Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. З. Пакуляк, С. М. Хорошкин, Весовая функция для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 1, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1879>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:22:49

© 2005 г. С.З. Пакуляк^{*,†,‡}, С.М. Хорошкин^{*,‡}

ВЕСОВАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ КВАНТОВОЙ АФФИННОЙ АЛГЕБРЫ $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$

Получена универсальная весовая функция для квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. Вычисления проведены в рамках метода проекций произведений дринфельдовских токов на пересечения борелевских подалгебр.

Ключевые слова: квантовая аффинная алгебра, токовая реализация, иерархический анзац Бете, весовая функция, би-ортогональные разложения токовых борелевских подалгебр, проекции на пересечения различных борелевских подалгебр.

1. ВВЕДЕНИЕ

В идеологии иерархического анзаца Бете [1] процедура описания собственных векторов трансфер-матриц в конечномерных представлениях квантовых аффинных алгебр состоит из двух шагов. Сначала строится специальная рациональная функция со значениями в соответствующих представлениях, затем решается система уравнений Бете.

Эти рациональные векторнозначные функции часто называют иерархическими векторами Бете вне массовой оболочки. Они служат также производящими функциями векторов конечномерных представлений квантовых аффинных алгебр. Мы будем пользоваться термином “весовая функция”, пришедшим из приложений этих объектов к теории решений разностных уравнений Книжника–Замолотчикова [2].

Общая конструкция весовых функций для квантовой алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, предложенная недавно в работе [3], использует существование двух различных типов борелевских подалгебр в квантовых аффинных алгебрах. Один тип связан с реализацией этих алгебр как квантованных алгебр Каца–Мути, второй – с токовой реализацией алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$, предложенной Дринфельдом в работе [4]. Весовая функция определяется как проекция

^{*}Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, Москва, Россия.
E-mail: khor@itep.ru

[†]Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, ОИЯИ, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: pakuliak@thsun1.jinr.ru

[‡]Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany

произведений дринфельдовских токов на пересечение борелевских подалгебр различного типа в $U_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ (раздел 3.1).

Целью настоящей работы является развитие техники вычислений весовых функций на основе определений, сформулированных в работе [3]. В соответствии с этими определениями для вычисления весовой функции необходимо привести произведение дринфельдовских токов к некоторому нормальному порядку и затем оставить только те слагаемые, которые принадлежат пересечению борелевских подалгебр различных типов. Процедура нормального упорядочения требует исследования присоединенного действия токов и свойств составных токов, введенных в работе [5]. Окончательным результатом является явная формула для универсальной весовой функции в алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, которую затем можно специализировать для любого конечномерного представления квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. Отметим, что на уровне *элементарных* (*evaluation*) представлений¹⁾ весовая функция для $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_N)$ может быть найдена в работе [6].

Работа организована следующим образом. В разделе 2 вводятся основные объекты исследования, в разделе 3 приведены основные результаты работы. Они состоят из явного выражения для универсальной весовой функции в алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ (теоремы 1 и 2). В качестве частного случая общей формулы получено выражение для весовой функции в алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, которое может быть переписано в интегральном виде (теорема 3). Ядром этого интегрального преобразования является хорошо известная функция, совпадающая с статистической суммой шестивершинной модели на квадратной решетке с фиксированными граничными условиями. Комбинаторное тождество для этого ядра мы доказали, используя самосопряженность проекционных операторов (предложение 3.4).

Разделы 4 и 5 посвящены доказательствам основных утверждений. Для этого мы рассмотрели аналитические свойства составных токов и соответствующие произведения токов (струн), а также присоединенные действия токов. Отметим важность симметризаций, основанных на свойствах аналитических продолжений произведений токов, см. предложение 5.1. В приложениях мы представили необходимые свойства дополнительного проекционного оператора, коммутационные соотношения между токами и их проекциями, а также привели альтернативное доказательство главного утверждения работы.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

2.1. Алгебра $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ в генераторах Шевалье. Квантовая аффинная алгебра $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ порождена образующими Шевалье²⁾ $e_{\pm\alpha_i}, k_{\alpha_i}^{\pm 1}$, где $i = 0, 1, 2$ и $\prod_{i=0}^2 k_{\alpha_i} = 1$,

¹⁾К сожалению, общепринятое название *evaluation representation* не поддается благозвучному переводу на русский язык.

²⁾В последующем мы не будем использовать оператор градуировки и положим центральный заряд равным нулю. Обычно такая алгебра обозначается $U'_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$.

удовлетворяющими соотношениям

$$k_{\alpha_i} e_{\pm\alpha_j} k_{\alpha_i}^{-1} = q^{\pm a_{ij}} e_{\pm\alpha_j}, \quad [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] = \delta_{ij} \frac{k_{\alpha_i} - k_{\alpha_i}^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad (2.1)$$

$$e_{\pm\alpha_i}^2 e_{\pm\alpha_j} + [2]_q e_{\pm\alpha_i} e_{\pm\alpha_j} e_{\pm\alpha_i} + e_{\pm\alpha_j} e_{\pm\alpha_i}^2 = 0, \quad i \neq j, \quad (\alpha_i, \alpha_j) = -1, \quad (2.2)$$

где $[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$ — гауссово q -число, $a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$ — симметризованная матрица Картана для аффинной алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$,

$$a_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Одна из возможных структур Хопфа (которую мы будем называть *стандартной*) задается формулами

$$\begin{aligned} \Delta(e_{\alpha_i}) &= e_{\alpha_i} \otimes 1 + k_{\alpha_i} \otimes e_{\alpha_i}, & \Delta(e_{-\alpha_i}) &= 1 \otimes e_{-\alpha_i} + e_{-\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}^{-1}, \\ \Delta(k_{\alpha_i}) &= k_{\alpha_i} \otimes k_{\alpha_i}, & \varepsilon(e_{\pm\alpha_i}) &= 0, \quad \varepsilon(k_{\alpha_i}^{\pm 1}) = 1, \\ a(e_{\alpha_i}) &= -k_{\alpha_i}^{-1} e_{\alpha_i}, & a(e_{-\alpha_i}) &= -e_{-\alpha_i} k_{\alpha_i}, \quad a(k_{\alpha_i}^{\pm 1}) = k_{\alpha_i}^{\mp 1}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где Δ , ε и a являются отображениями коумножения, коединицы и антипода, соответственно.

