Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Р. Ёдгоров, М. Э. Муминов, О спектре одного модельного оператора в теории возмущений существенного спектра, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 3, 544–554

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1875>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:31:09

© 2005 г.

Г. Р. Ёдгоров*, М. Э. Муминов†

О СПЕКТРЕ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ СУЩЕСТВЕННОГО СПЕКТРА

Рассматривается некоторый модельный оператор, действующий в подпространстве фоковского пространства. Получен симметризованный аналог уравнения Фаддеева. Описаны местоположение и структура существенного спектра рассматриваемого оператора.

Ключевые слова: операторы рождения и уничтожения, существенный спектр, положительный оператор, компактный оператор.

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В известной монографии [1] Фридрихс рассматривал оператор умножения на независимую переменную как невозмущенный оператор и в качестве возмущения выбирал интегральный оператор. Эта модель в дальнейшем стала называться моделью теории возмущений непрерывного спектра, так как непрерывный (существенный) спектр самосопряженного оператора не изменяется при компактном возмущении. В работе [2] рассмотрен спин-бозонный гамильтониан, который аналогичен стандартному трехчастичному гамильтониану, и исследованы абсолютно непрерывный спектр и связанные состояния. В работах [3], [4] рассматривается некоторый модельный оператор H_0 , соответствующий оператору энергии с несохраняющимся ограниченным числом частиц, действующий в подпространстве фоковского пространства, который является решетчатым аналогом спин-бозонного гамильтониана [2]. При некоторых естественных условиях на параметры, задающие данный модельный оператор, описаны местоположение и структура существенного спектра, установлена конечность или бесконечность числа собственных значений (эффект Ефимова).

*Комплексный научно-исследовательский институт региональных проблем Самаркандского отделения АН РУз, Самарканд, Узбекистан. E-mail: g.yodgorov@mail.ru

†Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: mmuminov@mail.ru

В задачах физики твердого тела [5], квантовой теории поля [1] и статистической физики [6] важную роль играет исследование спектров гамильтонианов с несохраняющимся неограниченным числом частиц. Одним из основных методов, применяемых при изучении этих задач, является теория возмущений самосопряженных операторов. Поэтому необходимо подробное изучение спектров гамильтонианов с ограниченным числом квазичастиц, т.е. изучение спектров сужений операторов, действующих на одночастичном, двухчастичном, ..., n -частичном подпространствах или на “ n -частичном обрезанном” подпространстве, состоящем из одночастичного, двухчастичного, ..., n -частичного подпространств [1], [5], [6].

В настоящей работе рассматривается некоторый модельный оператор $H = H(\varphi_1, \varphi_2)$ (см. (2)) как некомпактное возмущение оператора $H_0 = H(0, 0)$, рассмотренного в работах [3], [4], соответствующий оператору энергии с несохраняющимся ограниченным числом частиц, действующий в подпространстве фоковского пространства. Описаны местоположение и структура существенного спектра. Отметим, что в случае $\varphi_2 = 0$ (независимо от φ_1) существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H содержит существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_0)$ оператора H_0 . Получен симметричный аналог уравнения Фаддеева (см. [7]) для собственных функций рассматриваемого оператора. Это уравнение имеет вид

$$g = T(z)g, \quad (1)$$

где $T(z)$, $z \in \sigma_{\text{ess}}(H)$, — компактный самосопряженный оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ векторных функций g . Как и в случае уравнения Фаддеева, нетривиальные решения уравнения (1) оказываются однозначно связанными с собственными функциями оператора H .

