{x}$, а следовательно, и метрику.

Орисферические координаты имеют вид

$$x_1 = \frac{r}{2}(h(1 + z_1 z_2) + \varepsilon h^{-1} + ih(z_1 - z_2)), \quad x_4 = \bar{x}_1, \quad (2.20)$$

$$x_2 = \frac{r}{2}(h(1 - z_1 z_2) - \varepsilon h^{-1} - ih(z_1 + z_2)), \quad x_3 = \bar{x}_2, \quad (2.21)$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$.

Мы снова можем определить однородные пространства, вложенные в $\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$, путем фиксирования $\det \mathbf{x} = \varepsilon r^2$. Если $\varepsilon = \pm 1$ и $r = r_0$, мы приходим к $\widetilde{AdS_3^\pm}$, которые изоморфны $AdS_3^\pm$, определенным в п. 2.4. При этом $\widetilde{AdS_3^\pm}$ можно отождествить с $SU(1, 1)$.

2.6. Краткие выводы. Для полноты рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^4$ и вложенную в него сферу S_3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= y_0 \text{Id} + i \sum_{\alpha} y_{\alpha} \sigma_{\alpha}, \quad \det \mathbf{x} = y_0^2 + \sum_{\alpha} y_{\alpha}^2, \\ S_3 &= \{\mathbf{x} \mid \det \mathbf{x} = r_0\} \sim (SU(2) \oplus SU(2))/SU(2). \end{aligned}$$

Орисферического описания S_3 не существует. Мы не будем обобщать сферу S_3 на некоммутативный случай. Сведем структуру однородных пространств в следующую таблицу, которая будет обобщена на некоммутативный случай:

Обозначение	Обозначение	Строение косета	Объемлющее пространство
L	H_3	$SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$	$\mathbb{M}^{1,3}$
$\mathbf{C}^{1,3}$		$SL(2, \mathbb{C})/\tilde{B}_{\mathbb{C}}$	$\mathbb{M}^{1,3}$
IL	dS_3	$SL(2, \mathbb{C})/SU(1, 1)$	$\mathbb{M}^{1,3}$
	AdS_3	$(SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R}))/SL(2, \mathbb{R})$	$\mathbb{M}^{2,2}$
$\mathbf{C}^{2,2}$		$(SL(2, \mathbb{R}) \oplus SL(2, \mathbb{R}))/(\tilde{B}_{\mathbb{R}} \oplus \tilde{B}_{\mathbb{R}})$	$\mathbb{M}^{2,2}$
	AdS_3	$(SU(1, 1) \oplus SU(1, 1))/SU(1, 1)$	$\tilde{\mathbb{M}}^{2,2}$
	S_3	$(SU(2) \oplus SU(2))/SU(2)$	$\mathbb{R}^4$

3. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА И ЕГО СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В этой работе мы обобщаем на некоммутативный случай факты, касающиеся собственных функций оператора Лапласа.

Решениями уравнения Клейна–Гордона на $\mathbb{M}^4$

$$\Delta f_{\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \nu^2 f_{\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_4} - \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2}, \quad (3.1)$$

являются экспоненты

$$f_{\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4) = e^{(\xi x)}, \quad (\xi x) = \sum \xi_i x_i, \quad \nu^2 = \xi_1 \xi_4 - \xi_2 \xi_3. \quad (3.2)$$

Мы будем рассматривать оператор Δ и его собственные функции в орисферической системе координат.

3.1. Скалярные поля на $\mathbb{M}^{1,3}$ в орисферических координатах. Метрика на $\mathbb{M}^{1,3}$ в орисферических координатах принимает вид

$$ds^2 = g_{jk} dx_j dx_k = \varepsilon dr^2 - \varepsilon r^2 h^{-2} dh^2 - r^2 h^2 dz d\bar{z}.$$

Тогда $\Delta = (\det g)^{-\frac{1}{2}} \partial_j g^{jk} (\det g)^{\frac{1}{2}} \partial_k$ можно переписать в виде

$$\Delta = r^{-2} \left[h^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + 3 \frac{\partial}{\partial h} + 4\varepsilon h^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 3r \frac{\partial}{\partial r} \right] \quad (3.3)$$

и рассмотреть задачу о собственных функциях:

$$r^{-2} \left[h^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + 3 \frac{\partial}{\partial h} + 4\varepsilon h^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 3r \frac{\partial}{\partial r} \right] f_{\nu}(\bar{z}, h, z; r) = \nu^2 f_{\nu}(\bar{z}, h, z; r). \quad (3.4)$$

Пусть $Z_{\nu}(x)$ – цилиндрическая функция. Это означает, что $Z_{\nu}(x)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 Z_{\nu}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial Z_{\nu}}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) Z_{\nu} = 0.$$

В дальнейшем мы докажем некоммутативный аналог следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Базисными гармониками задачи о собственных значениях (3.4) являются функции*

$$f_\nu(\bar{z}, h, z; r) = r^{-1} h^{-1} e^{i\mu z + i\bar{\mu} \bar{z}} \mathcal{Z}_\alpha(r\nu) \mathcal{Z}_\alpha(2i\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\mu| h^{-1}), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3.5)$$

$$f_\nu(\bar{z}, h, z; r) = h^{\alpha-1} e^{i\mu z + i\bar{\mu} \bar{z}}, \quad \varepsilon = 0, \quad \alpha^2 = \nu^2 + 1, \quad (3.6)$$

где $\mu, \alpha \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В уравнении (3.4) можно разделить переменные, положив

$$f_\nu(\bar{z}, h, z; r) = e^{i\mu z + i\bar{\mu} \bar{z}} v_\alpha(h) \chi_{\nu, \alpha}(r), \quad (3.7)$$

где $(\alpha^2 - 1)$ — постоянная разделения переменных. Тогда

$$\left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + 3h \frac{\partial}{\partial h} - 4\varepsilon h^{-2} |\mu|^2 - \alpha^2 + 1 \right) v_\alpha(h) = 0, \quad (3.8)$$

$$\left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 3r \frac{\partial}{\partial r} + r^2 \nu^2 - \alpha^2 + 1 \right) \chi_{\nu, \alpha}(r) = 0. \quad (3.9)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_{\nu, \alpha}(r) &= r^{-1} \mathcal{Z}_\alpha(r\nu), \\ v_\alpha(h) &= \begin{cases} h^{-1} \mathcal{Z}_\alpha(2i\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\mu| h^{-1}), & \varepsilon = \pm 1, \\ h^{\alpha-1}, & \varepsilon = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к формулам (3.5), (3.6).

Из (3.3) следует, что сужение уравнения Клейна–Гордона на однородные пространства принимает вид

$$\begin{aligned} \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + 3 \frac{\partial}{\partial h} + 4\varepsilon h^{-2} \frac{\partial^2}{\partial \bar{z} \partial z} \right) f_\nu(h, z, \bar{z}) &= \nu^2 f_\nu(h, z, \bar{z}), \\ H_3 \rightarrow \varepsilon = 1, \quad dS_3 \rightarrow \varepsilon = -1. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Базисными гармониками на $H_3(\mathbf{L})$, $dS_3(\mathbf{L})$ и световом конусе $\mathbf{C}^{1,3}$ являются функции*

$$f_\nu(\bar{z}, h, z) = h^{-1} e^{i\mu z + i\bar{\mu} \bar{z}} \mathcal{Z}_\alpha(2i\varepsilon^{\frac{1}{2}} |\mu| h^{-1}), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3.11)$$

$$f_\nu(\bar{z}, h, z) = h^{\alpha-1} e^{i\mu z + i\bar{\mu} \bar{z}}, \quad \varepsilon = 0, \quad \alpha^2 = \nu^2 + 1. \quad (3.12)$$

3.2. Скалярные поля на $\mathbb{M}^{2,2}$ в орисферических координатах. Нетрудно перейти от решения уравнения Клейна–Гордона на $\mathbb{M}^{1,3}$ к решению уравнения Клейна–Гордона на $\mathbb{M}^{2,2}$. Мы приходим к уравнению

$$r^{-2} \left[h^2 \frac{\partial^2}{\partial h^2} + 3 \frac{\partial}{\partial h} + 4\varepsilon h^{-2} \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - 3r \frac{\partial}{\partial r} \right] f_\nu(z_2, h, z_1; r) = \nu^2 f_\nu(z_2, h, z_1; r). \quad (3.13)$$

Аналог предложения 3.1 принимает вид

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Базисными гармониками задачи о собственных значениях (3.13) являются функции*

$$f_\nu(\bar{z}, h, z; r) = r^{-1} h^{-1} e^{i\mu_1 z_1 + i\mu_2 z_2} \mathcal{Z}_\alpha(r\nu) \mathcal{Z}_\alpha(2i\varepsilon^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mu_1 \mu_2} h^{-1}), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3.14)$$

$$f_\nu(\bar{z}, h, z; r) = h^{\alpha-1} e^{i\mu_1 z_1 + i\mu_2 z_2}, \quad \varepsilon = 0, \quad \alpha^2 = \nu^2 + 1, \quad (3.15)$$

где $\mu_1, \mu_2, \alpha \in \mathbb{R}$.

Таким образом, мы приходим к скалярному полю на AdS_3 и на $\mathbb{C}^{2,2}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Базисными гармониками на AdS_3 и на световом конусе $\mathbb{C}^{2,2}$ являются функции*

$$f_\nu(z_1, h, z_2) = h^{-1} e^{i\mu_1 z_1 + i\mu_2 z_2} \mathcal{Z}_\alpha(2i\varepsilon^{1/2} \sqrt{\mu_1 \mu_2} h^{-1}), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (3.16)$$

$$f_\nu(\bar{z}, h, z) = h^{\alpha-1} e^{i\mu_1 z_1 + i\mu_2 z_2}, \quad \varepsilon = 0. \quad (3.17)$$

Здесь $\alpha^2 = \nu^2 + 1$.