2.2. Токовая реализация алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. Как и любая квантовая аффинная алгебра, $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ допускает токовую реализацию [4]. В этой реализации (мы опять предполагаем, что центральный заряд равен нулю) алгебра $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ порождена элементами $e_i[n]$, $f_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n \in \mathbb{Z}$, и $k_i^{\pm 1}$, $h_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Эти элементы удобно собрать в производящие функции

$$\begin{aligned} e_i(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_i[n] z^{-n}, \quad f_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_i[n] z^{-n}, \\ \psi_i^{\pm}(z) &= \sum_{n > 0} \psi_i^{\pm}[n] z^{\mp n} = k_i^{\pm 1} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{n > 0} h_i[\pm n] z^{\mp n}\right), \end{aligned} \quad (2.5)$$

которые удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} (z - q^{(i,j)} w) e_i(z) e_j(w) &= e_j(w) e_i(z) (q^{(i,j)} z - w), \\ (z - q^{-(i,j)} w) f_i(z) f_j(w) &= f_j(w) f_i(z) (q^{-(i,j)} z - w), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi_i^{\pm}(z) e_j(w) (\psi_i^{\pm}(z))^{-1} &= \frac{(q^{(i,j)} z - w)}{(z - q^{(i,j)} w)} e_j(w), \\ \psi_i^{\pm}(z) f_j(w) (\psi_i^{\pm}(z))^{-1} &= \frac{(q^{-(i,j)} z - w)}{(z - q^{-(i,j)} w)} f_j(w), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\psi_i^{\mu}(z) \psi_j^{\nu}(w) = \psi_j^{\nu}(w) \psi_i^{\mu}(z), \quad \mu, \nu = \pm, \quad (2.8)$$

$$[e_i(z), f_j(w)] = \frac{\delta_{ij} \delta(z/w)}{q - q^{-1}} (\psi_i^{+}(z) - \psi_i^{-}(w)), \quad (2.9)$$

где $i, j = \alpha, \beta$, $\delta(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z^k$, $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 2$, $(\alpha, \beta) = -1$,

$$\text{Sym}_{z_1, z_2} (e_i(z_1) e_i(z_2) e_j(w) - (q + q^{-1}) e_i(z_1) e_j(w) e_i(z_2) + e_j(w) e_i(z_1) e_i(z_2)) = 0, \quad (2.10)$$

$$\text{Sym}_{z_1, z_2} (f_i(z_1) f_i(z_2) f_j(w) - (q + q^{-1}) f_i(z_1) f_j(w) f_i(z_2) + f_j(w) f_i(z_1) f_i(z_2)) = 0 \quad (2.11)$$

при $i, j = \alpha, \beta$, $i \neq j$.

Соответствие

$$\begin{aligned} k_{\alpha_1} &\mapsto k_{\alpha}, & k_{\alpha_2} &\mapsto k_{\beta}, & k_{\alpha_0} &\mapsto k_{\alpha}^{-1} k_{\beta}^{-1}, \\ e_{\alpha_1} &\mapsto e_{\alpha}[0], & e_{\alpha_2} &\mapsto e_{\beta}[0], & e_{-\alpha_1} &\mapsto f_{\alpha}[0], & e_{-\alpha_2} &\mapsto f_{\beta}[0], \\ e_{\alpha_0} &\mapsto f_{\beta}[1] f_{\alpha}[0] - q f_{\alpha}[0] f_{\beta}[1], & e_{-\alpha_0} &\mapsto e_{\alpha}[0] e_{\beta}[-1] - q^{-1} e_{\beta}[-1] e_{\alpha}[0] \end{aligned} \quad (2.12)$$

устанавливает изоморфизм двух реализаций.

Алгебра $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ обладает естественным пополнением $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3) = U_q^{(D)}(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, которое может быть описано как минимальное расширение алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, действующее во всех представлениях $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ старшего веса относительно борелевской подалгебры $U_q(\mathfrak{b}_+)$. Подробное описание этого пополнения дано в работе [7], см. раздел 2.2.

В представлении старшего веса алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ всякий матричный коэффициент произвольного произведения токов $a_1(z_1) \dots a_n(z_n)$ является формальным рядом в пространстве

$$\mathbb{C}[z_1, z_1^{-1}, \dots, z_m, z_m^{-1}] \left[\left[\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_2}, \dots, \frac{z_m}{z_{m-1}} \right] \right],$$

который сходится в области $|z_1| \gg |z_2| \gg \dots \gg |z_m|$ к рациональной функции [8], [9]. Этот факт и коммутационные соотношения (2.6), которые описывают аналитические продолжения во внешность этой области, позволяют рассматривать произведения токов как мероморфные функции со значениями в $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. В последующем мы будем следовать этому аналитическому подходу, заменяя формальные интегралы на контурные. Интеграл без специализации контура всегда будет пониматься как формальный.

С токовой реализацией алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ ассоциирована другая структура Хопфа. Она формулируется в токах следующим образом:

$$\Delta^{(D)} e_i(z) = e_i(z) \otimes 1 + \psi_i^-(z) \otimes e_i(z), \quad (2.13a)$$

$$\Delta^{(D)} f_i(z) = 1 \otimes f_i(z) + f_i(z) \otimes \psi_i^+(z), \quad (2.13б)$$

$$\Delta^{(D)} \psi_i^{\pm}(z) = \psi_i^+(z) \otimes \psi_i^{\pm}(z), \quad (2.13в)$$

$$a^{(D)}(e_i(z)) = -(\psi_i^-(z))^{-1} e_i(z), \quad a^{(D)}(f_i(z)) = -f_i(z) (\psi_i^+(z))^{-1}, \quad (2.13г)$$

$$a^{(D)}(\psi_i^{\pm}(z)) = (\psi_i^{\pm}(z))^{-1}, \quad \varepsilon(e_i(z)) = \varepsilon(f_i(z)) = 0, \quad \varepsilon(\psi_i^{\pm}(z)) = 1. \quad (2.13д)$$

Коумножение Δ из п. 2.1 и $\Delta^{(D)}$ связаны преобразованием подобия, которое может быть явно описано [7].

2.3. Борелевские подалгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. Алгебра $U_q(\mathfrak{b}_+)$ является подалгеброй $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, порожденной элементами e_{α_i} и $k_{\alpha_i}^{\pm 1}$, $i = 0, 1, 2$. Обозначим через $U_q(\mathfrak{b}_-)$ подалгебру в $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, порожденную элементами $e_{-\alpha_i}$ и $k_{\alpha_i}^{\pm 1}$, $i = 0, 1, 2$.

Алгебры $U_q(\mathfrak{b}_{\pm})$ являются подалгебрами Хопфа в $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ относительно стандартного коумножения Δ и служат q -деформациями обертывающих алгебр двух противоположных борелевских подалгебр в аффинной алгебре Ли $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$. Мы будем называть их стандартными борелевскими подалгебрами. Они содержат подалгебры $U_q(\mathfrak{n}_{\pm})$, которые образованы элементами $e_{\pm \alpha_i}$, $i = 0, 1, 2$.

Подалгебра $U_q(\mathfrak{n}_+)$ является левым коидеалом в $U_q(\mathfrak{b}_+)$ относительно стандартного коумножения, а подалгебра $U_q(\mathfrak{n}_-)$ — правым коидеалом в $U_q(\mathfrak{b}_-)$ относительно того же коумножения:

$$\Delta(U_q(\mathfrak{n}_+)) \subset U_q(\mathfrak{b}_+) \otimes U_q(\mathfrak{n}_+), \quad \Delta(U_q(\mathfrak{n}_-)) \subset U_q(\mathfrak{n}_-) \otimes U_q(\mathfrak{b}_-).$$

Другие борелевские подалгебры связаны с токовой реализацией алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$.