Пусть $\mathbf{T}^3 \equiv (-\pi; \pi]^3$, $(\mathbf{T}^3)^2 = \mathbf{T}^3 \times \mathbf{T}^3$ — декартово произведение, $L_2((\mathbf{T}^3)^n)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^n$, $n = 1, 2$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ — прямая сумма пространств, где $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_1 = L_2(\mathbf{T}^3)$, $\mathcal{H}_2 = L_2((\mathbf{T}^3)^2)$. Рассмотрим операторную матрицу

$$H = \begin{pmatrix} H_{00} & H_{01} & 0 \\ H_{10} & H_{11} & H_{12} \\ 0 & H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где операторы $H_{ij}: \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2$, определяются формулами

$$\begin{aligned} (H_{00}f_0)_0 &= u_0 f_0, & (H_{01}f_1)_0 &= \int a(q') f_1(q') dq', \\ (H_{10}f_0)_1(p) &= a(p) f_0, & (H_{11}f_1)_1(p) &= u(p) f_1(p), \\ (H_{12}f_2)_1(p) &= \int b(q') f_2(p, q') dq', & (H_{21}f_1)_2(p, q) &= b(q) f_1(p), \\ (H_{22}f_2)_2(p, q) &= w(p, q) f_2(p, q) - \varphi_1(p) \int \varphi_1(p') f_2(p', q) dp' - \\ &\quad - \varphi_2(q) \int \varphi_2(q') f_2(p, q') dq'. \end{aligned}$$

Здесь u_0 – фиксированное вещественное число, $a(p)$, $b(p)$, $u(p)$, $\varphi_1(p)$, $\varphi_2(p)$ – вещественнозначные непрерывные функции на $\mathbf{T}^3$, $w(p, q)$ – вещественнозначная непрерывная функция на $(\mathbf{T}^3)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования. В математической физике операторы H_{01} и H_{12} называются операторами уничтожения, а операторы H_{10} и H_{21} – операторами рождения.

Заметим, что оператор H , определенный операторной матрицей (2), действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является ограниченным и самосопряженным.

Введем некоторые основные обозначения. Пусть

$$m_w(p) = \min_{q \in \mathbf{T}^3} w(p, q), \quad M_w(p) = \max_{q \in \mathbf{T}^3} w(p, q).$$

Для любого $p \in \mathbf{T}^3$ определим регулярные в $\mathbb{C} \setminus [m_w(p), M_w(p)]$ функции

$$\begin{aligned} \Delta_1(p, z) &= 1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(s, p) - z}, \\ \Delta_2(p, z) &= \left(1 - \int \frac{\varphi_2^2(s) ds}{w(p, s) - z}\right) \left(u(p) - z - \int \frac{b^2(s) ds}{w(p, s) - z}\right) - \left(\int \frac{b(s)\varphi_2(s) ds}{w(p, s) - z}\right)^2. \end{aligned}$$

Пусть σ_i – множество точек $z \in \mathbb{C} \setminus [m_w(p), M_w(p)]$, для которых имеет место равенство $\Delta_i(p, z) = 0$, $i = 1, 2$, хотя бы для одного $p \in \mathbf{T}^3$ и

$$\Sigma = [m_w, M_w] \cup \sigma_1 \cup \sigma_2, \quad m_w = \min_{p, q \in \mathbf{T}^3} w(p, q), \quad M_w = \max_{p, q \in \mathbf{T}^3} w(p, q).$$

Основным результатом работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H совпадает с множеством Σ , т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) = \Sigma$.*

Введем следующее обозначение: $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$. Пусть операторные матрицы $A(z)$ и $K(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ действуют в пространстве $\overline{\mathcal{H}}$ по формулам

$$\begin{aligned} A(z) &= \begin{pmatrix} A_{00}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11}(z) & 0 & A_{13}(z) \\ 0 & 0 & A_{22}(z) & 0 \\ 0 & A_{31}(z) & 0 & A_{33}(z) \end{pmatrix}, \\ K(z) &= \begin{pmatrix} K_{00}(z) & K_{01}(z) & 0 & 0 \\ K_{10}(z) & 0 & K_{12}(z) & 0 \\ 0 & K_{21}(z) & 0 & K_{23}(z) \\ 0 & 0 & K_{32}(z) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $A_{ij}(z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, — оператор умножения на функцию $a_{ij}(p, z)$:

$$\begin{aligned} a_{00}(p, z) &\equiv 1, & a_{11}(p, z) &= u(p) - z - \int \frac{b^2(s) ds}{w(p, s) - z}, \\ a_{13}(p, z) &= a_{31}(p, z) = \int \frac{b(s)\varphi_2(s) ds}{w(p, s) - z}, \\ a_{22}(p, z) &= 1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(s, p) - z}, & a_{33}(p, z) &= 1 - \int \frac{\varphi_2^2(s) ds}{w(p, s) - z}, \end{aligned}$$