4. НЕКОММУТАТИВНОЕ ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО МИНКОВСКОГО $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$

4.1. Определение. Определим алгебру, порожденную матричными элементами матрицы (1.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. *Некоммутативное четырехмерное пространство Минковского $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$, $0 < q \leq 1$, $\delta \in \mathbb{N}$, — это унитарная ассоциативная алгебра, снабженная антиинволюцией $*$, с четырьмя образующими X_j , $j = 1, \dots, 4$, и квадратичными соотношениями*

$$X_1 X_3 = q^{-\delta} X_3 X_1, \quad X_1 X_2 = q^\delta X_2 X_1, \quad (4.1)$$

$$[X_2, X_3] = q^{\delta-2} (1 - q^2) X_1 X_4, \quad (4.2)$$

$$X_2 X_4 = q^{\delta-2} X_4 X_2, \quad (4.3)$$

$$X_3 X_4 = q^{-\delta+2} X_4 X_3, \quad (4.4)$$

$$[X_1, X_4] = 0 \quad (4.5)$$

такими, что

$$X_1^* = X_1, \quad X_2^* = X_3, \quad X_4^* = X_4. \quad (4.6)$$

Это пространство было описано в [5]. Следуя этому определению, мы выразим соотношения в $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ в виде уравнений отражения. Рассмотрим базис в $\text{Mat}_{\mathbb{R}}(2)$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим две R -матрицы,

$$R(q) = q^{-1}(E_1 \otimes E_1 + E_4 \otimes E_4) + (E_1 \otimes E_4 + E_4 \otimes E_1) + q^{-1}(1 - q^2)E_3 \otimes E_2, \quad (4.7)$$

$$R^{(2)}(q) = (E_1 \otimes E_1 + E_4 \otimes E_4) + q^{\delta-1}(E_1 \otimes E_4 + E_4 \otimes E_1). \quad (4.8)$$

R -матрицы удовлетворяют уравнениям типа Янга–Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}, \quad (4.9)$$

$$R_{12}R_{13}^{(2)}R_{23}^{(2)} = R_{23}^{(2)}R_{13}^{(2)}R_{12}. \quad (4.10)$$

Непосредственно можно проверить, что соотношения (4.1)–(4.5) эквивалентны уравнению отражения

$$R(q)\mathbf{X}^{(1)}R^{(2)}(q)\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(2)}R^{(2)}(q)\mathbf{X}^{(1)}R^\dagger(q), \quad (4.11)$$

где $\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{X} \otimes \text{Id}$ и $\mathbf{X}^{(2)} = \text{Id} \otimes \mathbf{X}$, а

$$R^\dagger(q) = q^{-1}(E_1 \otimes E_1 + E_4 \otimes E_4) + (E_1 \otimes E_4 + E_4 \otimes E_1) + q^{-1}(1 - q^2)E_2 \otimes E_3.$$

ЛЕММА 4.1. Алгебра $\mathbb{M}_{\delta,q}^4$ имеет два независимых элемента Казимира

$$K_1 = X_1^{\delta-2}X_4^\delta, \quad (4.12)$$

$$K_2 = X_1X_4 - q^{-\delta}X_3X_2. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно непосредственно проверить, что оба выражения коммутируют с образующими $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$.

Элемент Казимира K_2 (4.13) – это квантовый определитель, $K_2 = \det_q \mathbf{X}$. В неприводимом модуле над $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ элемент Казимира $K_2 = \varepsilon r^2 \in \mathbb{R}$ является скаляром. Это позволяет определить времениподобную часть $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3+}$ ($\varepsilon = 1$), пространственноподобную часть $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3-}$ ($\varepsilon = -1$) и световой конус $\mathbf{C}_{\delta,q}$ ($\varepsilon = 0$).

4.2. Стандартный базис. Представим матрицу $\mathbf{X}$ в базисе из сигма-матриц как

$$\mathbf{X} = \sum_{a=0}^3 Y_a \sigma_a.$$

Преимуществом этого базиса является то, что его образующие самосопряжены относительно инволюции $Y_a^* = Y_a$. Пусть $\theta = \ln q$, $0 < q \leq 1$, и

$$\begin{aligned} c_1(\theta, \delta) &= \frac{\text{ch } \theta\delta + \text{ch } \theta(2 - \delta)}{2}, & c_2(\theta, \delta) &= \frac{\text{ch } \theta\delta - \text{ch } \theta(2 - \delta)}{2}, \\ c_3(\theta, \delta) &= \frac{\text{sh } \theta\delta + \text{sh } \theta(2 - \delta)}{2}, & c_4(\theta, \delta) &= \frac{\text{sh } \theta\delta - \text{sh } \theta(2 - \delta)}{2}. \end{aligned}$$

В терминах Y_a коммутационные соотношения в алгебре $\mathbb{M}_{\delta,q}^4$ можно записать в виде

$$Y_1 Y_0 = c_1 Y_0 Y_1 + c_2 Y_3 Y_1 - i c_3 Y_0 Y_2 - i c_4 Y_3 Y_2, \quad (4.14)$$

$$Y_1 Y_3 = c_2 Y_0 Y_1 + c_1 Y_3 Y_1 - i c_4 Y_0 Y_2 - i c_3 Y_3 Y_2, \quad (4.15)$$

$$Y_2 Y_0 = i c_3 Y_0 Y_1 + i c_4 Y_3 Y_1 + c_1 Y_0 Y_2 + c_2 Y_3 Y_2, \quad (4.16)$$

$$Y_2 Y_3 = i c_4 Y_0 Y_1 + i c_3 Y_3 Y_1 + c_2 Y_0 Y_2 + c_1 Y_3 Y_2, \quad (4.17)$$

$$[Y_1, Y_2] = \frac{i}{2} q^{\delta-2} (1 - q^2) (Y_0^2 - Y_3^2), \quad (4.18)$$

$$[Y_0, Y_3] = 0. \quad (4.19)$$

Заметим, что $c_1(\theta, \delta) \rightarrow 1$ при $q \rightarrow 1$, в то время как $c_j \rightarrow 0$, $j = 2, 3, 4$, и мы приходим к коммутативному пространству $\mathbb{M}^{1,3} = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$.

Операторы Казимира принимают вид

$$K_1 = (Y_0 + Y_3)^{\delta-2} (Y_0 - Y_3)^{\delta},$$

$$K_2 = \left(1 - \frac{1 - q^{-2}}{2}\right) Y_0^2 - q^{-\delta} Y_1^2 - q^{-\delta} Y_2^2 - \left(1 - \frac{1 - q^{-2}}{2}\right) Y_3^2.$$

4.3. Действие квантовой группы Лоренца на $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$. Начнем с пары стандартных алгебр Хопфа [8]. Первая из них, $\mathcal{U}_q(SL_2)$, порождается операторами A, B, C, D и единицей 1 с соотношениями

$$AD = DA = 1, \quad AB = qBA, \quad BD = qDB,$$

$$AC = q^{-1}CA, \quad CD = q^{-1}DC, \quad (4.20)$$

$$[B, C] = \frac{A^2 - D^2}{q - q^{-1}}.$$

Имеется копия этой алгебры $\mathcal{U}_q^*(SL_2)$, порождаемая A^*, B^*, C^*, D^* с соотношениями, индуцированными (4.20) в соответствии с равенством $U^*V^* = (VU)^*$. Эти образующие коммутируют с A, B, C, D .

Пара $\mathcal{U}_q(SL_2), \mathcal{U}_q^*(SL_2)$ образует алгебру Хопфа $U_q^{(s)}(SL_2)$, в которой коумножение и антипод получаются путем согласованного твистования [9]:

$$\Delta(A) = A \otimes A,$$

$$\Delta(B) = A \otimes B + B \otimes D(A^*)^s, \quad (4.21)$$

$$\Delta(C) = A \otimes C + C \otimes D(A^*)^{-s};$$

$$S \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -q^{-1}(A^*)^{-s}B \\ -q(A^*)^sC & A \end{pmatrix}; \quad (4.22)$$

$$\Delta(A^*) = A^* \otimes A^*,$$

$$\Delta(B^*) = A^* \otimes B^* + B^* \otimes D^* A^s, \quad (4.23)$$

$$\Delta(C^*) = A^* \otimes C^* + C^* \otimes D^* A^{-s};$$

$$S \begin{pmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^* & -qA^{-s}B^* \\ -q^{-1}A^sC^* & A^* \end{pmatrix},$$

и

$$\epsilon(A) = 1, \quad \epsilon(B, C) = 0. \quad (4.24)$$

Имеются два элемента Казимира в $U_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$, которые коммутируют со всеми операторами $u \in U_q(SL_2(\mathbb{C}))$,

$$\Omega_q := \frac{(q^{-1} + q)(A^2 + A^{-2}) - 4}{2(q^{-1} - q)^2} + \frac{BC + CB}{2}, \quad (4.25)$$

$$\tilde{\Omega}_q := \frac{(q^{-1} + q)(A^{*2} + A^{*-2}) - 4}{2(q^{-1} - q)^2} + \frac{B^*C^* + C^*B^*}{2}. \quad (4.26)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Пространство $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ является правым модулем над алгеброй Хопфа $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим действие квантовой группы $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ на $\mathbb{M}_{\delta,q}^4$ как

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} X_1 & q^{-\frac{1}{2}} X_2 \\ q^{\frac{1}{2}} X_3 & q^{-\frac{1}{2}} X_4 \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ X_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot A^* = \begin{pmatrix} q^{\frac{1-\delta}{s}} X_1 & q^{\frac{1-\delta}{s}} X_2 \\ q^{\frac{\delta-1}{s}} X_3 & q^{\frac{\delta-1}{s}} X_4 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Непосредственные вычисления показывают, что коммутационные соотношения в $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ согласованы с коумножением в $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$. Кроме того, $(X_j \cdot a)^* = a^* \cdot X_j^*$.

Точно так же можно определить левое действие $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ на $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$.

