Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Р. Садыков, Дополнительное искривление траекторий спиновых частиц, пропорциональное кручению траектории, *ТМФ*, 2005, том 144, номер 3, 555–563

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1876>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 16:22:31

© 2005 г.

Н. Р. Садыков*

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИСКРИВЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ СПИНОВЫХ ЧАСТИЦ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ КРУЧЕНИЮ ТРАЕКТОРИИ

В приближении геометрической оптики предсказан эффект дополнительного искривления траекторий частиц (аналог обратного оптического эффекта Магнуса). Эффект определяется поляризацией (спиральностью) и кручением траекторий частиц. Установлена связь рассмотренного эффекта с фазой Берри. Эффект является следствием закона сохранения момента импульса частиц. Показано, что для ультрахолодных нейтронов эффект должен привести к отклонению от закона зеркального отражения.

Ключевые слова: поляризация, оптический эффект Магнуса, спиральность, нейтроновод, электростатическая линза, фаза Берри.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных областях физики исследуются такие явления, связанные с поляризацией частиц, как спиновые эффекты в физике высоких энергий [1] и при делении ядер [2], эффекты нарушения пространственной четности при радиационном захвате нейтронов [3] и при упругом взаимодействии с ядрами [4], поляризационные эффекты в оптике [5]–[14].

При изучении поляризационных эффектов в оптике фотонов взаимно дополняют друг друга два подхода — волновой и геометрический (корпускулярный). Оба эти подхода позволяют описать ряд поляризационных (спиновых) эффектов для фотонов: оптический эффект Магнуса [5], [6], [15]–[17] и обратный оптический эффект Магнуса [6], [18] (или эффекты Федорова), влияние величины кручения многомодового световода на величину угла поворота спекл-картины на выходе из волокна [19], вращение спекл-картины в поглощающем световоде [15], [20], [21] и др. Поляризационные эффекты в оптике определяются знаком циркулярной поляризации (спиральностью фотона).

В последнее время часть предсказанных для фотонов эффектов удалось обобщить на спиновые частицы с полупцелым спином и ненулевой массой: в рамках волнового подхо-

*Российский федеральный ядерный центр, Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. акад. И.Е. Забабахина, Снежинск, Челябинская обл., Россия. E-mail: n.r.sadykov@vniitf.ru

да отметим аналог оптического эффекта Магнуса [22], в рамках корпускулярного подхода – эффект дополнительного искривления траекторий спиновых частиц в поглощающих средах [23].

В работе [22] для спиновых частиц в приближении геометрической оптики (условие квазиклассичности) показано, что происходит дополнительное кручение траектории, пропорциональное кривизне траектории: при движении частицы по круговой траектории у волнового вектора появляется поперечная к плоскости траектории компонента. Наличие волнового вектора позволяет записать эйконал для частицы. Уравнение траектории спиновой частицы получено с помощью вариационного метода, примененного к эйконалу частицы.

В данной работе мы покажем, что при соответствующем преобразовании операторов импульса и динамических переменных в уравнении Дирака в ортогональной (геликоидальной) системе координат из волнового уравнения второго порядка следует, что продольная компонента волнового вектора содержит дополнительное слагаемое (производную фазы Берри по натуральному параметру [7], [24]). Величина этого слагаемого пропорциональна кручению траектории и определяется поляризацией частицы. Полученные результаты по аналогии с оптическим эффектом Магнуса для частиц позволяют получить с помощью эйконала частицы уравнение траектории, исходя из вариационного принципа. На основе анализа полученного уравнения предсказан эффект дополнительного искривления траектории частиц (этот эффект является обратным по отношению к аналогу оптического эффекта Магнуса). Величина эффекта определяется поляризацией и пропорциональна кручению траектории частицы. В искривленной (тороидальной) системе координат используемый в работе подход позволяет обобщить результаты работы [22]: дополнительное к волновому вектору слагаемое, пропорциональное кривизне траектории, строго параллельно бинормали к кривой траектории, что, в свою очередь, приводит к смещению радиуса кривизны траектории вдоль бинормали и не меняет абсолютного значения вектора кривизны.