и операторы $K_{ij}(z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, определяются формулами

$$\begin{aligned} (K_{00}(z)\psi_0)_0 &= (u_0 - z + 1)\psi_0, & (K_{01}(z)\psi_1)_0 &= \int a(q')\psi_1(q') dq', \\ (K_{10}(z)\psi_0)_1(p) &= -a(p)\psi_0, \\ (K_{12}(z)\psi_2)_1(p) &= -\varphi_1(p) \int \frac{b(q')\psi_2(q') dq'}{w(p, q') - z}, \\ (K_{21}(z)\psi_1)_1(p) &= -b(p) \int \frac{\varphi_1(p')\psi_1(p') dp'}{w(p', p) - z}, \\ (K_{23}(z)\psi_3)_1(p) &= \varphi_2(p) \int \frac{\varphi_1(p')\psi_3(p') dp'}{w(p', p) - z}, \\ (K_{32}(z)\psi_2)_1(p) &= \varphi_1(p) \int \frac{\varphi_2(q')\psi_2(q') dq'}{w(p, q') - z}. \end{aligned}$$

Отметим, что операторы $K_{ij}(z)$ при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ принадлежат классу Гильберта–Шмидта, следовательно, $K(z)$ является компактным оператором.

Пусть $T(z) = [A^{-1}(z)]^{1/2} K(z) [A^{-1}(z)]^{1/2}$, $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$, где $(A^{-1}(z))^{1/2}$ — положительный квадратный корень оператора $A^{-1}(z)$ (см. ниже лемму 4).

ТЕОРЕМА 2. Число $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. Оператор $A(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, является ограниченным, обратимым, и обратный оператор $A^{-1}(z)$ имеет вид

$$A^{-1}(z) = \begin{pmatrix} B_{00}(z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{11}(z) & 0 & B_{13}(z) \\ 0 & 0 & B_{22}(z) & 0 \\ 0 & B_{31}(z) & 0 & B_{33}(z) \end{pmatrix},$$

где $B_{ij}(z): \mathcal{H}_j \rightarrow \mathcal{H}_i$, $i, j = 0, 1, 2, 3$, – оператор умножения на функцию $b_{ij}(p, z)$:

$$\begin{aligned} b_{00}(p, z) &\equiv 1, & b_{11}(p, z) &= \frac{a_{33}(p, z)}{\Delta_2(p, z)}, & b_{13}(p, z) &= b_{31}(p, z) = -\frac{a_{13}(p, z)}{\Delta_2(p, z)}, \\ b_{22}(p, z) &= \frac{1}{\Delta_1(p, z)}, & b_{33}(p, z) &= \frac{a_{11}(p, z)}{\Delta_2(p, z)}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $A(z)$ есть оператор умножения на матрицу $A(p, z)$, где

$$A(p, z) = \begin{pmatrix} a_{00}(p, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}(p, z) & 0 & a_{13}(p, z) \\ 0 & 0 & a_{22}(p, z) & 0 \\ 0 & a_{13}(p, z) & 0 & a_{33}(p, z) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $A(p, z)$ – матричнозначная непрерывная функция на $\mathbf{T}^3$. Отсюда следует ограниченность $A(z)$. Так как $\det(A(p, z)) = \Delta_1(p, z)\Delta_2(p, z)$ и по условию леммы $z \notin \Sigma$, то $\det(A(p, z)) \neq 0$. Следовательно, при каждом $p \in \mathbf{T}^3$ матрица $A(p, z)$ обратима, и ее обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}(p, z) = \begin{pmatrix} a_{00}(p, z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_{33}(p, z)}{\Delta_2(p, z)} & 0 & -\frac{a_{13}(p, z)}{\Delta_2(p, z)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta_1(p, z)} & 0 \\ 0 & -\frac{a_{13}(p, z)}{\Delta_2(p, z)} & 0 & \frac{a_{11}(p, z)}{\Delta_2(p, z)} \end{pmatrix}.$$

При этом $A^{-1}(p, z)$ – матричнозначная непрерывная функция на $\mathbf{T}^3$. Пусть $A^{-1}(z)$ – оператор умножения на матрицу $A^{-1}(p, z)$, действующий в $\bar{\mathcal{H}}$. Легко проверить, что $A^{-1}(z)$ является обратным оператором $A(z)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $\hat{T}(z) = A^{-1}(z)K(z)$.