Пусть

$$w(m, k, l, n) = X_3^m X_1^k X_4^l X_2^n$$

— упорядоченный моном. Определим пространство Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})$ как совокупность рядов с быстроубывающими коэффициентами,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3}) &= \left\{ \dagger f(X_3, X_1, X_4, X_2) \dagger = \sum_{m,k,l,n} a_{l,m,k,n} w(m, k, l, n), \quad a_{l,m,k,n} \in \mathbb{C} \right\}, \\ |a_{l,m,k,n}| &\leq (1 + m^2 + k^2 + l^2 + n^2)^j \quad \text{для любого } j \in \mathbb{N} \text{ при } |m|, |k|, |l|, |n| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.31)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Интеграл Джексона*

$$\langle f \rangle = \int d_{q^2} X_3 d_{q^2} X_1 d_{q^2} X_4 d_{q^2} X_2 \dagger f(X_1, X_2, X_3, X_4) \dagger \quad (4.32)$$

является функционалом на $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{1,3})$, инвариантным относительно действия $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$,

$$\langle f \cdot u \rangle = \epsilon(u) \langle f \rangle,$$

где $\epsilon(u)$ — коединица (4.24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет следовать из действий генераторов A, A^*, B, C на упорядоченные мономы $w(m, k, l, n)$, представленных в разделе 9.

5. МОДУЛЬ НАД $\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$

Здесь мы построим представления $\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$ в бесконечномерных пространствах E^+, E^-, E^0 (правые модули над $\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$). Представления алгебр, удовлетворяющих более общим уравнениям отражения, были получены в [7]. Эти три типа пространств соответствуют времениподобной части $K_2 > 0$, пространственноподобной части $K_2 < 0$ и световому конусу $K_2 = 0$, соответственно. Здесь мы считаем, что $\delta \in \mathbb{Z}$.

5.1. Времениподобная часть ($K_2 > 0$). Определим модуль $E_{\alpha, \rho}^+$, зависящий от $\alpha, \rho \in \mathbb{R}$. Рассмотрим $\mathbb{C}$ -значные функции на $\mathbb{Z}$ -решетке, порожденной q^{2j} . Используя интеграл Джексона, введем эрмитову метрику

$$\langle f|g \rangle = \int d_{q^2} u d_{q^2} \bar{u} \mathbf{e}_{q^2}(u\bar{u}) \overline{f(u)} g(u), \quad (5.1)$$

где $\mathbf{e}_{q^2}(u) = e_{q^2}((1-q^2)u)$ задается формулой (П.1), а интеграл Джексона определяется двойным рядом (см. формулу (П.5))

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle = (1-q^2)^2 \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} q^{2(m+n)} [\mathbf{e}_{q^2}(q^{2(m+n)}) \overline{f(q^{2m})} g(q^{2n}) + \\ + \mathbf{e}_{q^2}(-q^{2(m+n)}) \overline{f(-q^{2m})} g(-q^{2n})]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Модуль $E_{\alpha, \rho}^+$ — это пространство функций на решетке с нормой $\langle f|f \rangle^{1/2} < \infty$. Пусть $\lambda = \lambda(\delta, q) = q^{\frac{\delta}{2}-1}(1-q^2)^{\frac{1}{2}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Пространство $E_{\rho, \alpha}^+$ ($\rho \in \mathbb{R}^+, \alpha \in \mathbb{R}^+$) является правым модулем алгебры $\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$*

$$\begin{aligned} f(u)X_1 &= \alpha^{-1}\rho f(uq^\delta), & f(u)X_2 &= \lambda\rho D_u f(u), \\ f(u)X_3 &= -\lambda\rho i f(u), & f(u)X_4 &= \alpha\rho f(uq^{2-\delta}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Элементы Казимира на $E_{\rho, \alpha}^+$ принимают значения $K_2 = \rho^2 q^{-2} = R^2$, $K_1 = \alpha^2 \times \rho^{2\delta-2}$. Инволюция соответствует эрмитову сопряжению

$$\langle fX_a|g \rangle = \langle f|X_a^*g \rangle, \quad (5.4)$$

а оператор D_u определяется формулой (П.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем оператор сдвига $T_u: f(u) \rightarrow f(uq)$, оператор умножения $u: f(u) \rightarrow uf(u)$ и разностный оператор (П.2),

$$\begin{aligned} f(u)(u \cdot T_q) &= qf(u)(T_u \cdot u), & f(u)(D_u \cdot T_u) &= q^{-1}f(u)(T_u \cdot D_u), \\ f(u)[D_u, u] &= -f(uq^2). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Они эквивалентны коммутационным соотношениям (4.1)–(4.5) для операторов (5.3).

Формула сопряжения для $X_2^* = X_3$ получается из соотношения

$$D_u \mathbf{e}_{q^2}(au) = a \mathbf{e}_{q^2}(au).$$

Операторы сдвига для X_1 и X_4 самосопряжены вследствие (5.2).

Заметим, что оператор $X_1 + X_4$ действует следующим образом:

$$f(u) \rightarrow \rho(\alpha^{-1} f(uq^\delta) + \alpha f(uq^{2-\delta})).$$

Так как α и ρ положительны, он положительно определен, $\langle (X_1 + X_4)f | f \rangle > 0$, если $f \neq 0$. Это согласуется с классическим пределом $(X_1 + X_4)/2 \rightarrow y_0$, и $y_0 > 0$.

5.2. Пространственноподобная часть ($K_2 < 0$). Заменяем меру в интеграле (5.1), положив

$$\langle f | g \rangle = \int d_{q^2} u d_{q^2} \bar{u} \mathbf{e}_{q^2}(-u\bar{u}) \overline{f(u)} g(u). \quad (5.6)$$

Интеграл определяет эрмитово спаривание в модуле $E_{\alpha, \rho}^-$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Пространство $E_{\rho, \alpha}^-$ ($\alpha, \rho \in \mathbb{R}^+$) является правым модулем алгебры $\mathbb{M}_{\delta, q}^{1,3}$*

$$\begin{aligned} f(u)X_1 &= \alpha^{-1} \rho f(uq^\delta), & f(u)X_2 &= \lambda \rho D_u f(u), \\ f(u)X_3 &= \lambda \rho u f(u), & f(u)X_4 &= -\alpha \rho f(uq^{2-\delta}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\text{с } K_2 = -R^2 = -\rho^2 q^{-2} \text{ и } K_1 = (-1)^\delta \alpha^2 \rho^{2\delta-2}.$$

Доказательство этого предложения точно такое же, как и предыдущего. Нужно только заменить знак в выражении для меры и в определении X_3, X_4 .

В этом случае оператор $X_1 + X_4$ также не является положительно определенным, как и в классическом описании пространственноподобной части.

5.3. Световой конус $K_2 = 0$. Рассмотрим пространство E^0 голоморфных функций на $\mathbb{C}^*$, снабженное эрмитовой формой

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dw}{w} \overline{f(w)} g(w). \quad (5.8)$$

Справедливость следующего предложения устанавливается непосредственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *E^0 является правым модулем над световым конусом $\mathbb{C}_{\delta, q}^{1,3}$*

$$\begin{aligned} f(w)X_1 &= f(wq^\delta), & f(w)X_2 &= q^{\frac{\delta-1}{2}} w^{-1} f(wq), \\ f(w)X_3 &= q^{\frac{\delta-1}{2}} w f(wq), & f(w)X_4 &= f(wq^{2-\delta}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

с элементами Казимира $K_2 = 0$ и $K_1 = 1$.

6. ОРИСФЕРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

6.1. Орисферические образующие. Введем другую совокупность образующих — некоммутативный аналог орисферических координат (Z^*, H, Z, R) ($H^* = H$, $R^* = R$, $(Z^*)^* = Z$):

$$X_1 = RH, \quad X_2 = RHZ, \quad X_3 = RZ^*H, \quad (6.1)$$

$$X_4 = R(Z^*HZ + \varepsilon H^{-1}), \quad \varepsilon = \pm 1, 0. \quad (6.2)$$

Определяющие соотношения

$$\begin{aligned} ZH &= q^{-\delta}HZ, & Z^*H &= q^\delta HZ^*, & [R, H] &= [R, Z] = [R, Z^*] = 0, \\ ZZ^* &= q^{2\delta-2}Z^*Z - \varepsilon q^{\delta-2}(1-q^2)H^{-2} \end{aligned} \quad (6.3)$$

индуцируются соотношениями (4.1)–(4.5). Элементами Казимира являются

$$K_2 = \varepsilon R^2, \quad K_1 = R^{2\delta-2}H^{\delta-2}(Z^*HZ + \varepsilon H^{-1})^\delta. \quad (6.4)$$

Обратные формулы имеют вид

$$H = R^{-1}X_1, \quad Z = X_1^{-1}X_2, \quad Z^* = X_3X_1^{-1}, \quad R = \varepsilon K_1. \quad (6.5)$$

В терминах орисферических образующих действия $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ имеют вид

$$\begin{aligned} Z^*.A &= z^*, & H.A &= q^{\frac{1}{2}}H, & Z.A &= q^{-1}z, & R.A &= R, \\ Z^*.A^* &= q^{\frac{2\delta-2}{s}}Z^*, & H.A^* &= q^{\frac{\delta-1}{s}}H, & Z.A^* &= Z, & R.A^* &= R, \\ Z^*.B &= 0, & H.B &= 0, & Z.B &= q^{-\frac{1}{2}}, & R.B &= 0, \\ Z^*.C &= q^{\frac{3}{2}-\delta}H^{-2}, & H.C &= HZ, & Z.C &= -q^{\frac{1}{2}}Z^2, & R.C &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из этих формул следует, что R является инвариантом относительно действия $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$, $R.u = \varepsilon(u)R$.

Определим аналог пространства Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3})$ (4.31) в терминах упорядоченных мономов $\widehat{w}(m, k, n)R^l = Z^{*m}H^kZ^nR^l$.