2. АНАЛОГ ОПТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА МАГНУСА ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $s = 1/2$

В этом разделе воспользуемся тороидальной системой координат (см. приложения в работах [22], [23]) для вывода уравнения траектории, позволяющего описать аналог оптического эффекта Магнуса для спиновой частицы $s = 1/2$. Следуя работе [22], введем коэффициенты Ламэ для ортогональной тороидальной системы координат:

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1 + \frac{x}{R_0},$$

где R_0 – радиус тора, z – натуральный параметр, отсчитываемый вдоль окружности радиуса R_0 , x и y – координаты, базисные векторы которых ортогональны друг другу и перпендикулярны траектории частицы, причем x отсчитывается вдоль радиуса кривизны $\vec{R}_0$ траектории частицы. С точностью до величин порядка $1/R_0$ тороидальная система координат в окрестности точки $x = y = z = 0$ совпадает с декартовой.

Для вывода уравнения траектории в волновом уравнении второго порядка выразим оператор 4-импульса $\hat{P} = (\hat{P}_0, -\vec{\hat{P}})$ и динамические переменные ν^μ через параметры тороидальной системы координат и учтем преобразование волновой функции частицы в результате вращения при перемещении частицы на расстояние $\delta z \rightarrow 0$ по искривленной траектории. Из дальнейшего анализа полученного волнового уравнения получим, что волновой вектор содержит бинормальную компоненту, пропорциональную кривизне траектории частицы и определяемую поляризацией частицы. Записав действие по аналогии с работой [17], получим уравнение траектории частицы.

В квазиклассическом приближении для случая, когда состояние частицы характеризуется определенными значениями энергии, импульса и проекции спина на импульс, отождествим операторы $\hat{\nu}^n$ и $\hat{P}_n$ с базисными векторами $\vec{\epsilon}^n$ и $\vec{\epsilon}_n$, имея в виду, что $\hat{\nu}^n$ и $\hat{P}_n$ являются соответствующими компонентами векторных операторов в криволинейной системе координат ([25], с. 398):

$$\hat{\nu}^n = \vec{\epsilon}^n \vec{\nu}, \quad \hat{P}_n = \vec{\epsilon}_n \vec{P}, \quad \vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z), \quad \vec{P} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z), \quad (1)$$

где $n = 1, 2, 3$ (в дальнейшем латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие – значения 0, 1, 2, 3). Операторы $\hat{\nu}^n$ из (1) удовлетворяют следующим соотношениям ([26], с. 100):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\hat{\nu}^n \hat{\nu}^m + \hat{\nu}^m \hat{\nu}^n) &= g^{nm}, & \frac{1}{2}(\hat{\nu}^n \hat{\nu}^m - \hat{\nu}^m \hat{\nu}^n) &= -i\varepsilon^{nmk} \hat{\Sigma}_k, \\ \frac{1}{2}(\hat{\Sigma}^n \hat{\Sigma}^m - \hat{\Sigma}^m \hat{\Sigma}^n) &= i\varepsilon^{nmk} \hat{\Sigma}_k, & \frac{1}{2}(\hat{\Sigma}^n \hat{\nu}^m - \hat{\Sigma}^m \hat{\nu}^n) &= i\varepsilon^{nmk} \hat{\Sigma}_k, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon^{nmk} = e^{nmk} / \sqrt{g}$, e^{nmk} – кососимметричный тензор, g – определитель метрического тензора трехмерной системы координат.

При выполнении условий (1) для ковариантной производной имеют место равенства ([25], с. 398)

$$\hat{\nabla}_n \hat{\nu}^n = \hat{\nu}^n \hat{\nabla}_n, \quad (\vec{P} \vec{\nu})^2 = -\hbar^2 \Delta - i\hbar^2 (\vec{\nabla} \ln \sqrt{g} \times \vec{\Sigma}) \vec{\nabla}, \quad (3)$$

где $\hat{\nabla}_n \vec{\epsilon}^m = 0$; $\hat{\nabla}_n \hat{\nu}^n = g^{-1/2} \partial(\sqrt{g} \hat{\nu}^n) / \partial x^n$; Δ – лапласиан.