Обозначим через U_F подалгебру в $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, порожденную элементами $k_i^{\pm 1}$, $f_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n \in \mathbb{Z}$, и элементами $h_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n > 0$. Ее пополнение $\overline{U}_F$ является подалгеброй Хопфа в $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ относительно коумножения $\Delta^{(D)}$. Будем называть U_F токовой борелевской подалгеброй. Она содержит подалгебру U_f , порожденную элементами $f_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n \in \mathbb{Z}$. Пополненная алгебра $\overline{U}_f$ является правым коидеалом в $\overline{U}_F$ относительно коумножения $\Delta^{(D)}$ и служит q -деформацией обертывающей алгебры токов со значениями в конечномерной нильпотентной подалгебре $\mathfrak{n}_-$.

Противоположная токовая борелевская подалгебра U_E образована элементами $k_i^{\pm 1}$, $e_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n \in \mathbb{Z}$, и элементами $h_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n < 0$.

2.4. Проекции $P^{\pm}$ на пересечения борелевских подалгебр. Обозначим через U_F^+ и U_f^- следующие подалгебры в токовой борелевской алгебре U_F :

$$U_f^- = U_F \cap U_q(\mathfrak{n}_-), \quad U_F^+ = U_F \cap U_q(\mathfrak{b}_+). \quad (2.14)$$

Пусть $\text{ad}_x : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3) \rightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ — оператор присоединенного действия x в $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ для любого элемента $x \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. Этот оператор определяется соотношением

$$\text{ad}_x(y) = \sum_j a(x'_j) \cdot y \cdot x''_j, \quad \text{если} \quad \Delta(x) = \sum_j x'_j \otimes x''_j.$$

Для $i = \alpha, \beta$ обозначим через S_i операторы $\text{ad}_{f_i[0]}$, так что

$$S_i(y) = y f_i[0] - f_i[0] k_i y k_i^{-1}. \quad (2.15)$$

Мы будем называть S_i *экранирующими операторами*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. (I) Алгебра U_f^- порождена элементами $f_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n \leq 0$; алгебра U_F^+ — элементами $k_i^{\pm 1}$, $f_i[n]$, $h_i[n]$, $i = \alpha, \beta$, $n > 0$, а также элементом

$$f_{\alpha+\beta}[1] = f_\beta[1]f_\alpha[0] - qf_\alpha[0]f_\beta[1] = -(f_\alpha[1]f_\beta[0] - qf_\beta[0]f_\alpha[1]). \quad (2.16)$$

(II) Подалгебры U_f^- и U_F^+ инвариантны относительно действия экранирующих операторов S_i , $i = \alpha, \beta$.

(III) Подалгебра U_F^+ есть левый коидеал в U_F относительно коумножения $\Delta^{(D)}$; подалгебра U_f^- — правый коидеал U_F относительно того же коумножения $\Delta^{(D)}$.

(IV) Умножение в U_F устанавливает изоморфизм векторных пространств U_F и $U_f^- \otimes U_F^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (II) проверяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S_\alpha(f_\beta[1]f_\alpha[0] - qf_\alpha[0]f_\beta[1]) &= \\ &= (f_\beta[1]f_\alpha[0] - qf_\alpha[0]f_\beta[1])f_\alpha[0] - q^{-1}f_\alpha[0](f_\beta[1]f_\alpha[0] - qf_\alpha[0]f_\beta[1]) = \\ &= f_\beta[1]f_\alpha[0]f_\alpha[0] - (q + q^{-1})f_\alpha[0]f_\beta[1]f_\alpha[0] + f_\alpha[0]f_\alpha[0]f_\beta[1] = 0. \end{aligned}$$

Для доказательства (III) используется формула (2.13а), записанная в модах как

$$\Delta^{(D)}(f_i[n]) = 1 \otimes f_i[n] + \sum_{k \geq 0} f_i[n-k] \otimes \psi_i^+[k].$$

Необходимо показать, что $\Delta^{(D)}(f_\beta[1]f_\alpha[0] - qf_\alpha[0]f_\beta[1]) \in U_F \otimes U_F^+$. Для этого достаточно убедиться, что $\psi_\beta^+[k]f_\alpha[0] - qf_\alpha[0]\psi_\beta^+[k] \in U_F^+$. Последнее выполняется в силу равенства

$$\psi_\beta^+(z)f_\alpha[0] - qf_\alpha[0]\psi_\beta^+(z) = (q^2 - 1) \sum_{n=1}^{\infty} (qz)^{-n} \psi_\beta^+(z)f_\alpha[n].$$

Определим операторы $P = P^+ : U_F \rightarrow U_F^+$ и $P^- : U_F \rightarrow U_f^-$ соотношениями

$$P(f_1 f_2) = P^+(f_1 f_2) = \varepsilon(f_1) f_2, \quad P^-(f_1 f_2) = f_1 \varepsilon(f_2) \quad (2.17)$$

для любых $f_1 \in U_f^-$ и $f_2 \in U_F^+$. Доказанное предложение показывает, что алгебры U_f^- и U_F^+ удовлетворяют условиям 1, 2 раздела 4.1 работы [8] (см. также работу [10], раздел 6) относительно коумножения $(\Delta^{(D)})^{\text{op}}$. Поэтому согласно [8] операторы $P^\pm$ являются корректно определенными операторами проектирования, $(P^\pm)^2 = P^\pm$. Эти операторы продолжаются до пополненной алгебры $\overline{U}_F$, и для любого элемента $f \in \overline{U}_F$ существует следующее каноническое разложение:

$$f = \sum_i P^-(f_i'') \cdot P^+(f_i'), \quad \text{если} \quad \Delta^{(D)}(f) = \sum_i f_i' \otimes f_i''. \quad (2.18)$$

Выражение вида $f = \sum_i \tilde{f}_i \tilde{f}_i'$, где $\tilde{f}_i \in \overline{U}_f^-$, $\tilde{f}_i' \in \overline{U}_F^+$, назовем *нормально упорядоченным разложением*. Нормально упорядоченное разложение согласовано с действием алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ в представлениях старшего веса. Формула (2.18) предъявляет нормально упорядоченное разложение произвольного элемента $f \in \overline{U}_F$.

2.5. Составные токи и струны. Определим следующую производящую функцию элементов из $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$:

$$f_{\alpha+\beta}(z) = \oint f_{\alpha}(z)f_{\beta}(w)\frac{dw}{w} - \oint \frac{q^{-1} - z/w}{1 - q^{-1}z/w}f_{\beta}(w)f_{\alpha}(z)\frac{dw}{w}, \quad (2.19)$$

где формальный интеграл $\oint g(w)\frac{dw}{w}$ от ряда Лорана $g(w) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k w^{-k}$ означает взятие коэффициента g_0 .