Так как R — элемент центра, его положение несущественно. Пусть

$$\dagger f(Z^*, H, Z, R)\dagger = \sum_{m,k,n,l} a_{m,k,n,l} \widehat{w}(m, k, n)R^l, \quad a_{m,k,n,l} \in \mathbb{C}. \quad (6.7)$$

Для $\mathcal{S}(\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3})$ коэффициенты удовлетворяют условию

$$|a_{m,k,l,n}| \leq (1 + m^2 + k^2 + l^2 + n^2)^j \quad \text{для любого } j \in \mathbb{N}, \text{ когда } |m|, |k|, |l|, |n| \rightarrow \infty.$$

Инвариантный интеграл (4.32) является хорошо определенным функционалом на (6.7). Он принимает вид

$$I_{q^2}(f) = \int d_{q^2}Z^* d_{q^2}H d_{q^2}Z d_{q^2}R \dagger f(Z^*, H, Z, R)H\dagger. \quad (6.8)$$

6.2. Однородные пространства. Рассмотрим некоторое неприводимое представление алгебры (6.3). Можно зафиксировать оператор Казимира (6.4): $K_2 = \varepsilon R^2$, $R^2 = r^2 \in \mathbb{R}^+$. Это позволяет определить некоммутативные аналоги пространств Лобачевского и конус. Зафиксируем идеал $I_\varepsilon = \{K_2 - \varepsilon r^2 = 0\}$. Тогда

$$\mathcal{S}(\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3})/I_\varepsilon \sim H_3 \quad (\varepsilon = 1), \quad dS_3 \quad (\varepsilon = -1), \quad \mathbf{C}_{\delta,q}^{1,3} \quad (\varepsilon = 0).$$

Как было показано выше, действия квантовой группы Лоренца сохраняют эти пространства. Это оправдывает введение понятий однородных пространств в некоммутативном случае. Мы можем непосредственно определить их образующие, используя орисферическое описание $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. *Некоммутативное пространство Лобачевского $\mathbf{I}_{\delta,q}$ (H_3), некоммутативное мнимое пространство Лобачевского $\mathbf{II}_{\delta,q}$ (dS_3) и некоммутативный конус $\mathbf{C}_{\delta,q}^{1,3}$ суть унитарные ассоциативные алгебры с антиинволюцией и с определяющими соотношениями*

$$\begin{aligned} ZH &= q^{-\delta} HZ, & Z^*H &= q^\delta HZ^*, \\ ZZ^* &= q^{2\delta-2} Z^*Z - \varepsilon q^{\delta-2} (1 - q^2) H^{-2}, \\ (Z)^* &= Z^*, & H^* &= H, \\ H_3 &\sim \varepsilon = 1, & dS_3 &\sim \varepsilon = -1, & \mathbf{C}_{\delta,q}^{1,3} &\sim \varepsilon = 0. \end{aligned}$$

Кроме того, определим некоммутативный абсолют.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.2. *Некоммутативный абсолют $\Xi_{\delta,q}$ — это ассоциативная алгебра с двумя образующими и с коммутационным соотношением*

$$ZZ^* = q^{-2+2\delta} Z^*Z. \quad (6.9)$$

6.3. Представления орисферических образующих. Для времениподобной части, $\varepsilon = 1$, рассмотрим пространство $E_{\alpha,\rho}^+$. Из (5.3), (6.1), (6.2) имеем

$$\begin{aligned} f(u)H &= \rho f(uq^\delta), \\ f(u)Z &= \alpha^{-1} \lambda \frac{f(uq^{-\delta}) - f(uq^{2-\delta})}{(1 - q^2)} u^{-1}, & f(u)Z^* &= -\alpha^{-1} q^{-\delta} \lambda u f(uq^{-\delta}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

и $K_2 = \rho^2 q^{-2}$.

Действуя точно так же, представим пространственноподобную часть ($\varepsilon = -1$) $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ в пространстве $E_{\alpha,\rho}^-$ в следующем виде. Орисферические образующие H, Z задаются, как и выше в (6.10), в то время как

$$f(u)Z^* = q^{-\delta} \lambda u f(uq^{-\delta}).$$

Орисферические образующие, порождающие световой конус $\mathbf{C}_{\delta,q}^{1,3}$, действуют в пространстве E^0 (5.8) следующим образом:

$$f(w)H = f(wq^\delta), \quad (6.11)$$

$$f(w)Z = q^{\frac{\delta-1}{2}} w f(wq^{1-\delta}), \quad f(w)Z^* = q^{\frac{3\delta-1}{2}} w^{-1} f(wq^{1-\delta}). \quad (6.12)$$

Модуль E^0 служит одновременно и модулем некоммутативного абсолюта $\Xi_{\delta,q}$. Из (6.12) нетрудно вывести, что образующие Z, Z^* , которые удовлетворяют (6.9), представляются следующим образом:

$$f(w)Z = wf(wq^{1-\delta}), \quad f(w)Z^* = w^{-1}f(wq^{1-\delta}). \quad (6.13)$$

7. НЕКОММУТАТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{M}_q^{2,2}$

7.1. Определение. Позже мы увидим, что пространство $\mathbb{M}_q^{2,2}$ связано с алгеброй Хопфа $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$. Предполагается, что $|q| = 1$ ($q = e^{i\theta}$). В этом случае квадратичные соотношения (4.1)–(4.5) выполняются только при $\delta = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Некоммутативное 4d-пространство $\mathbb{M}_q^{2,2}$ ($|q| = 1$)* — это унитарная ассоциативная $*$ -алгебра с четырьмя образующими X_j , $j = 1, \dots, 4$, которые удовлетворяют квадратичным соотношениям

$$X_1X_3 = q^{-1}X_3X_1, \quad X_1X_2 = qX_2X_1, \quad (7.1)$$

$$[X_2, X_3] = (q^{-1} - q)X_1X_4, \quad (7.2)$$

$$X_2X_4 = qX_4X_2, \quad (7.3)$$

$$X_3X_4 = q^{-1}X_4X_3, \quad (7.4)$$

$$[X_1, X_4] = 0, \quad (7.5)$$

и с антиинволюцией

$$X_1^* = X_1, \quad X_2^* = q^{-1}X_2, \quad X_3^* = qX_3, \quad X_4^* = X_4. \quad (7.6)$$

Уравнение отражения, описывающее эти соотношения, сводится к стандартной РТТ-форме

$$R(q)\mathbf{X}^{(1)}\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{X}^{(2)}\mathbf{X}^{(1)}R^\dagger(q), \quad (7.7)$$

так как $R^{(2)} = \text{Id} \otimes \text{Id}$ при $\delta = 1$ и

$$R(q) = q^{-1}(E_1 \otimes E_1 + E_4 \otimes E_4) + (E_1 \otimes E_4 + E_4 \otimes E_1) + q^{-1}(1 - q^2)E_3 \otimes E_2.$$

Классический предел $\mathbb{M}_q^{2,2}(SL(2, \mathbb{R}))$ приводит к алгебре $\mathbb{M}^{2,2}(SL_2(\mathbb{R}))$. Это позволяет отождествить пространство $\mathbb{M}_q^{2,2}$ с некоммутативной деформацией пространства $\mathbb{M}^{2,2}$.

Из леммы 4.1 имеем вид элементов Казимира для $\mathbb{M}_q^{2,2}$:

$$K_1 = X_1^{-1}X_4, \quad (7.8)$$

$$K_2 = X_1X_4 - q^{-1}X_3X_2. \quad (7.9)$$

Заметим, что K_2 не является самосопряженным. Таковым является $\tilde{K}_2 = (1 + q^2)K_2$.

7.2. Действие квантовой группы $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ на пространстве $\mathbb{M}_q^{2,2}$. Рассмотрим алгебру Хопфа $\mathcal{U}_q(SL_2)$ (4.20). Следующие условия делают ее $*$ -алгеброй Хопфа $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$:

$$A^* = A, \quad B^* = -B, \quad C^* = -C$$

с нетривиальным коумножением (4.21)

$$\begin{aligned} \Delta(A) &= A \otimes A, \\ \Delta(B) &= A \otimes B + B \otimes D, \\ \Delta(C) &= A \otimes C + C \otimes D \end{aligned}$$

и нетривиальным антиподом (4.22)

$$S \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -q^{-1}B \\ -qC & A \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Элемент Казимира в $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ имеет вид

$$\Omega_q := \frac{(q^{-1} + q)(A^2 + A^{-2}) - 4}{2(q^{-1} - q)^2} + \frac{BC + CB}{2}. \quad (7.11)$$

Предложение 7.1. $\mathbb{M}_{\delta,q}^{2,2}$ является модулем над $*$ -алгеброй Хопфа $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$.

Доказательство. Определим действие $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ на $\mathbb{M}_q^{2,2}$:

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}}X_1 & q^{-\frac{1}{2}}X_2 \\ q^{\frac{1}{2}}X_3 & q^{-\frac{1}{2}}X_4 \end{pmatrix}, \quad (7.12)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & X_1 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} X_2 & 0 \\ X_4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Они получаются из (4.27)–(4.29) при $\delta = 1$.

Согласованность умножения в $\mathbb{M}_{\delta,q}^{2,2}$ и коумножения в $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ следует из предложения 4.1.

Определим также левое действие $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ на $\mathbb{M}_q^{2,2}$:

$$A. \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}}X_1 & q^{-\frac{1}{2}}X_2 \\ q^{\frac{1}{2}}X_3 & q^{\frac{1}{2}}X_4 \end{pmatrix},$$

$$B. \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X_3 & -X_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C. \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -X_1 & -X_2 \end{pmatrix}.$$

Это действие также согласовано с умножением в $\mathbb{M}_q^{2,2}$.