ЛЕММА 2. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $\hat{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ – собственное значение оператора H , $\mathbf{f}$ – соответствующий собственный вектор, т.е. система уравнений

$$\begin{aligned} (H_{00} - z)f_0 + (H_{01}f_1)_0 &= 0, \\ (H_{10}f_0)_1 + ((H_{11} - z)f_1)_1 + (H_{12}f_2)_1 &= 0, \\ (H_{21}f_1)_2 + ((H_{22} - z)f_2)_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

имеет нетривиальное решение $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2)$. Так как $z \notin [m_w, M_w]$, то из третьего уравнения системы (3) для $f_2(p, q)$ имеем

$$f_2(p, q) = \frac{\varphi_1(p)c_1(q) + \varphi_2(q)c_2(p)}{w(p, q) - z} - \frac{b(q)f_1(p)}{w(p, q) - z}, \quad (4)$$

где

$$c_1(q) = \int \varphi_1(p') f_2(p', q) dp', \quad c_2(p) = \int \varphi_2(q') f_2(p, q') dq'. \quad (5)$$

Далее преобразуем систему (3), используя f_0 , f_1 , c_1 и c_2 . Подставляя выражение (4) для $f_2(p, q)$ в (3) и (5), получим

$$\begin{aligned} f_0 &= (u_0 - z + 1)f_0 + \int a(q') f_1(q') dq', \\ \left(u(p) - z - \int \frac{b^2(s) ds}{w(p, s) - z} \right) f_1(p) + \int \frac{b(s) \varphi_2(s) ds}{w(p, s) - z} c_2(p) &= \\ &= -a(p) f_0 - \varphi_1(p) \int \frac{b(q') c_1(q') dq'}{w(p, q') - z}, \\ \left(1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(s, p) - z} \right) c_1(p) &= -b(p) \int \frac{\varphi_1(p') f_1(p') dp'}{w(p', p) - z} + \varphi_2(p) \int \frac{\varphi_1(p') c_2(p') dp'}{w(p', p) - z}, \\ \int \frac{b(s) \varphi_2(s) ds}{w(p, s) - z} f_1(p) + \left(1 - \int \frac{\varphi_2^2(s) ds}{w(p, s) - z} \right) c_2(p) &= \varphi_1(p) \int \frac{\varphi_2(q') c_1(q') dq'}{w(p, q') - z}, \end{aligned}$$

или

$$A(z)\psi = K(z)\psi, \quad \psi = (f_0, f_1, c_1, c_2) \in \overline{\mathcal{H}}.$$

Отсюда и из леммы 1 имеем

$$\psi = A^{-1}(z)K(z)\psi,$$

или

$$\psi = \widehat{T}(z)\psi. \quad (6)$$

Система (3) имеет ненулевое решение, поэтому уравнение (6) также имеет ненулевое решение. Это означает, что число 1 есть собственное значение оператора $\widehat{T}(z)$.

Достаточность. Пусть число 1 – собственное значение оператора $\widehat{T}(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$, и $\psi = (f_0, f_1, c_1, c_2) \in \overline{\mathcal{H}}$ – соответствующая собственная функция, т.е. уравнение (6) имеет ненулевое решение. Умножая (6) слева на $A(z)$, получим