Теперь учтем преобразование волновой функции при вращении тороидальной системы координат. При движении спиновой частицы $s = 1/2$ по круговой траектории с радиусом кривизны $R_0 = 1/\tau_0$, где $\vec{\tau}_0 = \vec{R}_0/R_0^2$ – кривизна траектории, тороидальная система координат вращается относительно неподвижной системы координат на угол $\delta \vec{\Theta} = \vec{\eta} \delta z$, где $\vec{\eta} = \vec{\tau}_0 \times \vec{I}$, $\vec{I}$ – касательный к траектории частицы единичный вектор, δz – отсчитываемая вдоль траектории частицы элементарная длина (натуральный параметр) траектории. При малом повороте биспиноры ξ и η преобразуются в соответствии со следующими формулами ([27], с. 81):

$$\Psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \Psi' = \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \left(1 + i \frac{(\vec{\Sigma} \delta \vec{\Theta})}{2} \right) \Psi, \quad \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При движении частицы по искривленной траектории изменение направления поляризации происходит также за счет прецессии Томаса [28]. В работах [22], [23] было показано, что влияние вращения поляризации частицы на интересующий нас эффект не является существенным.

С учетом соотношений (П.1.1), (П.1.5) и равенства $\vec{\nabla} \ln \sqrt{g} = \vec{\tau}_0$, справедливого в тороидальной системе координат, получим

$$[(\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu})^2 \Psi']_{\delta z=0} = (\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu})^2 \Psi + \hbar(\vec{\mathbf{I}}\vec{\mathbf{P}})(\vec{\eta}\vec{\Sigma})\Psi = [-\hbar^2 \Delta - i\hbar^2(\vec{\tau}_0 \times \vec{\Sigma})_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp}] \Psi. \quad (5)$$

где знак “ $\perp$ ” означает перпендикулярную к вектору $\vec{\mathbf{I}}$ составляющую векторного оператора. При выводе соотношения (5) учтено, что $\vec{\eta} = \vec{\tau}_0 \times \vec{\mathbf{I}}$. В результате имеем

$$\Delta \Psi + k_0^2 \Psi + i(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})(\vec{\eta}\vec{\nabla})\Psi = 0, \quad (6)$$

где $k_0^2 = [(\varepsilon - \Phi)^2/c^2 - m^2c^2]/\hbar^2$, ε – энергия частицы, $(\vec{\tau}_0 \times \vec{\Sigma})_{\perp} = (\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})\vec{\eta}$.

Представим решение этого уравнения в виде

$$\Psi = \Psi_0 e^{(i\vec{\kappa}\vec{r})}. \quad (7)$$

Величину $\vec{\kappa}$ выберем по аналогии с работой [17] так, чтобы функция Ψ_0 удовлетворяла уравнению (6) без последнего слагаемого. Тогда

$$\vec{\kappa} = -\frac{1}{2}(\vec{\mathbf{I}}\vec{\mathbf{n}})\vec{\eta}, \quad (8)$$

где $\vec{\Sigma}\Psi_0 = \vec{\mathbf{n}}\Psi_0$, $|\vec{\mathbf{n}}| = 1$.

Если с учетом выражения для $\vec{\kappa}$ записать действие в окрестности рассматриваемой точки и приравнять нулю его вариацию, то получим уравнение траектории спиновой частицы с полуцелым спином (подробнее см. [17])

$$\frac{d\vec{\mathbf{I}}}{dz} = \vec{\mathbf{I}} \times \left[\vec{\nabla} \ln k_0 + \frac{1}{k_0} \frac{d\vec{\kappa}}{dz} \right] \times \vec{\mathbf{I}}, \quad (9)$$