Этот формальный интеграл может быть переписан на аналитическом языке [5]:

$$f_{\alpha+\beta}(z) = - \operatorname{res}_{w=zq^{-1}} f_{\alpha}(z)f_{\beta}(w) \frac{dw}{w}, \quad (2.20)$$

так что в алгебре $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ выполняются следующие соотношения:

$$f_{\alpha}(z)f_{\beta}(w) = \frac{1 - qz/w}{q - z/w}f_{\beta}(w)f_{\alpha}(z) + \delta(zq^{-1}/w)f_{\alpha+\beta}(z). \quad (2.21)$$

Для любых $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ произведения

$$\begin{aligned} & f_{\alpha}(u_1) \dots f_{\alpha}(u_a) f_{\alpha+\beta}(u_{a+1}) \dots f_{\alpha+\beta}(u_{a+b}), \\ & f_{\alpha+\beta}(u_1) \dots f_{\alpha+\beta}(u_a) f_{\beta}(u_{a+1}) \dots f_{\beta}(u_{a+b}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

будут называться *струнами*. Произведения

$$\begin{aligned} & f_{\alpha+\beta}(u_{a+b}) \dots f_{\alpha+\beta}(u_{a+1}) f_{\alpha}(u_a) \dots f_{\alpha}(u_1), \\ & f_{\beta}(u_{a+b}) \dots f_{\beta}(u_{a+1}) f_{\alpha+\beta}(u_a) \dots f_{\alpha+\beta}(u_1) \end{aligned} \quad (2.23)$$

назовем *обратными струнами* к струнам (2.22). Струны обладают замечательными аналитическими свойствами, важными для целей настоящего исследования. Эти свойства сформулированы в предложении 4.3.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Универсальная весовая функция. Пусть V – представление алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ и v – вектор в V . Назовем v вектором старшего веса относительно токовой борелевской подалгебры U_E , если

$$\begin{aligned} e_i(z)v &= 0, \\ \psi_i^{\pm}(z)v &= \lambda_i(z)v, \quad i = \alpha, \beta, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $\lambda_i(z)$ является мероморфной функцией, разлагаемой в ряд по степеням z^{-1} для $\psi_i^{+}(z)$ и в ряд по степеням z для $\psi_i^{-}(z)$. Представление V называется представлением старшего веса, отвечающим вектору $v \in V$ относительно U_E , если оно порождено действием алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ на вектор v .

Обозначим через Π набор $\{\alpha, \beta\}$ простых положительных корней алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$. Назовем упорядоченный набор $I = \{a_1, \dots, a_{|I|}\}$ вместе с отображением $\iota: I \rightarrow \Pi$ упорядоченным Π -мультимножеством.

Предположим, что для любого упорядоченного Π -мультимножества I , $|I| = n$, задан формальный ряд $W(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) \in U\{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}\}$, $i_k \in I$, где

$$U\{t_{i_1}, \dots, t_{i_n}\} = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_3})[t_{i_1}, t_{i_1}^{-1}, \dots, t_{i_n}, t_{i_n}^{-1}] \left[\left[\frac{t_{i_2}}{t_{i_1}}, \frac{t_{i_3}}{t_{i_2}}, \dots, \frac{t_{i_n}}{t_{i_{n-1}}}, \frac{1}{t_{i_n}} \right] \right], \quad (3.2)$$

т.е. $W(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ является формальным степенным рядом по переменным $t_{i_2}/t_{i_1}, t_{i_3}/t_{i_2}, \dots, t_{i_n}/t_{i_{n-1}}, 1/t_{i_n}$ с коэффициентами, выраженными в полиномах $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_3})[t_{i_1}, t_{i_1}^{-1}, \dots, t_{i_n}, t_{i_n}^{-1}]$, и удовлетворяет условиям

1) для любого представления V старшего веса со старшим вектором v относительно U_E функция $w_V(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) = W(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})v$ сходится в области $|t_{i_1}| \gg \dots \gg |t_{i_n}|$ к мероморфной V -значной функции;

2) если $I = \emptyset$, то $W = 1$ и $w_V = v$;

3) если $V = V_1 \otimes V_2$ – тензорное произведение представлений старшего веса со старшими векторами v_1, v_2 и соответствующими рядами $\{\lambda_i^{(1)}(z)\}$ и $\{\lambda_i^{(2)}(z)\}$, $i = \alpha, \beta$, то для любого упорядоченного Π -мультимножества I будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} w_V(\{t_a | a \in I\}) &= \sum_{I=I_1 \amalg I_2} w_{V_1}(\{t_a | a \in I_1\}) \otimes w_{V_2}(\{t_a | a \in I_2\}) \times \\ &\times \prod_{a \in I_1} \lambda_{\iota(a)}^{(2)}(t_a) \times \prod_{a < b, a \in I_1, b \in I_2} \frac{q^{-(\iota(a), \iota(b))} t_a - t_b}{t_a - q^{-(\iota(a), \iota(b))} t_b}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Набор $W(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ будем называть *универсальной весовой функцией*, а набор $w(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ – *весовой функцией*.

Если в весовой функции в качестве параметров выбрать решения соответствующей системы уравнений Бете, то получится набор векторов Бете. Весовая функция при свободных параметрах систематически использовалась при исследовании решений q -разностного уравнения Книжника–Замолотчикова [2], [3], [6].

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ – упорядоченное Π -мультимножество. Положим

$$W(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) = P(f_{\iota(i_1)}(t_{i_1}) \dots f_{\iota(i_n)}(t_{i_n})). \quad (3.4)$$

Основной результат работы [3] в частном случае алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}_3})$ может быть сформулирован следующим образом.

ТЕОРЕМА [3]. *Набор $W(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$, определенный формулой (3.4), является универсальной весовой функцией.*

Отметим еще раз, что все выражения для универсальных весовых функций $W(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ должны пониматься как формальные ряды по переменным $t_{i_2}/t_{i_1}, t_{i_3}/t_{i_2}, \dots, t_{i_n}/t_{i_{n-1}}, 1/t_{i_n}$. Для векторнозначной весовой функции $w(t_{i_1}, \dots, t_{i_n})$ мы не будем делать различий в определении области, в которой эта функция может быть разложена. Более подробные комментарии см. в п. 5.1.

3.2. Редукция к проекциям струн. Пусть S_n – группа перестановок n элементов. Для любого набора $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ переменных $t_1, \dots, t_n$ и любого $\sigma \in S_n$ обозначим через ${}^\sigma \bar{t}$ набор переменных $\{t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}\}$. Мы придерживаемся обозначения $\hat{\omega}$ для элемента группы S_n наибольшей длины. В этих обозначениях набор $\hat{\omega} \bar{t}$ означает исходный набор переменных $\bar{t}$ с противоположным порядком: $\hat{\omega} \bar{t} = \{t_n, \dots, t_1\}$.