В дополнение к сказанному из (7.6) и (7.10) имеем

$$X_j^* \cdot S(u)^* = (X_j \cdot u)^*, \quad u = A, B, C.$$

7.3. Орисферические образующие и однородные пространства. Некоммутативный аналог орисферических образующих (Z_2, H, Z_1, R) на $\mathbb{M}_q^{2,2}$ принимает вид

$$X_1 = RH, \quad X_2 = RHZ_1, \quad X_3 = RZ_2H, \quad (7.15)$$

$$X_4 = R(Z_2HZ_1 + \varepsilon H^{-1}), \quad \varepsilon = \pm 1, 0. \quad (7.16)$$

Из (7.6) следует, что

$$Z_2^* = Z_2, \quad H^* = H, \quad Z_1^* = Z_1, \quad R^* = R.$$

Определяющие соотношения

$$\begin{aligned} Z_1H &= q^{-1}HZ_1, & Z_2H &= qHZ_2, & [R, H] &= [R, Z_1] = [R, Z_2] = 0, \\ [Z_1, Z_2] &= \varepsilon(q - q^{-1})H^{-2} \end{aligned} \quad (7.17)$$

согласованы с соотношениями (7.1)–(7.5). Элементы Казимира принимают вид

$$K_2 = \varepsilon R^2, \quad K_1 = H^{-1}(Z_2HZ_1 + \varepsilon H^{-1}). \quad (7.18)$$

Орисферические координаты могут быть выражены через X_j :

$$H = R^{-1}X_1, \quad Z_1 = X_1^{-1}X_2, \quad Z_2 = X_3X_1^{-1}, \quad R^2 = \varepsilon K_2. \quad (7.19)$$

В орисферических координатах правое действие $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ принимает вид

$$\begin{aligned} Z_2.A &= Z_2, & H.A &= q^{\frac{1}{2}}H, & Z_1.A &= q^{-1}Z_1, & R.A &= R, \\ Z_2.B &= 0, & H.B &= 0, & Z_1.B &= q^{-\frac{1}{2}}, & R.B &= 0, \\ Z_2.C &= q^{\frac{1}{2}}H^{-2}, & H.C &= HZ_1, & Z_1.C &= -q^{\frac{1}{2}}Z_2^2, & R.C &= 0. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Из этих соотношений следует, что R является инвариантом по отношению к действию $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{M}^{2,2}_q)$ – алгебра упорядоченных функций Шварца на $\mathbb{M}^{2,2}_q$. Рассмотрим неприводимое представление ассоциативной алгебры $\mathbb{M}^{2,2}_q$. Зафиксируем значения оператора Казимира (7.18), $K_2 = \varepsilon R^2$, $R^2 = r^2 \in \mathbb{R}^+$, и идеала $I_\varepsilon = \{K_2 - \varepsilon R^2 = 0\}$. Это позволяет определить некоммутативные аналоги $AdS_3^\pm$ и конуса $\mathbb{C}_q^{2,2}$

$$\mathcal{S}(\mathbb{M}^{2,2}_q)/I_\varepsilon \sim AdS_3^\pm \quad (\varepsilon = \pm 1), \quad \mathbb{C}_q^{2,2} \quad (\varepsilon = 0).$$

Прямое описание этих алгебр в орисферических координатах имеет следующий вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. Некоммутативные пространства $AdS_3^\pm$ и конус $\mathbb{C}_q^{2,2}$ суть унитарные ассоциативные алгебры с антиинволюцией и с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} Z_1H &= q^{-1}HZ_1, & Z_2H &= qHZ_2, \\ [Z_1, Z_2] &= \varepsilon(q - q^{-1})H^{-2}, \end{aligned}$$

где $AdS_3^\pm \rightarrow (\varepsilon = \pm 1)$ и $\mathbb{C}_q^{2,2} \rightarrow (\varepsilon = 0)$.

7.4. Некоммутативное пространство $\widetilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. *Некоммутативное четырехмерное пространство $\widetilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$, $q \in (0, 1]$, — это унитарная ассоциативная $*$ -алгебра с четырьмя образующими X_j , $j = 1, \dots, 4$, которые удовлетворяют квадратичным соотношениям (7.1)–(7.5) и с антиинволюцией*

$$X_1^* = X_4, \quad X_2^* = qX_3. \quad (7.21)$$

Эта алгебра была рассмотрена в [10].

Коммутационные соотношения в $\widetilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$ те же, что и в $\mathbb{M}_q^{2,2}$, с отличием в инволюции (ср. (7.6) и (7.21)) и в вещественности q . Следовательно, мы имеем те же элементы Казимира K_1 (7.8) и K_2 (7.9). Это позволяет определить ассоциативные алгебры

$$\begin{aligned} \widetilde{AdS}_3^\pm &\rightarrow K_2 = \pm r^2 \neq 0, \\ \widetilde{\mathbb{C}}_q^{2,2} &\rightarrow K_2 = 0. \end{aligned}$$

Определим алгебру Хопфа $\mathcal{U}_q(SU(1, 1))$ как алгебру с антиинволюцией

$$A^* = A, \quad B^* = -C, \quad C^* = -B. \quad (7.22)$$

Алгебра Хопфа $\mathcal{U}_q(SU(1, 1)) \oplus \mathcal{U}_q(SU(1, 1))$ действует на $\widetilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$ точно так же, как алгебра $\mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R})) \oplus \mathcal{U}_q(SL_2(\mathbb{R}))$ действует на $\mathbb{M}_q^{2,2}$ (предложение 7.1). Антиинволюции в $\mathcal{U}_q(SU(1, 1))$ и в $\widetilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$ согласованы: $S(u)^* \cdot X_j^* = (X_j \cdot u)^*$, $u \in \mathcal{U}_q(SU(1, 1))$. Можно проверить, что K_2 является инвариантом относительно этого действия. Следовательно, действие $\mathcal{U}_q(SU(1, 1)) \oplus \mathcal{U}_q(SU(1, 1))$ хорошо определено на $\widetilde{AdS}_3^\pm$ и $\widetilde{\mathbb{C}}_q^{2,2}$. В классическом пределе мы приходим к $\mathbb{M}^{2,2}$ с сигнатурой $(+, -, -, +)$.

8. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕКОММУТАТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ МИНКОВСКОГО

8.1. Квадратичные алгебры Пуассона. Сначала рассмотрим пространство Минковского $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$. В пределе $q \rightarrow 1$ мы получаем в первом порядке по $\theta = \ln q$ пуассоновскую алгебру $\mathcal{M}^{1,3}$. Это коммутативная алгебра функций на $\mathbb{M}^{1,3}$, снабженная квадратичными скобками Пуассона

$$\{x_j, x_k\}_2 = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{X_j X_k - X_k X_j}{\theta}.$$

В явном виде скобки записываются как

$$\{x_1, x_2\}_2 = \delta x_1 x_2, \quad \{x_1, x_3\}_2 = -\delta x_1 x_3, \quad (8.1)$$

$$\{x_4, x_2\}_2 = (2 - \delta) x_2 x_4, \quad \{x_4, x_3\}_2 = -(2 - \delta) x_3 x_4, \quad (8.2)$$

$$\{x_2, x_3\}_2 = -2x_1 x_4, \quad \{x_1, x_4\}_2 = 0. \quad (8.3)$$

Кроме того, существует антиинволюция на $\mathcal{M}^{1,3}$, которая индуцируется операцией $*$ на алгебре $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$,

$$\{x_j, x_k\}_2^* = -\{x_j^*, x_k^*\}_2. \quad (8.4)$$

Она принимает вид

$$x_1^* = x_1, \quad x_4^* = x_4, \quad x_2^* = x_3.$$

Имеются два элемента Казимира

$$k_1 = x_1 x_4 - x_2 x_3, \quad k_2 = x_1^{\delta-2} x_4^\delta. \quad (8.5)$$

Алгебра Пуассона $\mathcal{M}^{1,3}$ может быть представлена в виде классического уравнения отражения. Пусть $\theta = \ln q$. Квантовые R -матрицы (4.8) имеют разложение $R = \text{Id} \otimes \text{Id} + \theta r$, $R^{(2)} = \text{Id} \otimes \text{Id} + \theta r^{(2)}$, где

$$r = -(E_1 \otimes E_1 + E_4 \otimes E_4) - 2E_3 \otimes E_2, \quad (8.6)$$

$$r^{(2)} = (\delta - 1)(E_1 \otimes E_4 + E_4 \otimes E_1). \quad (8.7)$$

Тогда уравнение отражения в квазиклассическом пределе дает

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}_2 = r(\mathbf{x}_1 \otimes \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_2 \otimes \mathbf{x}_1)r^\dagger + \mathbf{x}_2 r^{(2)} \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1 r^{(2)} \mathbf{x}_2. \quad (8.8)$$

Можно проверить, что пуассоновская структура (8.1)–(8.3) может быть получена из этого уравнения.

Перепишем алгебру Пуассона $\mathcal{M}^{1,3}$ в орисферических координатах (2.6), (2.7):

$$\{h, z\}_2 = \delta h z, \quad \{h, \bar{z}\}_2 = -\delta h \bar{z}, \quad \{r, h\}_2 = \{r, z\}_2 = \{r, \bar{z}\}_2 = 0, \quad (8.9)$$

$$\{z, \bar{z}\}_2 = 2(\delta - 1)z\bar{z} - 2\varepsilon h^{-2}. \quad (8.10)$$

Элементами Казимира будут

$$k_1 = \varepsilon r^2, \quad k_2 = h^{-2}(h^2|z| + \varepsilon)^\delta.$$

Симплектические листы этой структуры – это двумерные поверхности

$$\varepsilon r^2 = c_1, \quad h^{-2}(h^2|z| + \varepsilon)^\delta = c_2.$$

Если $\delta = 0, 2$, симплектическими листами являются орисферы, т.е. орбиты унитарной группы. При $\delta = 1$ листы – это орбиты групп, сопряженных $SU(2)$ ($\varepsilon = 1$) или $SU(1, 1)$ ($\varepsilon = -1$).

Квадратичная алгебра Пуассона $\widetilde{\mathcal{M}}^{2,2}$, которая появляется в этом случае, совпадает с (8.1)–(8.3) при $\delta = 1$. Она отличается от $\mathcal{M}^{1,3}$ антиинволюцией

$$x_1^* = x_4, \quad x_2^* = x_3.$$

В случае $\mathbb{M}_q^{2,2}$ нужно положить $q = e^{i\theta}$. Тогда мы получим алгебру Пуассона $\mathcal{M}^{2,2}$

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2\}_2 &= i x_1 x_2, & \{x_1, x_3\}_2 &= -i x_1 x_3, \\ \{x_4, x_2\}_2 &= i x_2 x_4, & \{x_4, x_3\}_2 &= -i x_3 x_4, \\ \{x_2, x_3\}_2 &= -2i x_1 x_4, & \{x_1, x_4\}_2 &= 0 \end{aligned}$$

с антиинволюцией $x_j^* = x_j$. В последних двух случаях классические уравнения отражения упрощаются, так как $r^{(2)} = \text{Id} \otimes \text{Id}$.