где $\vec{\kappa}$ зависит от z . Учет второго слагаемого в этом уравнении приводит к изменению направления вектора кривизны $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{R}}/R^2$ ($\vec{\mathbf{R}}$ – радиус кривизны) на небольшую величину, при этом

$$\vec{\tau} = \left[\vec{\nabla} \ln k_0 + \frac{1}{k_0} \frac{d\vec{\kappa}}{dz} \right]_{\perp}. \quad (10)$$

При выводе уравнения предполагалось, что кручение траектории отсутствует, поэтому производная $\partial\vec{\eta}/\partial z$ не может содержать параллельную вектору $\vec{\tau}_0 = \vec{\nabla}_{\perp} \ln k_0$ компоненту и, тем самым, изменять абсолютное значение кривизны.

Вектор $\vec{\kappa}$ изменяется как за счет изменения величины $\vec{\eta}$, так и за счет изменения величины $(\vec{\mathbf{I}}\vec{\mathbf{n}})$. При движении в первом приближении можно считать, что $d\vec{\mathbf{I}}/dz = \vec{\tau}_0$, а $d\vec{\mathbf{n}}/dz$ определяется прецессией Томаса [28] (см. также [22], [23]).

3. АНАЛОГ ОБРАТНОГО ОПТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА МАГНУСА (ЭФФЕКТА ФЕДОРОВА) ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $s = 1/2$

Рассмотрим движение частицы по траектории с ненулевой кривизной и ненулевым кручением. Для сокращения выкладок будем пренебрегать в (4) вращением системы координат за счет кривизны траектории. Тогда в формуле для Ψ' в соотношениях (4) угол $\delta\vec{\Theta}$ равен углу вращения системы координат за счет кручения:

$$\delta\vec{\Theta} = \vec{I}\tilde{\eta}\delta z, \quad (11)$$

где $\tilde{\eta}$ – кручение траектории.

Движение частицы удобно описать в геликоидальной системе координат (П.2.1) (уравнение для фотона см. в работе [6]). Для геликоидальной системы координат имеет место равенство $\sqrt{g} = 1$. По аналогии с выводом уравнения (5) с учетом (П.1.10) получим

$$[(\vec{P}\vec{\nu})\Psi']_{\delta z=0} = (\vec{P}\vec{\nu})^2\Psi + \hbar\tilde{\eta}(\vec{I}\vec{\Sigma})(\vec{I}\vec{P})\Psi. \quad (12)$$

Исходя из этого уравнения, действуя по аналогии с выводом (6), запишем волновое уравнение

$$\Delta\Psi + k_0^2\Psi + i\tilde{\eta}(\vec{I}\vec{\Sigma})(\vec{I}\vec{\nabla})\Psi = 0. \quad (13)$$

Представим Ψ в виде

$$\Psi = \Psi_1 e^{(i\tilde{\kappa}z)}. \quad (14)$$

Величину $\tilde{\kappa}$ выберем так, чтобы функция Ψ_1 удовлетворяла уравнению (13) без последнего слагаемого. В результате с учетом вида функции Ψ получим уравнение, аналогичное уравнению (8),

$$\vec{\kappa} = -\frac{1}{2}(\vec{I}\vec{n})\tilde{\eta}\vec{I}, \quad (15)$$

где $k = k_0 - (\vec{I}\vec{n})\tilde{\eta}/2$ – волновое число, выражение для k_0 приведено после формулы (6).

Формула (15) определяет величину производной фазы Берри $d\Theta/dz$ [7], [24] по натуральному параметру при движении спиновой частицы по геликоидальной траектории: $d\Theta/dz = -m\tilde{\eta}$. В случае движения спиновой частицы по замкнутому контуру в трехмерном пространстве параметров изменение фазы Берри будет равно телесному углу Ω , под которым виден этот контур из начала координат в пространстве параметров [7]: $\Theta = -m\Omega$. Приведенные формулы были получены Берри из предположения адиабатической инвариантности величины $m = (\vec{I}\vec{s})$. Результат (15) описывает вращение спина относительно трехгранника Френе, что совпадает с прецессией спина относительно этого трехгранника ([9], с. 8).