Группа S_n действует естественным образом на пространстве векторзначных мероморфных функций n переменных $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ по правилу $F(\bar{t}) \mapsto {}^\sigma F(\bar{t})$, где

$${}^\sigma F(\bar{t}) = {}^\sigma F(t_1, \dots, t_n) = F(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)}) = F({}^\sigma \bar{t}).$$

Предположим, что $F(\bar{t})$ – ряд в области $|t_1| \gg \dots \gg |t_n|$ со значениями в векторном пространстве V , т.е. $F(\bar{t})$ принадлежит пространству

$$V[t_1, t_1^{-1}, \dots, t_n, t_n^{-1}] \left[\left[\frac{t_2}{t_1}, \frac{t_3}{t_2}, \dots, \frac{t_n}{t_{n-1}}, \frac{1}{t_n} \right] \right]. \quad (3.5)$$

Пусть этот ряд сходится в области $|t_1| \gg \dots \gg |t_n|$ к аналитической функции, и для любой перестановки $\sigma \in S_n$ эта функция обладает аналитическим продолжением в область $|t_{\sigma(1)}| \gg \dots \gg |t_{\sigma(n)}|$. Тогда положим ${}^\sigma F(\bar{t})$ равным формальному ряду, который является аналитическим продолжением в область $|t_1| \gg \dots \gg |t_n|$ функции $F(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(n)})$. Таким образом, ${}^\sigma F(\bar{t})$ также является элементом пространства (3.5).

Принимая вышеизложенные соглашения, в области $|t_1| \gg \dots \gg |t_n|$ под симметризацией $\text{Sym}_t^n F(t_1, \dots, t_n)$ функции $F(t_1, \dots, t_n)$, также как и ряда $F(t_1, \dots, t_n)$, мы будем понимать сумму $\text{Sym}_t^n F(t_1, \dots, t_n) = \sum_{\sigma \in S_n} {}^\sigma F(t_1, \dots, t_n)$. При этом q -симметризация функции $F(\bar{t})$ от n переменных или ряда $F(\bar{t})$ в области $|t_1| \gg \dots \gg |t_n|$ определяется как

$$\overline{\text{Sym}}_t^n F(\bar{t}) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{\substack{\ell < \ell' \\ \sigma(\ell) > \sigma(\ell')}} \frac{q^{-1} - qt_{\sigma(\ell)}/t_{\sigma(\ell')}}{q - q^{-1}t_{\sigma(\ell)}/t_{\sigma(\ell')}} {}^\sigma F(\bar{t}). \quad (3.6)$$

Аналогичным образом определяется симметризация ряда, сходящегося в другой асимптотической зоне.

Поскольку оператор P продолжается до проекционного оператора в пополненной алгебре $\overline{U}_F$, где определено аналитическое продолжение произведений токов, универсальная весовая функция (3.4) допускает аналитическое продолжение в другие асимптотические зоны.

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ – упорядоченное Π -мультимножество. Для любого $\sigma \in S_n$ обозначим через ${}^\sigma I$ упорядоченное Π -мультимножество, ${}^\sigma I = \{i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(n)}\}$, отличающееся от I перестановкой порядка элементов, с тем же отображением $\iota: I \rightarrow \Pi$. Пусть $W(t_{i_{\sigma(1)}} \dots t_{i_{\sigma(n)}})$ – универсальная весовая функция, соответствующая упорядоченному множеству ${}^\sigma I$, и $\widetilde{W}(t_{i_1} \dots t_{i_n})$ – аналитическое продолжение весовой функции $W(t_{i_1} \dots t_{i_n})$ в область $|t_{i_{\sigma(1)}}| \gg \dots \gg |t_{i_{\sigma(n)}}|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Универсальная весовая функция (3.4) удовлетворяет соотношениям*

$$W(t_{i_{\sigma(1)}} \dots t_{i_{\sigma(n)}}) = \prod_{\substack{k < l \\ \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(l)}} \frac{q^{(\iota(i_k), \iota(i_l))} - t_{i_l}/t_{i_k}}{1 - q^{(\iota(i_k), \iota(i_l))} t_{i_l}/t_{i_k}} \widetilde{W}(t_1 \dots t_n). \quad (3.7)$$

Данное предложение является непосредственным следствием предложения 5.1 и влечет тот факт, что универсальная весовая функция для $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ полностью определяется выражениями

$$W(t_1, \dots, t_a, s_1, \dots, s_b) = P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b)). \quad (3.8)$$

В настоящей работе мы предлагаем явную формулу для функции (3.8), выраженную через токовые генераторы в алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$.

Для набора переменных $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_k\}$ и $\bar{s} = \{s_1, \dots, s_k\}$ определим следующие ряды:

$$Y(\bar{t}; \bar{s}) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - s_i/t_i} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{q - q^{-1}s_j/t_i}{1 - s_j/t_i} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - s_i/t_i} \prod_{j=i+1}^k \frac{q - q^{-1}s_i/t_j}{1 - s_i/t_j}, \quad (3.9)$$

$$Z(\bar{t}; \bar{s}) = Y(\bar{t}; \bar{s}) \prod_{i=1}^k \frac{s_i}{t_i}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Универсальная весовая функция (3.8) может быть записана в следующем виде:*

$$\begin{aligned} W(t_1, \dots, t_a, s_1, \dots, s_b) &= P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b)) = \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{a, b\}} \frac{1}{k!(a-k)!(b-k)!} \times \\ &\quad \times \overline{\text{Sym}}_t^a \overline{\text{Sym}}_s^b (P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_{a-k}) f_{\alpha+\beta}(t_{a-k+1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_a)) \times \\ &\quad \times P(f_\beta(s_{k+1}) \dots f_\beta(s_b)) Y(q^{-1}t_{a-k+1}, \dots, q^{-1}t_a; s_1, \dots, s_k)). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Данная теорема сводит вычисление весовой функции к вычислению проекций от струн.

3.3. Проекция струн. Опишем вначале проекции самих токов. Для любого формального ряда $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n}$ обозначим через $a^\pm(z)$ следующие токи ($a(z) = a^+(z) - a^-(z)$):

$$\begin{aligned} a^+(z) &= \oint \frac{a(w)}{1 - \frac{w}{z}} \frac{dw}{z} = \sum_{n \geq 0} a_n z^{-n}, \\ a^-(z) &= - \oint \frac{a(w)}{1 - \frac{z}{w}} \frac{dw}{w} = - \sum_{n \leq 0} a_n z^{-n}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Проекции токов $f_\alpha(z)$, $f_\beta(z)$, $f_{\alpha+\beta}(z)$ могут быть записаны в виде*

$$\begin{aligned} P(f_\alpha(t)) &= f_\alpha^+(t), & P(f_\beta(t)) &= f_\beta^+(t), \\ P(f_{\alpha+\beta}(t)) &= S_\beta(f_\alpha^+(t)) = f_\alpha^+(t)f_\beta[0] - qf_\beta[0]f_\alpha^+(t). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Имеются также аналогичные формулы для противоположной проекции:

$$\begin{aligned} P^-(f_\alpha(t)) &= -f_\alpha^-(t), & P^-(f_\beta(t)) &= -f_\beta^-(t), \\ P^-(f_{\alpha+\beta}(t)) &= q^{-1}S_\alpha(f_\beta^-(q^{-1}t)) = q^{-1}f_\beta^-(q^{-1}t)f_\alpha[0] - f_\alpha[0]f_\beta^-(q^{-1}t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Определим рациональные функции переменной s , зависящие от параметров $s_1, \dots, s_b$:

$$\varphi_{s_j}(s; s_1, \dots, s_b) = \prod_{i=1, i \neq j}^b \frac{s - s_i}{s_j - s_i} \prod_{i=1}^b \frac{q^{-1}s_j - qs_i}{q^{-1}s - qs_i}. \quad (3.14)$$

Как функции переменной s , они имеют простые полюсы в точках $s = q^2s_i$, $i = 1, \dots, b$, стремятся к нулю при $s \rightarrow \infty$ и удовлетворяют условию $\varphi_{s_j}(s_i; s_1, \dots, s_b) = \delta_{ij}$. Этими свойствами набор (3.14) определяется однозначно.