8.2. Тригамилтонова структура. Кроме квадратичных скобок введем в функциональных пространствах на пространствах Минковского линейные и канонические скобки. Рассмотрим для простоты случай $\mathcal{M}^{1,3}$. Линейные скобки допускают форму

$$\{x_1, x_2\}_1 = \delta x_2, \quad \{x_1, x_3\}_1 = -\delta x_3, \quad (8.11)$$

$$\{x_4, x_2\}_1 = (\delta - 2)x_2, \quad \{x_4, x_3\}_1 = (2 - \delta)x_3, \quad (8.12)$$

$$\{x_2, x_3\}_1 = -2(x_1 - x_4), \quad \{x_1, x_4\}_1 = 0. \quad (8.13)$$

При $\delta = 1$ это скобки Ли–Пуассона на алгебре Ли $gl(2, \mathbb{R})$. Две функции Казимира этой структуры суть

$$\begin{aligned} k_1 &= (\delta - 2)x_1 - \delta x_4 \sim y_0 - (\delta - 1)y_3, \\ k_2 &= x_2 x_3 - (x_1 - x_4)^2 \sim y_1^2 - y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

Линейные скобки (8.11)–(8.13) могут быть воспроизведены в канонических переменных (v, u) , $\{v, u\} = 1$:

$$x_1 = -\delta uv - \frac{1}{2}k_1, \quad x_2 = v, \quad x_3 = 2u^2v, \quad x_4 = (2 - \delta)uv - \frac{1}{2}k_1.$$

Квантование линейных скобок производится непосредственно, $u \rightarrow U$, $v \rightarrow V = \partial_U$, где V находится справа.

Каноническими скобками являются

$$\{x_2, x_3\}_0 = -2, \quad \{x_1, x_j\}_0 = \{x_4, x_j\}_0 = 0. \quad (8.14)$$

Заметим, что обе пуассоновские структуры антиинвариантны относительно инволюции.

ЛЕММА 8.1. *Пуассоновские структуры на $\mathcal{M}^{1,3}$ образуют квадратичное семейство скобок Пуассона*

$$\{, \}_\lambda = \{, \}_2 + \lambda \{, \}_1 + \lambda^2 \{, \}_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (8.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем новую алгебру $\mathcal{M}_\lambda^{1,3}$ с оператором сдвига

$$x_1 \rightarrow x_1 + \lambda, \quad x_4 \rightarrow x_4 - \lambda, \quad x_2 \rightarrow x_2, \quad x_3 \rightarrow x_3. \quad (8.16)$$

Этот сдвиг не портит тождество Якоби для скобок, и мы получаем (8.15).

9. ОПЕРАТОР ЛАПЛАСА И ЕГО СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

В этом разделе мы подробно рассмотрим случай $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ и коротко восстановим аналогичную конструкцию для $\mathbb{M}_q^{2,2}$. Случай $\tilde{\mathbb{M}}_q^{2,2}$ в данной работе не рассматривается.

9.1. Оператор Лапласа на $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$. Рассмотрим действие $\mathcal{U}_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ на упорядоченные мономы $w(m, k, l, n) = X_2^m X_1^k X_4^l X_3^n$. Из (4.27)–(4.30) следует, что

$$\begin{aligned} w(m, k, l, n).A &= q^{\frac{m+k-l-n}{2}} w(m, k, l, n), \\ w(m, k, l, n).A^* &= q^{\frac{(\delta-1)(m-k+l-n)}{s}} w(m, k, l, n), \\ w(m, k, l, n).B &= q^{\frac{m+k-l-n+1}{2}-\delta(n-1)} \frac{1-q^{2n}}{1-q^2} w(m, k+1, l, n-1) + \\ &\quad + q^{\frac{m+k-5l+3n+5}{2}-\delta(k-l+n+1)} \frac{1-q^{2l}}{1-q^2} w(m+1, k, l-1, n), \\ w(m, k, l, n).C &= q^{\frac{m-3k-l-n+3}{2}+\delta n} \frac{1-q^{2k}}{1-q^2} w(m, k-1, l, n+1) + \\ &\quad + q^{\frac{-3m-3k+3l-n+3}{2}+\delta(k-l+n)} \frac{1-q^{2m}}{1-q^2} w(m-1, k, l+1, n). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Введем групповой оператор

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}.M = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} X_1 & q^{\frac{1}{2}} X_2 \\ q^{\frac{1}{2}} X_3 & q^{\frac{1}{2}} X_4 \end{pmatrix}. \quad (9.2)$$

Он обладает следующими свойствами:

$$M^* = M, \quad \Delta(M) = M \otimes M, \quad \epsilon(M) = 1, \quad S(M) = M^{-1}.$$

Очевидно, M коммутирует с A, B, C и A^* . Определим алгебру Хопфа $\mathcal{U}_q(GL(2, \mathbb{C}))$, порожденную A, B, C и M . Она является квантовой деформацией классической алгебры $GL(2, \mathbb{C})$. Пусть

$$\Omega_{q,M} := \frac{(q^{-\frac{1}{2}} M^{-1} - q^{\frac{1}{2}} M)^2}{(q^{-1} - q)^2}. \quad (9.3)$$

Рассмотрим следующий элемент Казимира в $\mathcal{U}_q(GL(2, \mathbb{C}))$:

$$\Delta_q = [\Omega_q - \Omega_{q,M}] R^{-2}. \quad (9.4)$$

Этот оператор является квантовым аналогом оператора Лапласа Δ (3.3).

Будем считать, что частный разностный оператор не нарушает упорядочения. В частности, это значит, что разностный оператор, примененный к упорядоченному моному $w(m, k, l, n) = X_3^m X_1^k X_4^l X_2^n$, например, по X_1 , имеет вид

$$D_{X_1} w(m, k, l, n) = \frac{1-q^{2k}}{1-q^2} w(m, k-1, l, n).$$

Пусть $T_X f(X) = f(qX)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Действие оператора Лапласа на $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ принимает вид

$$\begin{aligned} f(X_3, X_1, X_4, X_2) \cdot \Delta_q = & \left\{ \frac{1}{(q - q^{-1})^2} [q^{-1}(T_{X_1}^{-1} T_{X_2}^{-1} T_{X_3} T_{X_4}^{-1} - T_{X_1}^{-1} T_{X_2} T_{X_3} T_{X_4}^{-1} + \right. \\ & + T_{X_1}^{-1} T_{X_2} T_{X_3}^{-1} T_{X_4}^{-1} - T_{X_1}^{-1} T_{X_2}^{-1} T_{X_3}^{-1} T_{X_4}^{-1}) - \\ & - q(T_{X_1}^{-1} T_{X_2} T_{X_3} T_{X_4} + T_{X_1} T_{X_2} T_{X_3} T_{X_4} + \\ & + T_{X_1} T_{X_2} T_{X_3} T_{X_4}^{-1} - T_{X_1}^{-1} T_{X_2} T_{X_3} T_{X_4}^{-1})] + \\ & + q^{1+\delta} T_{X_1}^{-k(-\delta+1)} T_{X_2}^{-1} T_{X_3}^{-1} T_{X_4}^{l(1-\delta)} D_{X_2} D_{X_3} + \\ & \left. + q^{5-\delta} T_{X_1}^{-k(\delta+1)} T_{X_2} T_{X_3} T_{X_4}^{-l(3-\delta)} D_{X_1} D_{X_4} \right\} f(X_3, X_1, X_4, X_2). \quad (9.5) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно определить действие элемента Казимира из $U_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ (4.25) на упорядоченные мономы, используя (9.1). Так как

$$w(m, k, l, n) \cdot M = q^{\frac{m+k+l+n}{2}} w(m, k, l, n),$$

из (9.4) получим, что

$$\begin{aligned} w(m, k, l, n) \cdot \Delta_q = & \frac{1}{(1 - q^2)^2} [q^{m-k-l-n+1} + q^{m-k+l+n+3} + q^{m+k-l+n+3} + \\ & + q^{-m-k-l+n+1} - q^{-m-k-l-n+1} - q^{m+k+l+n+3} - \\ & - q^{m-k-l+n+1} - q^{m-k-l+n+3}] w(m, k, l, n) + \\ & + q^{-m-k+l-n+1+\delta(k-l+1)} \frac{(1 - q^{2m})(1 - q^{2n})}{(1 - q^2)^2} w(m - 1, k + 1, l + 1, n - 1) + \\ & + q^{m-k-3l+n+5-\delta(k-l+1)} \frac{(1 - q^{2k})(1 - q^{2l})}{(1 - q^2)^2} w(m + 1, k - 1, l - 1, n + 1). \end{aligned}$$

Это соотношение приводит к (9.5).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.1. В классическом пределе $\lim_{q \rightarrow 1} \Delta_q = \Delta$, где Δ определяется формулой (3.3).