$$\begin{aligned} f_0 &= (u_0 - z + 1)f_0 + \int a(q') f_1(q') dq', \\ a(p)f_0 + (u(p) - z)f_1(p) + \int b(q') \left[\frac{\varphi_1(p)c_1(q') + \varphi_2(q')c_2(p)}{w(p, q') - z} - \frac{b(q')f_1(p)}{w(p, q') - z} \right] dq' &= 0, \\ c_1(p) &= \int \varphi_1(p') \left[\frac{\varphi_1(p')c_1(q) + \varphi_2(q)c_2(p')}{w(p', q) - z} - \frac{b(q)f_1(p')}{w(p', q) - z} \right] dp', \\ c_2(p) &= \int \varphi_2(q') \left[\frac{\varphi_1(p)c_1(q') + \varphi_2(q')c_2(p)}{w(p, q') - z} - \frac{b(q')f_1(p)}{w(p, q') - z} \right] dq'. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим

$$f_2(p, q) = \frac{\varphi_1(p)c_1(q) + \varphi_2(q)c_2(p)}{w(p, q) - z} - \frac{b(q)f_1(p)}{w(p, q) - z}.$$

Тогда из последних двух уравнений системы (7) имеем

$$c_1(q) = \int \varphi_1(p') f_2(p', q) dp', \quad c_2(p) = \int \varphi_2(q') f_2(p, q') dq'.$$

Легко видеть, что вектор $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{H}$ удовлетворяет уравнению $H\mathbf{f} = z\mathbf{f}$, т.е. число z есть собственное значение оператора H . Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Включение $[m_w, M_w] \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично тому, как это сделано в работе [3].

Докажем, что $\sigma_1 \cup \sigma_2 \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \in \sigma_1 \cup \sigma_2$ — произвольная точка. Существует точка $p_0 \in \mathbf{T}^3$ такая, что $\det A(p_0, z_0) = \Delta_1(p_0, z_0)\Delta_2(p_0, z_0) = 0$. Возможны два случая: 1) $z_0 \in [m_w, M_w]$, 2) $z_0 \notin [m_w, M_w]$. Если $z_0 \in [m_w, M_w]$, то $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \notin [m_w, M_w]$, тогда система однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned} l_0 &= 0, \\ \left(u(p_0) - z_0 - \int \frac{b^2(s) ds}{w(p_0, s) - z_0}\right) l_1 + \int \frac{b(s)\varphi_2(s) ds}{w(p_0, s) - z_0} l_3 &= 0, \\ \left(1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(s, p_0) - z_0}\right) l_2 &= 0, \\ \int \frac{b(s)\varphi_2(s) ds}{w(p_0, s) - z_0} l_1 + \left(1 - \int \frac{\varphi_2^2(s) ds}{w(p_0, s) - z_0}\right) l_3 &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

имеет бесконечное число решений. Легко проверить, что существует ненулевое решение $\mathbf{l} = (0, l_1, l_2, l_3)$ системы уравнений (8), удовлетворяющее одному из следующих условий:

- 1) если $\Delta_2(p_0, z_0) = 0$, то либо $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$, либо $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, $l_3 \neq 0$;
- 2) если $\Delta_1(p_0, z_0) = 0$, то $l_2 \neq 0$, $l_1 = l_3 = 0$.

При этом из (8) имеем

$$A(p_0, z_0)\mathbf{l} = 0, \quad \mathbf{l} = (0, l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{C}^4.$$

Пусть $\chi_{V_n}(p)$ — характеристическая функция множества

$$V_n(p_0) = \left\{ p \in \mathbf{T}^3 : \frac{1}{n+1} < |p - p_0| < \frac{1}{n} \right\}$$

и $\mu(V_n)$ — лебегова мера множества V_n . Последовательность ортогональных функций $\{\mathbf{f}^{(n)}\}$ выберем следующим образом:

$$\mathbf{f}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1^{(n)}(p) \\ f_2^{(n)}(p, q) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(p) &= \psi_1^{(n)}(p), \\ f_2^{(n)}(p, q) &= \frac{\varphi_1(p)\psi_2^{(n)}(q) + \varphi_2(q)\psi_3^{(n)}(p)}{w(p, q) - z_0} - \frac{b(q)\psi_1^{(n)}(p)}{w(p, q) - z_0}, \quad p, q \in \mathbf{T}^3, \\ \psi_i^{(n)}(p) &= c_n(p)l_i\chi_{V_n}(p)(\mu(V_n))^{-1/2}, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Здесь $c_n \in L_2(\mathbf{T}^3)$ находится из условия ортогональности $\{\mathbf{f}^{(n)}\}$, т.е.