Определим следующие комбинации токов:

$$f_\gamma(t; t_1, \dots, t_b) = f_\gamma(t) - \sum_{m=1}^b \varphi_{t_m}(t; t_1, \dots, t_b) f_\gamma(t_m), \quad (3.15)$$

где γ совпадает с корнем α или β или составным корнем $\alpha + \beta$.

ТЕОРЕМА 2. *Проекция струны (2.22) имеет следующее факторизованное представление:*

$$\begin{aligned} P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_{a-k}) f_{\alpha+\beta}(t_{a-k+1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_a)) &= \\ &= \prod_{1 \leq i \leq a-k < j \leq a} \frac{qt_i - q^{-1}t_j}{t_i - t_j} \prod_{1 \leq i < j \leq a} \frac{q^{-1}t_i - qt_j}{qt_i - q^{-1}t_j} \times \\ &\quad \times P(f_{\alpha+\beta}(t_a)) P(f_{\alpha+\beta}(t_{a-1}; t_a)) \dots P(f_{\alpha+\beta}(t_{a-k+1}; t_{a-k+2}, \dots, t_a)) \times \\ &\quad \times P(f_\alpha(t_{a-k}; t_{a-k+1}, \dots, t_a)) \dots P(f_\alpha(t_1; t_2, \dots, t_a)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

3.4. Примеры. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теоремы 1 и 2. Второй, третий и четвертый примеры написаны с учетом следствия из теоремы 3. Итак,

$$\begin{aligned}
P(f_\alpha(t_1)f_{\alpha+\beta}(t_2)) &= \frac{q^{-1}t_1 - qt_2}{t_1 - t_2} P(f_{\alpha+\beta}(t_2)) \left(f_\alpha^+(t_1) - \frac{(q - q^{-1})t_2}{qt_2 - q^{-1}t_1} f_\alpha^+(t_2) \right), \\
P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)) &= f_\alpha^+(t_1) \left(f_\alpha^+(t_2) - \frac{(q - q^{-1})t_1}{qt_1 - q^{-1}t_2} f_\alpha^+(t_1) \right), \\
P(f_{\alpha+\beta}(t_1)f_{\alpha+\beta}(t_2)) &= P(f_{\alpha+\beta}(t_1)) \left(P(f_{\alpha+\beta}(t_2)) - \frac{(q - q^{-1})t_1}{qt_1 - q^{-1}t_2} P(f_{\alpha+\beta}(t_1)) \right), \\
P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)f_\alpha(t_3)) &= f_\alpha^+(t_1) \left(f_\alpha^+(t_2) - \frac{(q - q^{-1})t_1}{qt_1 - q^{-1}t_2} f_\alpha^+(t_1) \right) \times \\
&\quad \times \left(f_\alpha^+(t_3) - \frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_3} \frac{(qt_1 - q^{-1}t_3)(q - q^{-1})t_3}{(qt_1 - q^{-1}t_3)(qt_2 - q^{-1}t_3)} f_\alpha^+(t_2) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{t_2 - t_3}{t_2 - t_1} \frac{(qt_3 - q^{-1}t_1)(q - q^{-1})t_1}{(qt_1 - q^{-1}t_3)(qt_2 - q^{-1}t_3)} f_\alpha^+(t_1) \right),
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)f_\beta(s_1)f_\beta(s_2)) &= P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)) P(f_\beta(s_1)f_\beta(s_2)) + \\
&+ \overline{\text{Sym}}_{s_1, s_2} \left(\overline{\text{Sym}}_{t_1, t_2} \left(P(f_\alpha(t_1)f_{\alpha+\beta}(t_2)) \frac{t_2}{t_2 - qs_1} \right) f_\beta^+(s_2) \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \overline{\text{Sym}}_{t_1, t_2} \left(P(f_{\alpha+\beta}(t_1)f_{\alpha+\beta}(t_2)) \overline{\text{Sym}}_{s_1, s_2} \left(\frac{t_1}{t_1 - qs_1} \frac{t_2}{t_2 - qs_2} \frac{qt_2 - s_1}{t_2 - qs_1} \right) \right). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Заметим, что в утверждении теоремы 2, также как и в рассмотренных выше примерах, порядок корней в выражениях для проекций струн изменен с нормального $\alpha, \alpha + \beta, \beta$ на $\alpha + \beta, \alpha, \beta$. Нормальный порядок $\alpha, \alpha + \beta, \beta$ может быть восстановлен при помощи коммутационных соотношений, доказанных в предложении Б.3. Результат вычислений состоит в том, что вторая строка в равенстве (3.17) заменяется на выражение

$$\overline{\text{Sym}}_{s_1, s_2} \left(\overline{\text{Sym}}_{t_1, t_2} \left(f_\alpha^+(t_1) P(f_{\alpha+\beta}(t_2; t_1)) \frac{q^{-1}t_1 - qt_2}{t_1 - t_2} \frac{qt_1 - s_1}{t_1 - qs_1} \frac{t_2}{t_2 - qs_1} \right) f_\beta^+(s_2) \right).$$

3.5. Универсальная весовая функция для $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. Токи $e_\alpha(z), f_\alpha(z), \psi_\alpha^\pm(z)$ и образующие Шевалье $e_{\pm\alpha_i}, k_{\alpha_i}^\pm, i = 0, 1$, образуют подалгебру Хопфа $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ в $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. Для этой алгебры универсальная весовая функция и проекционные операторы могут быть определены независимым образом. Можно видеть, что соответствующая проекция от произведения $f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n)$ совпадает с проекцией, вычисленной в алгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$. На основании теоремы 2 мы получим весовую функцию для $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$, которая обладает простым интегральным представлением.