Прототипом фазы Берри и Панчаратнама [10] в оптике является фаза Рытова–Владимирского, связанная с поворотом плоскости поляризации, [11], [12]. При этом роль параметра выполняет касательный к траектории единичный вектор. Об экспериментальном наблюдении фазы Рытова–Владимирского сообщалось в [13]. Величине фазы

Рытова–Владимирского равен также угол поворота спекл-картины на выходе из скрученного многомодового световода (данный факт установлен экспериментально [19] и теоретически [6], [14]).

Если с учетом (15) записать действие в окрестности рассматриваемой точки и приравнять нулю его вариацию, то получим уравнение траектории частицы со спином $s = 1/2$ (подробнее см. [6]):

$$\frac{d\vec{l}}{dz} = \vec{l} \times \left[\vec{\nabla} \ln k + \frac{1}{k_0} \frac{\partial \vec{\kappa}}{\partial z} \right] \times \vec{l}, \quad (16)$$

где k определяется выражением, приведенным после формулы (15), и содержит параметр кручения, т.е. отличается от k_0 в (9). При выводе данного уравнения учтено, что $\vec{\nabla}(\vec{l}\vec{n}) = \vec{l}\partial(\vec{l}\vec{n})/dz$. Из (16) следует, что кручение траектории приводит к изменению кривизны по абсолютной величине и не меняет направления вектора кривизны. Из этого уравнения также видно, что вклады кривизны и кручения в траекторию частицы соизмеримы по абсолютной величине при выполнении либо условия $|\partial \ln \tau / \partial s| \sim \kappa$, либо условия $\tau \sim \kappa$.

4. ДВИЖЕНИЕ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ

Покажем, что рассматриваемый в работе эффект, также как и аналог оптического эффекта Магнуса, проявляется при движении ультрахолодных нейтронов. По аналогии с работой [22] аппроксимируем функциональную зависимость потенциальной энергии вблизи стенки нейтроновода при $x > 0$ параболой $U(x) = (x^2/H^2)\Delta U$, где $\Delta U \sim 10^{-7}$ эВ. При $E \sim \Delta U$ полагая $|\vec{l}\vec{n}| \approx 1$, $\tilde{\eta} = \text{const}$, из (16) получим уравнение траектории

$$\frac{d^2 x}{dz^2} = -\frac{2m\Delta U}{H^2 \hbar^2 (k_0 - \tilde{\eta}/2)^2} x, \quad \frac{d^2 y}{dz^2} \approx -\frac{1}{2k_0} \frac{\Delta U}{EH^2} \frac{\partial x}{\partial z}, \quad (17)$$

при этом $\tau_0 \approx -\Delta U/(EH)$.

Из (16) следует, что $\tau \approx \tau_0/(k_0 - \tilde{\eta}/2)$. Соответственно, $\Delta\tau = |\tau - \tau_0| \approx \tilde{\eta}\tau_0/(2k_0)$, т.е. $\Delta\tau/\tilde{\eta} = \tau_0/(2k_0)$. При $E \sim \Delta U$, $H \sim (1 \div 10)\lambda$ получим $\Delta\tau/\tilde{\eta} \sim (10^{-2} \div 10^{-1})$. Видно, что рассматриваемый в работе эффект будет проявляться для ультрахолодных нейтронов, также как и в случае аналога оптического эффекта Магнуса, будет наблюдаться сильное отклонение от законов геометрической оптики.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Покажем, что аналог обратного оптического эффекта Магнуса, также как и рассмотренный в работах [22] и [23] эффект, является следствием закона сохранения полного момента импульса.

Из (16) следует, что обобщенный импульс частицы равен $\vec{P} = \hbar k \vec{l}$. Пусть $r, \varphi, \tilde{z}$ — координаты цилиндрической системы координат.