9.2. Оператор Лапласа на $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ в орисферических образующих. Определим упорядоченный моном

$$\widehat{w}(m, k, n) = (Z^*)^m H^k Z^n,$$

и положим

$$F(Z^*, H, Z) = \sum_{m,k,n} a_{m,k,n} \widehat{w}(m, k, n).$$

Рассмотрим действие оператора Δ_q на функции из пространства Шварца (4.31).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.2. Действие оператора Казимира Δ_q в орисферических образующих принимает вид

$$\begin{aligned} F(Z^*, H, Z, R) \cdot \Delta_q = & \frac{1}{(1 - q^2)^2} [q^{-1} T_H - q^2 + q T_H^{-1}] F(Z^*, H, Z, R) + \\ & + \varepsilon q^{1-\delta} D_{Z^*} D_Z \dagger H^{-2} T_H^{\delta-1} F(Z^*, H, Z, R) \dagger. \quad (9.6) \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие $U_q^{(s)}(SL(2, \mathbb{C}))$ на орисферические образующие уже определено в (6.6). Отсюда действие A, A^*, B, C на упорядоченный моном $\widehat{w}(m, k, n)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\widehat{w}(m, k, n).A &= q^{-n+\frac{k}{2}}\widehat{w}(m, k, n), \\ \widehat{w}(m, k, n).(A^*)^s &= q^{(1-\delta)(-2m+k)}\widehat{w}(m, k, n), \\ \widehat{w}(m, k, n).B &= q^{-n+\frac{k+1}{2}}\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\widehat{w}(m, k, n-1), \\ \widehat{w}(m, k, n).C &= q^{n-\frac{3(k-1)}{2}}q^{\delta(k-1)}\frac{1-q^{2m}}{1-q^2}\widehat{w}(m-1, k-2, n)- \\ &\quad - q^{-n+\frac{k+3}{2}}\frac{1-q^{2n-2k}}{1-q^2}\widehat{w}(m, k, n+1).\end{aligned}\tag{9.7}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\widehat{w}(m, k, n).\Omega_q &= q^{-k+1}\frac{(1-q^{k+1})^2}{(1-q^2)^2}\widehat{w}(m, k, n) + \\ &\quad + q^{(\delta-1)(k-1)}\frac{(1-q^{2m})(1-q^{2n})}{(1-q^2)^2}\widehat{w}(m-1, k-2, n-1).\end{aligned}\tag{9.8}$$

С другой стороны,

$$\widehat{w}(m, k, n)R^\alpha.M = q^{\frac{\alpha}{2}}\widehat{w}(m, k, n)R^\alpha,\tag{9.9}$$

следовательно,

$$\widehat{w}(m, k, n)R^\alpha.\Omega_{q,M} = \left[\frac{\alpha}{2}\right]_{q^2}^2 \widehat{w}(m, k, n)R^\alpha.$$

Поэтому из (9.4) получим

$$\begin{aligned}\widehat{w}(m, k, n)R^\alpha.\Delta_q &= \frac{q^{-k+1}(1-q^{k+\alpha+1})(1-q^{k-\alpha+1})}{(1-q^2)^2}\widehat{w}(m, k, n)R^\alpha + \\ &\quad + q^{(\delta-1)(k-1)}\frac{(1-q^{2m})(1-q^{2n})}{(1-q^2)^2}\widehat{w}(m-1, k-2, n-1)R^\alpha.\end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к (9.6).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. В классическом пределе формула (9.6) дает оператор Лапласа в орисферических координатах, $\lim_{q \rightarrow 1} \Delta_q = \Delta$, где Δ определяется формулой (3.3).

Наша основная цель – найти собственные функции оператора Δ_q :

$$F_\nu(Z^*, H, Z, R).\Delta_q = \left[\frac{\nu}{2}\right]_{q^2}^2 F_\nu(Z^*, H, Z, R).\tag{9.10}$$

Эти функции выражаются через q^2 -экспоненты (II.1) и q -цилиндрические функции трех типов (II.4). В случае вещественного $q < 1$ они определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(z) &= \frac{1}{(1-q^2)^\alpha \Gamma_{q^2}(\alpha+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q^{(2-\delta)m(m+\alpha)} z^{\alpha+2m}}{(q^2, q^2)_m (q^{2\alpha+2}, q^2)_m 2^{\alpha+2m}}, \\ j &= -\frac{3}{2}\delta^2 + \frac{5}{2}\delta + 2,\end{aligned}\tag{9.11}$$

где $\Gamma_{q^2}(\alpha + 1)$ – q^2 -Г-функция (П.3). При $\delta = 2$ функция $\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(z)$ определена, если $|z|/(2(1 - q^2)) \leq 1$. Можно проверить, что $\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}$ удовлетворяет разностному уравнению (П.4).

Некоммутативный аналог орисферических элементарных гармоник (3.5) имеет следующий вид.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.3. *Базисные решения уравнения (9.10) определяются следующим образом:*

$$F_\nu(Z^*, H, Z, R) = \mathbf{e}(\bar{\mu}Z^*)V_\alpha(H)\mathbf{e}(\mu Z)\Xi_{\nu,\alpha}(R) \quad (\varepsilon \neq 0), \quad (9.12)$$

где $\mu, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$V_\alpha(H) = H^{-1}\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(2(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}|\mu|q^{-\frac{\delta}{2}}H^{-1}), \quad \Xi_{\nu,\alpha}(R) = \frac{1}{R}\mathbf{Z}_\alpha^{(3)}\left(2q^{1-\frac{\nu}{2}}\frac{1-q^\nu}{1-q^2}R\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим решение в виде

$$F_\nu(Z^*, H, Z, R) = V_\alpha(Z^*, H, Z)\Xi_{\nu,\alpha}(R). \quad (9.13)$$

Подставляя его в (9.10) и используя соотношения для коумножения (4.21), решим уравнение

$$\begin{aligned} & (V_\alpha(Z^*, H, Z).\Omega_q)(\Xi_{\nu,\alpha}(R).\Omega_q)R^{-2} - (V_\alpha(Z^*, H, Z).\Omega_{q,M})(\Xi_{\nu,\alpha}(R).\Omega_{q,M})R^{-2} - \\ & - \left[\frac{\nu}{2}\right]_{q^2}^2 V_\alpha(Z^*, H, Z)\Xi_{\nu,\alpha}(R) = 0. \end{aligned}$$

Из (9.7)–(9.9) следует, что равенство можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & (V_\alpha(Z^*, H, Z).\Omega_q)\Xi_{\nu,\alpha}(R)R^{-2} - V_\alpha(Z^*, H, Z)(\Xi_{\nu,\alpha}(R).\Omega_{q,M})R^{-2} - \\ & - \left[\frac{\nu}{2}\right]_{q^2}^2 V_\alpha(Z^*, H, Z)\Xi_{\nu,\alpha}(R) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к равенствам

$$V_\alpha(Z^*, H, Z).\Omega_q - \frac{q^{-\alpha+2} - 2q^2 + q^{\alpha+2}}{(1 - q^2)^2}V_\alpha(Z^*, H, Z) = 0, \quad (9.14)$$

$$\Xi_{\nu,\alpha}(R).\Omega_{q,M} + \left(\frac{q^{-\nu+2} - 2q^2 + q^{\nu+2}}{(1 - q^2)^2}R^2 - \frac{q^{-\alpha+2} - 2q^2 + q^{\alpha+2}}{(1 - q^2)^2}\right)\Xi_{\nu,\alpha}(R) = 0. \quad (9.15)$$

Из (9.2) и (9.3) следует, что последнее равенство можно переписать в виде

$$q\Xi_{\nu,\alpha}(q^{-1}R) - (q^{\alpha+2} + q^{-\alpha+2})\Xi_{\nu,\alpha}(R) + q^3\Xi_{\nu,\alpha}(qR) = q^{3-\nu}(1 - q^\nu)^2\Xi_{\nu,\alpha}(R).$$

Положим $z = 2q^{-\frac{\nu}{2}}(1 - q^\nu)(1 - q^2)^{-1}R$. Тогда мы приходим к формуле (П.4) при $\delta = 1$ и $\mathbf{Z}_\alpha^{(3)}(z) = \Xi_{\nu,\alpha}(R)R$.

Рассмотрим теперь (9.14). Пусть

$$\tilde{V}_\alpha(Z^*, H, Z) = \mathbf{e}(\bar{\mu}Z^*)V_\alpha(H)\mathbf{e}(\mu Z). \quad (9.16)$$

Положим $\varepsilon = \pm 1$ и

$$V_\alpha(H) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(1-q^2)^{2k-2}}{(q^2, q^2)_k (q^{2\alpha+2}, q^2)_k} H^{-\alpha-2k-1}.$$

Подставляя это выражение и (П.1) в (9.16), мы выразим $\tilde{V}_\alpha$ через мономы $\hat{w}(m, k, n)$. Используя действие Ω_q на мономы (9.8), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\bar{\mu}Z^*) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(1-q^2)^{2k-2}}{(q^2, q^2)_k (q^{2\alpha+2}, q^2)_k} q^{-\alpha-2k+2} (1-q^2)(1-q^{2\alpha+2k}) H^{-\alpha-2k-1} \mathbf{e}(\mu Z) - \\ - \varepsilon |\mu|^2 \mathbf{e}(\bar{\mu}Z^*) \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{(1-q^2)^{2k}}{(q^2, q^2)_k (q^{2\alpha+2}, q^2)_k} q^{(\alpha+2k+2)(\delta-1)} H^{-\alpha-2k-3} \mathbf{e}(\mu Z) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты c_k удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$c_{k+1} = -\varepsilon \bar{\mu} \mu c_k q^{2\alpha+4k+2-\delta(\alpha+2k+2)}.$$

Полагая $c_0 = 1$, находим

$$c_k = (-\varepsilon)^k |\mu|^{2k} q^{(2-\delta)k(k+\alpha)-\delta k}.$$

Тогда

$$\mathcal{H}_\alpha(H) = q^{\frac{\delta\alpha}{2}} |\mu|^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-\varepsilon)^k \frac{q^{(2-\delta)k(k+\alpha)} (1-q^2)^{2k}}{(q^2, q^2)_k (q^{2\alpha+2}, q^2)_k} q^{-\frac{\delta}{2}(\alpha+2k)} (\bar{\mu}\mu)^{\frac{\alpha}{2}+k} H^{-\alpha-2k-1}.$$

После замены $2z = (-\varepsilon)^{1/2} q^{-\frac{\delta}{2}} H^{-1}$ эти ряды совпадают с (9.11) с точностью до постоянного множителя.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.3. В классическом пределе мы приходим к предложению 3.1:

$$\lim_{q \rightarrow 1} \mathbf{e}(\bar{\mu}Z^*)V_\alpha(H)\mathbf{e}(\mu Z)\Xi_{\nu,\alpha}(R) = e^{i\mu z + i\bar{\mu}\bar{z}} v_\alpha(h) \chi_{\nu,\alpha}(r).$$

Как и в классическом случае, можно ограничить оператор Δ_q на некоммутативные однородные пространства.

СЛЕДСТВИЕ 9.1. *Сужения оператора Δ_q принимают вид*

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{q,\delta}, (H_3): \quad \Delta_q &= \frac{1}{(1-q^2)^2} [q^3 T_H - 2q^2 + q T_H^{-1}] + q^{1-\delta} D_{Z^*} D_Z H^{-2} T_H^{\delta-1}, \\ \mathbf{IL}_{q,\delta}, (dS_3): \quad \Delta_q &= \frac{1}{(1-q^2)^2} [q^3 T_H - 2q^2 + q T_H^{-1}] - q^{1-\delta} D_{Z^*} D_Z H^{-2} T_H^{\delta-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем некоммутативные деформации классических формул (3.11), (3.12).