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}^{(n)}, \mathbf{f}^{(m)}) &= \frac{l_2}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}\sqrt{\mu(V_m(p_0))}} \int_{V_n(p_0)} \int_{V_m(p_0)} \left[\frac{\varphi_1(p)(l_3\varphi_2(q) - l_1b(q))}{(w(p, q) - z_0)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varphi_1(q)(l_3\varphi_2(p) - l_1b(p))}{(w(q, p) - z_0)^2} \right] c_n(p)c_m(q) dp dq = 0, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

Существование $c_n(p)$ вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Существует ортонормальная система $\{c_n\} \subset L_2(\mathbf{T}^3)$, удовлетворяющая условиям*

$$\begin{aligned} \text{supp } c_n &\subset V_n(p_0), \\ \int_{V_n(p_0)} \int_{V_m(p_0)} &\left(\frac{\varphi_1(p)(l_3\varphi_2(q) - l_1b(q))}{(w(p, q) - z_0)^2} + \frac{\varphi_1(q)(l_3\varphi_2(p) - l_1b(p))}{(w(q, p) - z_0)^2} \right) \times \\ &\times c_n(p)c_m(q) dp dq = 0, \quad n \neq m. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\{c_n\}$ построим методом индукции. Пусть $c_1(p) = \chi_{V_1}(p)(\sqrt{\mu(V_1(p_0))})^{-1}$, где $\chi_{V_1}(p)$ — характеристическая функция множества $V_1(p_0)$. Функцию $\tilde{c}_2 \in L_2(V_2(p_0))$ выбираем так, чтобы $\|\tilde{c}_2\| = 1$ и $(\tilde{c}_2, \varepsilon_1^{(2)}) = 0$, где

$$\varepsilon_1^{(2)}(p) = \int \left(\frac{\varphi_1(p)(l_3\varphi_2(q) - l_1b(q))}{(w(p, q) - z_0)^2} + \frac{\varphi_1(q)(l_3\varphi_2(p) - l_1b(p))}{(w(q, p) - z_0)^2} \right) c_1(q)\chi_{V_2}(p) dq.$$

Положим $c_2(p) = \tilde{c}_2(p)\chi_{V_2}(p)$. Продолжим этот процесс. Допустим, что построены функции $c_1(p), \dots, c_n(p)$. Тогда функцию $\tilde{c}_{n+1}(p) \in L_2(V_{n+1}(p_0))$ выбираем так, чтобы $\|\tilde{c}_{n+1}\| = 1$ и она была ортогональна функциям

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^{(n+1)}(p) &= \int \left(\frac{\varphi_1(p)(l_3\varphi_2(q) - l_1b(q))}{(w(p, q) - z_0)^2} + \frac{\varphi_1(q)(l_3\varphi_2(p) - l_1b(p))}{(w(q, p) - z_0)^2} \right) \times \\ &\times c_i(q)\chi_{V_{n+1}}(p) dq, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Положим $c_{n+1}(p) = \tilde{c}_{n+1}(p)\chi_{V_{n+1}}(p)$. Таким образом, мы построили ортонормированную систему $\{c_n\}$, удовлетворяющую условиям предложения. Предложение доказано.

Продолжим доказательство теоремы 1. Предположим, что $\Delta_2(p_0, z_0) = 0$ и $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$. Тогда

$$\|\mathbf{f}^{(n)}\|^2 \geq \|f_1^{(n)}\|^2 = \frac{d_1}{\mu(V_n(p_0))}, \quad d_1 = l_1^2.$$