ТЕОРЕМА 3. (I) *Универсальная весовая функция (3.8) может быть записана в следующем виде:*

$$\begin{aligned} W(t_1, \dots, t_a) &= P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a)) = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq a} \frac{q^{-1}t_i - qt_j}{qt_i - q^{-1}t_j} f_\alpha^+(t_a) f_\alpha^+(t_{a-1}; t_a) \dots f_\alpha^+(t_1; t_2, \dots, t_a). \end{aligned} \quad (3.18)$$

(II) *Весовая функция (3.18) обладает интегральным представлением*

$$P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a)) = \prod_{i < j} \frac{t_i - t_j}{qt_i - q^{-1}t_j} \oint \dots \oint Z(\bar{t}; \bar{w}) f_\alpha(w_a) \frac{dw_a}{w_a} \dots f_\alpha(w_1) \frac{dw_1}{w_1}. \quad (3.19)$$

Токи $f_\alpha^+(t_\ell; t_{\ell+1}, \dots, t_a)$ заданы соотношением (3.15); ядро $Z(\bar{t}; \bar{w})$ – соотношениями (3.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (I) является частным случаем теоремы 2. Утверждение (II) получается из (I) подстановкой в него выражений (3.11) с помощью элементарного тождества

$$\frac{1}{t-w} - \sum_{m=1}^b \varphi_{t_m}(t; t_1, \dots, t_b) \frac{1}{t_m-w} = \frac{1}{t-w} \prod_{i=1}^b \frac{t-t_i}{w-t_i} \frac{q^{-1}w-qt_i}{q^{-1}t-qt_i}.$$

Заметим, что поскольку произведение перед интегралом в (3.19) обладает теми же свойствами q -симметрии, что и произведение токов $f_\alpha(t_1) f_\alpha(t_2) \dots f_\alpha(t_a)$, интеграл симметричен относительно перестановок параметров $t_1, \dots, t_a$. Это означает, что в (3.19) вместо ядра $Z(t_1, \dots, t_a; w_1, \dots, w_a)$ можно использовать также ядро $Z(t_{\sigma(1)}, \dots, t_{\sigma(a)}; w_1, \dots, w_a)$ для любой перестановки $\sigma \in S_a$.

СЛЕДСТВИЕ. *Проекция произведения токов может быть записана в “прямом” порядке:*

$$\begin{aligned} P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a)) &= \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq a} \frac{t_i - t_j}{qt_i - q^{-1}t_j} \oint \dots \oint Z(\bar{t}; \bar{w}) f_\alpha(w_1) \frac{dw_1}{w_1} \dots f_\alpha(w_a) \frac{dw_a}{w_a} = \\ &= f_\alpha^+(t_1) f_\alpha^+(t_2; t_1) \dots f_\alpha^+(t_{a-1}; t_1, \dots, t_{a-2}) f_\alpha^+(t_a; t_1, \dots, t_{a-1}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Для доказательства достаточно либо переименовать в интеграле (3.19) параметры $t_i \rightarrow t_{a+1-i}$, $i = 1, \dots, a$, и взять интеграл, либо переименовать переменные в (3.18) и аналитически продолжить результат в исходную область.

3.6. Комбинаторное тождество для ядер $Y(\bar{t}; \bar{s})$ и $Z(\bar{t}; \bar{s})$. Противоположная токовая борелевская подалгебра U_E (см. п. 2.3) также раскладывается в произведение своих пересечений с борелевскими подалгебрами:

$$U_e^+ = U_E \cap U_q(\mathfrak{b}_+) = U_E \cap U_q(\mathfrak{n}_+), \quad U_E^- = U_E \cap U_q(\mathfrak{b}_-),$$

так что соотношения

$$\tilde{P}^+(e_1 e_2) = e_1 \varepsilon(e_2), \quad \tilde{P}(e_1 e_2) = \tilde{P}^-(e_1 e_2) = \varepsilon(e_1) e_2, \quad (3.21)$$

где $e_1 \in U_e^+$, $e_2 \in U_E^-$, определяют проекционные операторы $\tilde{P}^\pm$, отображающие U_E на подалгебры U_E^- и U_e^+ и обладающие свойствами, аналогичными свойствам проекторов $P^\pm$.

В частности, проекция $\tilde{P}(e_\alpha(s_1) \dots e_\alpha(s_a))$ обладает интегральным представлением с факторизованным ядром $Z(\bar{w}; \bar{s})$, см. (3.9):

$$\tilde{P}(e_\alpha(s_1) \dots e_\alpha(s_a)) = \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{q^{-1}s_i - qs_j} \oint \dots \oint Z(\bar{w}; \bar{s}) e_\alpha(w_1) \frac{dw_1}{w_1} \dots e_\alpha(w_a) \frac{dw_a}{w_a}. \quad (3.22)$$

Обозначим символом $\widetilde{\text{Sym}}_s^n g(s_1, \dots, s_n)$ q^{-1} -симметризацию функции $g(s_1, \dots, s_n)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{Sym}}_s^n g(s_1, \dots, s_n) &= \sum_{\nu \in S_n} \prod_{\substack{\ell < \ell' \\ \nu^{-1}(\ell) > \nu^{-1}(\ell')}} \frac{qs_\ell - q^{-1}s_{\ell'}}{q^{-1}s_\ell - qs_{\ell'}} g(s_{\nu(1)}, \dots, s_{\nu(n)}) = \\ &= \prod_{i < j} \frac{qs_i - q^{-1}s_j}{q^{-1}s_i - qs_j} \widetilde{\text{Sym}}_s^n g(s_n, \dots, s_1). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Токовые борелевские подалгебры U_E и U_F являются дуальными алгебрами Хопфа относительно структуры Хопфа $\Delta^{(D)}$. Пусть $\langle, \rangle: U_E \otimes U_F \rightarrow \mathbb{C}$ – соответствующее хопфово спаривание. Оно удовлетворяет свойствам $\langle ab, x \rangle = \langle b \otimes a, \Delta^{(D)}(x) \rangle$, $\langle a, xy \rangle = \langle \Delta^{(D)}(a), x \otimes y \rangle$ и для алгебры $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ выглядит следующим образом:

$$\langle e_\alpha(s_1) \dots e_\alpha(s_n), f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n) \rangle = (q^{-1} - q)^{-n} \overline{\text{Sym}}_t^n \left(\prod_{k=1}^n \delta \left(\frac{s_k}{t_k} \right) \right). \quad (3.24)$$

Отметим, что по очевидным причинам правая часть равенства (3.24) может быть записана как q^{-1} -симметризация по переменным $s_1, \dots, s_n$ в области $|s_1| \ll |s_2| \ll \dots \ll |s_n|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Операторы $P^\pm$ и $\tilde{P}^\mp$ сопряжены относительно хопфова спаривания $\langle, \rangle$:*

$$\langle e, P^+(f) \rangle = \langle \tilde{P}^-(e), f \rangle, \quad \langle e, P^-(f) \rangle = \langle \tilde{P}^+(e), f \rangle$$

для любых $f \in U_F$ и $e \in U_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{\mathcal{R}} \in U_E \otimes U_F$ – тензор хопфова спаривания (3.24). В обозначениях работы [8] $\tilde{\mathcal{R}}$ совпадает с $(\mathcal{R}^{21})^{-1}$. В этой работе в п. 4.2 было установлено соответствие между двумя парами (U_f^-, U_F^+) , (U_e^+, U_E^-) подалгебр в токовых борелевских алгебрах и было показано, что эти пары образуют биортогональное разложение квантовой аффинной алгебры (см. определения этого разложения в [8], раздел 4.1). Из этого следует, что тензор $\tilde{\mathcal{R}} \in U_E \otimes U_F$ хопфова спаривания обладает разложением $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$, где

$$\mathcal{R}_1 = (1 \otimes P^-) \tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{P}^+ \otimes 1) \tilde{\mathcal{R}}, \quad \mathcal{R}_2 = (1 \otimes P^+) \tilde{\mathcal{R}} = (\tilde{P}^- \otimes 1) \tilde{\mathcal{R}},$$