Соответственно, $\tilde{z}$ -компонента орбитального момента $L_{\tilde{z}}$ при движении частицы по геликоидальной траектории будет равна $L_{\tilde{z}} = Pr \sin \alpha = \hbar k r^2 \varphi'_{\tilde{z}} \cos \alpha$, где $\text{tg } \alpha = r \varphi'_{\tilde{z}}$,

$\varphi'_z = \partial\varphi/\partial\tilde{z}$, α – угол между $\vec{l}$ и осью $O\tilde{Z}$. Второе слагаемое в (16) описывает оптический эффект Магнуса, который удовлетворяет закону сохранения полного момента импульса [22]. Поэтому вторым слагаемым можно пренебречь, в результате имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z}(kr^2\varphi'_z) = 0. \quad (18)$$

Поскольку $\varphi'_z = \varphi'_z \partial\tilde{z}/\partial z = \varphi'_z \cos\alpha$, то в соответствии с уравнением (18) получим, что $L_{\tilde{z}} = \text{const}$. При $\nu^2/c^2 \ll 1$ прецессией Томаса, как это указывалось в разделе 2, можно пренебречь, поэтому при движении частицы по геликоидальной траектории проекция вектора $\vec{p}$ на ось $O\tilde{Z}$ также сохраняется. Это означает, что при движении частицы по геликоидальной траектории сохраняется проекция полного момента на ось $O\tilde{Z}$.

Из полученных результатов следует, что дополнительное искривление траектории спиновой частицы обуславливается наличием дополнительной фазы (11), которая пропорциональна кручению и определяется спиральностью спиновой частицы (геометрическая фаза Ааронова–Анандана [29], являющаяся обобщением адиабатической фазы Берри). Отсюда следует, что спиральность частицы при наличии кручения траектории изменяет кривизну траектории, а в случае переменной кривизны происходит кручение траектории.

В данной работе обобщены результаты работы [22]. Показано, что дополнительное слагаемое к волновому вектору (8) параллельно бинормали.

Аналог обратного оптического эффекта Магнуса, также как аналог оптического эффекта Магнуса, в области энергий ультрахолодных нейтронов приводит к сильному отклонению от законов геометрической оптики.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Пусть

$$\hat{A} = \vec{P}\vec{\nu}, \quad \hat{B} = 1 + i\frac{1}{2}(\vec{\Sigma}\delta\vec{\Theta}), \quad (\text{П.1.1})$$

где $\vec{\nu}$ и $\vec{\Sigma}$ определены в (2) и (4), $\delta\vec{\Theta} = \vec{\eta}\delta z$. Тогда

$$2\{\hat{A}, \hat{B}\}_{\delta z=0}\hat{A} + \{\hat{A}, \{\hat{A}, \hat{B}\}\}_{\delta z=0} = \frac{1}{2}\hbar[(\vec{l}\vec{\nu})(\vec{\eta}\vec{\Sigma})(\vec{P}\vec{\nu}) + (\vec{P}\vec{\nu})(\vec{l}\vec{\nu})(\vec{\eta}\vec{\Sigma})] - \\ - \{\vec{P}\vec{\nu}, \delta\vec{\Theta}\vec{\nu} \times \vec{P}\}_{\delta z=0}, \quad (\text{П.1.2})$$

где

$$\{\vec{P}\vec{\nu}, \delta\vec{\Theta}\vec{\nu} \times \vec{P}\}_{\delta z=0} = -i\hbar(\vec{l}\vec{\nu})(\vec{\eta} \times \vec{\nu})\vec{P}. \quad (\text{П.1.3})$$

Выражение в квадратных скобках в правой части (П.1.2) преобразуем к виду

$$\frac{1}{2}\hbar[(\vec{l}\vec{\nu})(\vec{\eta}\vec{\Sigma})(\vec{P}\vec{\nu}) + (\vec{P}\vec{\nu})(\vec{l}\vec{\nu})(\vec{\eta}\vec{\Sigma})] = \frac{1}{2}\hbar[(\vec{l}\vec{\nu})(\vec{P}\vec{\nu}) + (\vec{P}\vec{\nu})(\vec{l}\vec{\nu})](\vec{\eta}\vec{\Sigma}) + \\ + (\vec{l}\vec{\nu})\{\vec{\eta}\vec{\Sigma}, \vec{P}\vec{\nu}\} = \hbar(\vec{l}\vec{P})(\vec{\eta}\vec{\Sigma}) + i\hbar(\vec{l}\vec{\nu})(\vec{\nu} \times \vec{\eta})\vec{P}. \quad (\text{П.1.4})$$