Пусть $\Delta_2(p_0, z_0) = 0$ и $l_3 \neq 0$, $l_1 = 0$, $l_2 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}^{(n)}\|^2 \geq \|f_2^{(n)}\|^2 &= \frac{l_3^2}{\mu(V_n(p_0))} \int_{V_n(p_0)} \int \left| \frac{\varphi_2(q)c_n(p)}{w(p, q) - z_0} \right|^2 dp dq \geq \frac{d_2}{\mu(V_n(p_0))}, \\ d_2 &= \frac{l_3^2 \|\varphi_2\|^2}{(M_w - z_0)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что в случае $\Delta_1(p_0, z_0) = 0$, $l_2 \neq 0$, $l_1 = l_3 = 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{f}^{(n)}\|^2 \geq \frac{d_3}{\mu(V_n(p_0))}, \quad d_3 = \frac{l_2^2 \|\varphi_1\|^2}{(M_w - z_0)^2}.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{f}^{(n)}\|^2 \geq \frac{\xi_0}{\mu(V_n(p_0))}, \quad \xi_0 = \min\{d_1, d_2, d_3\} > 0. \quad (9)$$

Положим $\tilde{\mathbf{f}}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} / \|\mathbf{f}^{(n)}\|$. Ясно, что система $\{\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}\}$ является ортонормальной. Рассмотрим оператор $(H - z_0)\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}$ и оценим его норму

$$\begin{aligned} \|(H - z_0)\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|A(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|_{\overline{\mathcal{H}}}^2 + \|K(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|_{\overline{\mathcal{H}}}^2, \\ \tilde{\psi}^{(n)} &= \left(0, \frac{\psi_1^{(n)}}{\|\mathbf{f}^{(n)}\|}, \frac{\psi_2^{(n)}}{\|\mathbf{f}^{(n)}\|}, \frac{\psi_3^{(n)}}{\|\mathbf{f}^{(n)}\|} \right). \end{aligned}$$

Заметим, что $\{\tilde{\psi}^{(n)}\} \subset \overline{\mathcal{H}}$ — ограниченная ортогональная система. Действительно, ортогональность вытекает из непересекаемости носителей функций $\tilde{\psi}^{(n)}$ и $\tilde{\psi}^{(m)}$. Из равенства

$$\|\tilde{\psi}^{(n)}\|^2 = \frac{1}{\|\mathbf{f}^{(n)}\|^2} \frac{1}{\mu(V_n(p_0))} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)$$

и неравенства (9) следует равномерная ограниченность системы $\{\tilde{\psi}^{(n)}\}$, т.е. $\|\tilde{\psi}^{(n)}\|^2 \leq (1/\xi_0)\|\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^4}^2$ при всех $n \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

В силу компактности $K(z_0)$ получаем, что $\|K(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь оценим $\|A(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|$. Применяя неравенство Шварца, имеем

$$\|A(z_0)\tilde{\psi}^{(n)}\|^2 \leq C^2 \sup_{p \in V_n(p_0)} \|A(p, z_0)\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^4}^2, \quad C^2 = \max\left\{ \frac{2}{\xi_0}, \frac{4\|\varphi_2\|^2}{\xi_0}, \frac{4\|\varphi_1\|^2}{\xi_0} \right\}.$$

Из непрерывности матричнозначной функции $F(p) = A(p, z_0)$ вытекает, что

$$\sup_{p \in V_n(p_0)} \|A(p, z_0)\mathbf{I}\|_{\mathbb{C}^4} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для последовательности ортонормальных вектор-функций $\{\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}\}$ верно $\|(H - z_0)\tilde{\mathbf{f}}^{(n)}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Из произвольности точки z_0 следует, что $\sigma_1 \cup \sigma_2 \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Итак, мы доказали, что $[m_w, M_w] \cup \sigma_1 \cup \sigma_2 \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Теперь докажем обратное включение, а именно $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \Sigma$. В силу компактности $K(z)$ и ограниченности $A^{-1}(z)$ получаем, что $f(z) = A^{-1}(z)K(z)$ — компактнозначная аналитическая функция в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$. Из самосопряженности H и леммы 2 следует, что оператор $(I - f(z))^{-1}$ существует при всех $\text{Im } z \neq 0$, где I — единичный оператор в $\overline{\mathcal{H}}$. Согласно аналитической теореме Фредгольма заключаем, что операторнозначная функция $(I - f(z))^{-1}$ существует на $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ всюду, за исключением дискретного множества D' , где она имеет вычеты конечного ранга. Отсюда, обозначая через $\sigma_{\text{disc}}(H)$ дискретный спектр оператора H , имеем $\mathbb{C} \setminus \Sigma \subset \sigma_{\text{disc}}(H)$, т.е. $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \Sigma$.