СЛЕДСТВИЕ 9.2. *Базисные гармоники некоммутативных пространств H_3 , dS_3 и светового конуса $\mathbf{C}_{q,\delta}^{1,3}$ имеют вид*

$$F_\nu(\bar{z}, h, z) = \mathbf{e}(\mu Z^*) H^{-1} \mathbf{Z}_\alpha^{(j)} (2i\varepsilon^{1/2} |\mu| H^{-1}) \mathbf{e}(\mu Z), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (9.17)$$

и

$$F_\nu(\bar{z}, h, z) = \mathbf{e}(\mu Z^*) H^{\alpha-1} \mathbf{e}(\mu Z), \quad \varepsilon = 0, \quad (9.18)$$

соответственно. Здесь $\alpha^2 = \nu^2 + 1$.

9.3. Случай $\mathbb{M}_q^{2,2}$. Действие $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{R}))$ на $\mathbb{M}_q^{2,2}$ и действие $\mathcal{U}_q(SL(2, \mathbb{C}))$ на $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ совпадают. Отличие лишь в том, что в случае $\mathbb{M}_{\delta,q}^{1,3}$ имеем $|q| = 1$. Вычисления в предыдущих двух пунктах легко повторяются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.4. *Оператор Лапласа Δ_q на $\mathbb{M}_q^{2,2}$ совпадает с оператором Δ_q , определенным в предложении 9.1 при $\delta = 1$.*

Рассмотрим орисферическое описание $\mathbb{M}_q^{2,2}$ в п. 8.3. Пусть

$$F(Z_2, H, Z_1) = \sum_{m,k,n} a_{m,k,n} \hat{w}(m, k, n),$$

где $\hat{w}(m, k, n) = (Z_2)^m H^k Z_1^n$ и $F(Z_2, H, Z_1)$ принадлежат пространству Шварца. Определим действие оператора Δ_q .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5. *Действие оператора Казимира Δ_q на $\mathbb{M}_q^{2,2}$ в орисферических образующих имеет вид*

$$\begin{aligned} F(Z_2, H, Z_1, R) \cdot \Delta_q &= \frac{1}{(1-q^2)^2} [q^3 T_H - 2q^2 + q T_H^{-1}] F(Z_2, H, Z_1, R) + \\ &\quad + \varepsilon D_{Z_2} D_{Z_1} \dagger H^{-2} F(Z_2, H, Z_1, R) \dagger - \\ &\quad - \frac{1}{(1-q^2)^2} [q^3 T_R - 2q^2 + q T_R^{-1}] F(Z_2, H, Z_1, R). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Изучим теперь базисные собственные функции, задающиеся уравнением

$$F_\nu(Z_2, H, Z_1, R) \cdot \Delta_q = \left[\frac{\nu}{2} \right]_{q^2}^2 F_\nu(Z_2, H, Z_1, R).$$

Мы снова приходим к уравнению (П.4) для q -цилиндрических функций, но при $|q| = 1$. Ряды (9.11) в этом случае являются расходящимися. Существует другой подход в теории q -цилиндрических функций, основанный на их интегральных представлениях для произвольных j и любых $q \in \mathbb{C}$. В статье [11] описаны интегральные представления q -функций Макдональда. Мы рассмотрим общие интегральные представления в следующей статье. Как и выше, обозначим эти функции $\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.6. Базисными решениями на пространстве $\mathbb{M}_q^{2,2}$ являются функции

$$F_\nu(Z^*, H, Z, R) = \mathbf{e}(\mu_2 Z_2) V_\alpha(H) \mathbf{e}(\mu_1 Z_1) \Xi_{\nu, \alpha}(R) \quad (\varepsilon \neq 0), \quad (9.20)$$

где $\mu_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$V_\alpha(H) = H^{-1} \mathbf{Z}_\alpha^{(j)} (2(-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\mu_1 \mu_2} q^{-\frac{1}{2}} H^{-1}),$$

$$\Xi_{\nu, \alpha}(R) = \frac{1}{R} \mathbf{Z}_\alpha^{(3)} \left(2q^{1-\frac{\nu}{2}} \frac{1-q^\nu}{1-q^2} R \right).$$

Ограничивая эти решения на $R = r = \text{const}$, мы определяем оператор Клейна–Гордона на некоммутативном пространстве $AdS_3^\pm$:

$$\Delta_q = \frac{1}{(1-q^2)^2} [q^3 T_H - 2q^2 + q T_H^{-1}] + \varepsilon D_{Z_2} D_{Z_1} H^{-2}, \quad (\widetilde{AdS_3}^\pm \Leftrightarrow \pm).$$

Базисные функции на однородном пространстве имеют вид

$$F_\nu(Z_2, H, Z_1) = \mathbf{e}(\mu_2 Z_2) H^{-1} \mathbf{Z}_\alpha^{(j)} (2i\varepsilon^{1/2} \sqrt{\mu_1 \mu_2} H^{-1}) \mathbf{e}(\mu_1 Z_1), \quad \varepsilon = \pm 1,$$

$$F_\nu(Z_2, H, Z_1) = \mathbf{e}(\mu_2 Z_2) H^{\alpha-1} \mathbf{e}(\mu_1 Z_1), \quad \varepsilon = 0 \quad (\alpha^2 = \nu^2 + 1).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы напомним некоторые положения из [12].

q^2 -Экспонента $e_{q^2}(x)$ определяется следующим образом:

$$e_{q^2}(x) = \frac{1}{(x, q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q^2, q^2)_n}, \quad |x| \leq 1. \quad (\text{П.1})$$

Она удовлетворяет разностному уравнению

$$D_x \mathbf{e}(\mu x) = \mu \mathbf{e}(\mu x), \quad \mathbf{e}(x) \equiv e_{q^2}((1-q^2)x),$$

где

$$D_x f(x) = \frac{f(x) - f(q^2 x)}{1 - q^2} x^{-1}. \quad (\text{П.2})$$

q^2 -Гамма-функция задается как

$$\Gamma_{q^2}(x) = \frac{(q^2, q^2)_\infty}{(q^{2x}, q^2)_\infty} (1 - q^2)^{1-x}. \quad (\text{П.3})$$

q^2 -Цилиндрические функции $\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}$ — это решения разностного уравнения

$$\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(q^{-1}z) - (q^{-\alpha} + q^\alpha) \mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(z) + \mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(qz) = q^{-\delta} (1 - q^2)^2 z^2 \mathbf{Z}_\alpha^{(j)}(q^{1-\delta}z). \quad (\text{П.4})$$

В [12] q^2 -цилиндрические функции определяются для $j = 1, 2$. Это уравнение является разностным уравнением второго порядка при $j = 1, 2, 3$. Существует аналитическое продолжение $\mathbf{Z}_\alpha^{(j)}$ в комплексную плоскость $j(\delta)$ [11].

Интеграл Джексона — это ряд

$$\langle f \rangle = (1 - q^2)^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{2m} [f(q^{2m}) + f(-q^{2m})]. \quad (\text{П.5})$$

Благодарности. Мы выражаем благодарность П. Кулишу и С. Харчеву за ценные замечания. М. Ольшанецкий благодарен за предоставленную возможность работать Архузскому университету, где была написана часть этой статьи. Работа была поддержана грантом Президентской программы поддержки ведущих научных школ НШ-1999-2003.2, грантами РФФИ № 03-02-17554 и CRDF RM1-2545.

Список литературы

- [1] *M. R. Douglas, N. A. Nekrasov.* Rev. Mod. Phys. 2001. V. 73. P. 977; hep-th/0106048; *R. J. Szabo.* Phys. Rep. 2003. V. 378. P. 207; hep-th/0109162; *I. Aref'eva, D. M. Belov, A. A. Guryavets, A. S. Koshelev, P. B. Medvedev.* Noncommutative field theories and (super)string field theories. hep-th/0111208.
- [2] *A. Jevicki, S. Ramgoolam.* JHEP. 1999. V. 9904. P. 032; hep-th/9902059; *P. Pouliot.* Class. Quant. Grav. 2004. V. 21. P. 145; hep-th/0306261; *A. Guijosa, D. Lowe.* Phys. Rev. D. 2004. V. 69. P. 106008; hep-th/0312282; *D. Lowe.* Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 104002; hep-th/0407188.
- [3] *J. Lukierski, H. Ruegg, A. Nowicki, V. N. Tolstoi.* Phys. Lett. B. 1991. V. 264. P. 331; *U. Carow-Watamura, M. Schlieker, M. Scholl, S. Watamura.* Z. Phys. C. 1990. V. 48. P. 159.
- [4] *V. K. Dobrev.* Phys. Lett. B. 1994. V. 341. P. 133; *S. Zakrzewski.* Poisson structures on the Poincare group. q-alg/9602001.
- [5] *J. A. de Azcarraga, F. Rodenas.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 1215; q-alg/9510011.
- [6] *J. A. de Azcarraga, P. P. Kulish, F. Rodenas.* Phys. Lett. B. 1995. V. 351. P. 123; hep-th/9411121.
- [7] *П. П. Кулиш.* Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. С. 195; hep-th/9312139.
- [8] *П. Кулиш, Н. Решетихин.* Записки науч. семин. ЛОМИ. 1981. Т. 101. С. 101; *Е. Складчин.* УМН. 1985. Т. 40. С. 214.
- [9] *М. А. Ольшанецкий, В.-Б. К. Позов.* ТМФ. 2002. Т. 130. С. 355; math.QA/0110182.
- [10] *L. L. Vaksman, L. I. Korogodsky.* Harmonic analysis on quantum hyperboloids. Preprint ITPH-90-27P. Kiev, 1990.
- [11] *S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov-Tian-Shansky.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 225. P. 573; hep-th/0102180.
- [12] *Дж. Гаспер, М. Рахман.* Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.

Поступила в редакцию 17.XI.2004 г.