С учетом (П.1.2) и (П.1.3) отсюда получим

$$2\{\hat{A}, \hat{B}\}_{\delta z=0}\hat{A} + \{\hat{A}, \{\hat{A}, \hat{B}\}\}_{\delta z=0} = \hbar(\vec{\mathbf{I}}\vec{\mathbf{P}})(\vec{\eta}\vec{\Sigma}), \quad (\text{П.1.5})$$

где операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ определены в (П.1.1).

Пусть

$$\delta\vec{\Theta} = \vec{\mathbf{I}}\tilde{\kappa}\delta z. \quad (\text{П.1.6})$$

Отсюда с учетом (П.1.1) по аналогии с выводом (П.1.2) получим

$$\begin{aligned} 2\{\hat{A}, \hat{B}\}_{\delta z=0}\hat{A} + \{\hat{A}, \{\hat{A}, \hat{B}\}\}_{\delta z=0} &= \frac{1}{2}\hbar\tilde{\kappa}[(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})(\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu}) + (\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})] - \\ &- \{\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu}, \delta\vec{\Theta}\vec{\nu} \times \vec{\mathbf{P}}\}_{\delta z=0}, \end{aligned} \quad (\text{П.1.7})$$

где

$$\{\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu}, \delta\vec{\Theta}\vec{\nu} \times \vec{\mathbf{P}}\}_{\delta z=0} = +i\hbar\tilde{\kappa}(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\nu} \times \vec{\mathbf{I}})\vec{\mathbf{P}}. \quad (\text{П.1.8})$$

Выражение в квадратных скобках в правой части (П.1.7) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hbar\tilde{\kappa}[(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})(\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu}) + (\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})] &= \frac{1}{2}\hbar[(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu}) + (\vec{\mathbf{P}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma}) + \\ &+ (\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})\{\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma}, \vec{\mathbf{P}}\vec{\nu}\}] = \hbar\tilde{\kappa}(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\mathbf{P}}) + i\hbar\tilde{\nu}(\vec{\mathbf{I}}\vec{\nu})(\vec{\nu} \times \vec{\mathbf{I}})\vec{\mathbf{P}}. \end{aligned} \quad (\text{П.1.9})$$

С учетом (П.1.7), (П.1.8) отсюда получим

$$2\{\hat{A}, \hat{B}\}_{\delta z=0}\hat{A} + \{\hat{A}, \{\hat{A}, \hat{B}\}\}_{\delta z=0} = \hbar\tilde{\kappa}(\vec{\mathbf{I}}\vec{\Sigma})(\vec{\mathbf{I}}\vec{\mathbf{P}}). \quad (\text{П.1.10})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Введем криволинейную систему координат

$$\begin{aligned} x^1 &= x \cos \kappa z + y \sin \kappa z, \\ x^2 &= -x \sin \kappa z + y \cos \kappa z, \\ x^3 &= z. \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

Используя известные из курса дифференциальной геометрии формулы для базисных векторов $\vec{\mathbf{e}}'_\alpha$ (см. [25]), получим

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \kappa y \\ 0 & 1 & -\kappa x \\ \kappa y & -\kappa x & 1 + \kappa^2(x^2 + y^2) \end{pmatrix}, \quad (\text{П.2.2})$$

где для метрического тензора имеет место соотношение $g_{\alpha\beta} = \vec{\mathbf{e}}'_\alpha \vec{\mathbf{e}}'_\beta$.

Из (П.2.2) видно, что определитель g метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ равен единице, а при $x = y = 0$ система координат является декартовой.