Теорема полностью доказана.

ЛЕММА 3. Для любых $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$ и $p \in \mathbf{T}^3$ матрица $A(p, z)$ положительна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что из $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$ следует, что

$$\det(A(p, z)) = \Delta_1(p, z)\Delta_2(p, z) \neq 0$$

для всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$. Учитывая соотношения $\Delta_1(p, z) = a_{22}(p, z) > 0$ и $\Delta_2(p, z) = a_{11}(p, z)a_{33}(p, z) - a_{13}^2(p, z) > 0$ при достаточно больших $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$ и непрерывность элементов матрицы $A(p, z)$ в множестве $\mathbf{T}^3 \times (-\infty, \inf \sigma_{\text{ess}}(H))$, имеем $\Delta_1(p, z) > 0$, $\Delta_2(p, z) > 0$ для всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$. Из положительности функции $\Delta_2(p, z)$ и непрерывности функций $a_{11}(p, z)$, $a_{33}(p, z)$ вытекает, что $a_{11}(p, z) > 0$, $a_{33}(p, z) > 0$ для всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$.

Так как $\det(A(p, z) - \lambda E) = (1 - \lambda)(\Delta_1(p, z) - \lambda)[\Delta_2(p, z) - \lambda(a_{11}(p, z) + a_{33}(p, z)) + \lambda^2]$, где E — единичный оператор в $\mathbb{C}^4$, то для всех $\lambda < 0$ имеет место $\det(A(p, z) - \lambda E) > 0$, т.е. самосопряженная матрица $A(p, z)$ не имеет отрицательных собственных значений для всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$. Это означает, что $A(p, z)$ положительна для всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$. Лемма доказана.

Из леммы 3 следует также положительность матрицы $A^{-1}(p, z)$ для любых $p \in \mathbf{T}^3$ и $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$. Отсюда следует положительность оператора $A^{-1}(z)$. Таким образом, справедлива

ЛЕММА 4. Для всех фиксированных $z \in (-\infty, m)$, $m = \inf \sigma_{\text{ess}}(H)$ оператор $A^{-1}(z)$ является самосопряженным и положительным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как для ограниченных операторов A и B каждое ненулевое собственное значение оператора AB является собственным значением оператора BA с той же кратностью (см., например, [8]), то собственное значение оператора $\hat{T}(z) = [A^{-1}(z)]^{1/2}[A^{-1}(z)]^{1/2}K(z)$, равное единице, является собственным значением оператора $T(z) = [A^{-1}(z)]^{1/2}K(z)[A^{-1}(z)]^{1/2}$ с той же кратностью. Отсюда и из леммы 2 получим утверждение теоремы.

Благодарности. Авторы выражают благодарность С. Н. Лакаеву за постановку задачи и рецензенту за полезные замечания. Работа частично финансирована грантами № 65-04 и 67-04 ФПФИ АН РУз.

Список литературы

- [1] *К. О. Фридрихс.* Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.
- [2] *R. A. Minlos, H. Spohn.* The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons. In: Topics in Statistical and Theoretical Physics. F. A. Berezin memorial Volume. AMS Transl. Ser. 2. Adv. Math. Sci. V. 177. Eds. R. L. Dobrushin, R. A. Minlos, M. A. Shubin, A. M. Vershik. Providence, R.I.: AMS, 1996. P. 159–193.
- [3] *С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов.* Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 556–564.
- [4] *С. Н. Лакаев, Т. Х. Расулов.* Функц. анализ и его прилож. 2003. Т. 37. № 1. С. 81–84.
- [5] *D. Mattis.* Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 361–379.
- [6] *В. А. Малышев, Р. А. Минлос.* Тр. семин. им. И. Г. Петровского. 1983. № 9. С. 63–80.
- [7] *С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [8] *П. Халмош.* Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 25.I.2005 г.,
после доработки 9.IV.2005 г.