Список литературы

- [1] С. М. Трошин, Н. Е. Тюрин. УФН. 1994. Т. 164. С. 1073.
- [2] Г. В. Данилян. УФН. 1980. Т. 131. С. 329.
- [3] Д. В. Зарецкий, В. К. Сироткин. ЯФ. 1984. Т. 39. С. 585; Е. Kolomensky, V. M. Lobashev, A. V. Pirozhkov et al. Phys. Lett. B. 1981. V. 107. P. 272; Yu. G. Abov, P. A. Krupchitsky, Yu. A. Oratovsky. Phys. Lett. 1964. V. 12. P. 25; В. М. Лобашев, В. Л. Назаренко, Л. Ф. Саенко и др. Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 268.
- [4] Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 397; В. П. Алфименков. УФН. 1984. Т. 144. С. 361.
- [5] Б. Я. Зельдович, В. С. Либерман. Квантовая электроника. 1990. Т. 17. С. 493; А. В. Дугин, Б. Я. Зельдович, Н. Д. Кундикова, В. С. Либерман. Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53. С. 186; ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 1474; А. В. Воляж, С. Н. Лапеева. Письма в ЖТФ. 1992. Т. 18. № 8. С. 53; 1994. Т. 20. № 8. С. 4; Н. Р. Садыков. Оптика и спектроскопия. 2000. Т. 89. № 2. С. 273; Ф. И. Федоров. ДАН СССР. 1955. Т. 105. С. 465; ЖПС. 1977. Т. 27. С. 580.
- [6] Н. Р. Садыков. Оптика и спектроскопия. 1998. Т. 84. № 4. С. 300.
- [7] M. V. Berry. Pros. Roy. Soc. London. Ser. A. 1984. V. 392. P. 45; Sci. American. 1988. V. 259. № 6. P. 26.
- [8] Д. Н. Клышко. УФН. 1993. Т. 163. С. 1.
- [9] С. И. Виноцкий, В. Л. Дербов, В. М. Дубовик, Б. Д. Марковски, Ю. П. Степановский. УФН. 1990. Т. 160. № 6. С. 1.
- [10] S. Pancharatnam. Proc. Indian Acad. Sci. Ser. A. 1956. V. A44. P. 247.
- [11] С. М. Рытов. ДАН СССР. 1938. Т. 18. С. 263.
- [12] В. В. Владимировский. ДАН СССР. 1941. Т. 21. С. 222.
- [13] A. Tomita, R. Y. Chiao. Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57. P. 937.
- [14] Н. Р. Садыков. Известия высших учебных заведений. Физика. 1999. № 10. С. 58.
- [15] Н. Р. Садыков. Квантовая электроника. 1993. Т. 20. С. 1140.
- [16] Н. Р. Садыков. Оптика и спектроскопия. 1995. Т. 78. № 2. С. 300.
- [17] Н. Р. Садыков. Квантовая электроника. 1992. Т. 19. С. 1021.
- [18] Н. Р. Садыков. Квантовая электроника. 1996. Т. 23. С. 277.
- [19] И. В. Катаевская, Н. Д. Кундикова. Квантовая электроника. 1995. Т. 22. С. 959.
- [20] Н. Д. Кундикова, В. Г. Николаев, Н. Р. Садыков, М. О. Садыкова. Оптика и спектроскопия. 2003. Т. 94. № 4. С. 699.
- [21] Н. Р. Садыков. ДАН. 2003. Т. 389. № 1. С. 38.
- [22] Н. Р. Садыков. ТМФ. 2003. Т. 135. № 2. С. 280.
- [23] Н. Р. Садыков. ТМФ. 2004. Т. 139. № 3. С. 491.
- [24] B. Simon. Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. P. 2167.
- [25] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
- [26] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1990.
- [27] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
- [28] L. H. Thomas. Nature. 1926. V. 117. P. 514.
- [29] Y. Aharonov, J. Anandan. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1593.

Поступила в редакцию 7.VII.2004 г.,
после доработки 29.XI.2004 г.