таким, что для произвольных $e \in U_E$, $f \in U_F$ выполняются следующие соотношения:

$$\langle e, P^+(f) \rangle = \langle \tilde{P}^-(e), f \rangle = \langle \mathcal{R}_2, f \otimes e \rangle, \quad \langle e, P^-(f) \rangle = \langle \tilde{P}^+(e), f \rangle = \langle \mathcal{R}_1, f \otimes e \rangle. \quad (3.25)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. (I) Для любых наборов переменных $\bar{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ и $\bar{s} = \{s_1, \dots, s_n\}$ имеют место равенства

$$\langle e_\alpha(s_1) \dots e_\alpha(s_n), P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n)) \rangle = (q^{-1} - q)^{-n} \prod_{i < j} \frac{t_i - t_j}{qt_i - q^{-1}t_j} \widetilde{\text{Sym}}_s^n Z(\bar{t}; \hat{\omega} \bar{s}), \quad (3.26)$$

$$\langle \tilde{P}(e_\alpha(s_1) \dots e_\alpha(s_n)), f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n) \rangle = (q^{-1} - q)^{-n} \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{q^{-1}s_i - qs_j} \overline{\text{Sym}}_t^n Z(\bar{t}; \bar{s}). \quad (3.27)$$

(II) Для любых двух перестановок $\sigma, \sigma' \in S_n$ имеют место следующие тождества в кольце функций, симметричных по обеим группам переменных $\bar{t}$ и $\bar{s}$:

$$\prod_{i < j} \frac{qt_i - q^{-1}t_j}{t_i - t_j} \overline{\text{Sym}}_t^n Z(\bar{t}; \sigma \bar{s}) = \prod_{i < j} \frac{qs_i - q^{-1}s_j}{s_i - s_j} \overline{\text{Sym}}_s^n Z(\sigma' \bar{t}; \bar{s}), \quad (3.28)$$

$$\prod_{i < j} \frac{qt_i - q^{-1}t_j}{t_i - t_j} \widetilde{\text{Sym}}_t^n Y(\bar{t}; \sigma \bar{s}) = \prod_{i < j} \frac{qs_i - q^{-1}s_j}{s_i - s_j} \widetilde{\text{Sym}}_s^n Y(\sigma' \bar{t}; \bar{s}). \quad (3.29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения пункта (I) получаются подстановкой интегральных формул (3.19) и (3.22) в соответствующие хопфовы спаривания. Из (I) после замены q^{-1} -симметризации на q -симметризацию согласно (3.23) следует утверждение (II) при $\sigma = \sigma' = 1$ (напомним, что функции $Z(\bar{t}; \bar{s})$ и $Y(\bar{t}; \bar{s})$ отличаются на множитель, симметричный по обеим группам переменных, см. (3.9)). Далее, обе части равенства (3.26) q -симметричны по переменным t . Поскольку множитель $\prod_{i < j} \frac{t_i - t_j}{qt_i - q^{-1}t_j}$ также q -симметричен, оставшийся фактор $\widetilde{\text{Sym}}_s^n Z(\bar{t}; \hat{\omega} \bar{s})$ симметричен по переменным t и для любого $\sigma \in S_n$ имеем

$$\overline{\text{Sym}}_s^n Z(\bar{t}; \bar{s}) = \overline{\text{Sym}}_s^n Z(\sigma \bar{t}; \bar{s}), \quad \overline{\text{Sym}}_t^n Z(\bar{t}; \bar{s}) = \overline{\text{Sym}}_t^n Z(\bar{t}; \sigma \bar{s}), \quad (3.30)$$

откуда следует утверждение (II).

У тождества (3.31) имеется несколько доказательств, которые можно получить прямым вычислением. Наше доказательство основано на интерпретации обеих сторон этого равенства как специальных матричных элементов универсальной весовой функции для алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$.

Мы будем использовать тождество (3.29) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} \frac{qt_i - q^{-1}t_j}{t_i - t_j} \overline{\text{Sym}}_t^n Y(t_1, \dots, t_n; s_n, \dots, s_1) = \\ = \prod_{i < j} \frac{qs_i - q^{-1}s_j}{s_i - s_j} \overline{\text{Sym}}_s^n Y(t_1, \dots, t_n; s_1, \dots, s_n). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Обозначим левую или правую стороны тождества (3.31), деленную на произведение $\prod_{i=1}^n t_i$, как $\mathcal{Z}(\bar{t}, \bar{s})$. Как следует из вышесказанного, эта функция симметрична по обеим группам переменных $\bar{t}$ и $\bar{s}$ и имеет следующий физический смысл. Она совпадает со статистической суммой полностью неоднородной шестивершинной модели на квадратной решетке с открытыми граничными условиями и, как указал нам Н. Славнов, обладает детерминантным представлением

$$\mathcal{Z}(\bar{t}, \bar{s}) = \frac{\prod_{i,j=1}^n (qt_i - q^{-1}s_j)}{\prod_{i < j} (t_i - t_j)(s_j - s_i)} \det \left| \frac{1}{(t_i - s_j)(qt_i - q^{-1}s_j)} \right|_{i,j=1, \dots, n}. \quad (3.32)$$

4. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СТРУН

4.1. Свойства тока $f_{\alpha+\beta}(z)$. Ток $f_{\alpha+\beta}(z)$ был определен в п. 2.5 соотношением (2.20). Заметим, что благодаря соотношению (2.6) этот ток, помимо представления (2.20), допускает аналитическое представление

$$f_{\alpha+\beta}(z) = \text{res}_{w=z} f_{\alpha}(w) f_{\beta}(q^{-1}z) \frac{dw}{w} = (q - q^{-1}) f_{\beta}(q^{-1}z) f_{\alpha}(z). \quad (4.1)$$

Можно также получить ток $f_{\alpha+\beta}(z)$ как результат присоединенного действия, определяемого коумножением $\Delta^{(D)}$. Определим левое и правое присоединенные действия относительно коумножения $\Delta^{(D)}$:

$$\text{ad}_x^{(D)}(y) = \sum_j a^{(D)}(x'_j) \cdot y \cdot x''_j, \quad \widetilde{\text{ad}}_x^{(D)}(y) = \sum_j x''_j \cdot y \cdot (a^{(D)})^{-1}(x'_j), \quad (4.2)$$

если $\Delta^{(D)}(x) = \sum_j x'_j \otimes x''_j$. Назовем их *токовыми присоединенными действиями*. Имеем

$$\begin{aligned} \text{ad}_{f_i(z)}^{(D)}(y) &= y f_i(z) - f_i(z) (\psi_i^+(z))^{-1} y \psi_i^+(z), \\ \widetilde{\text{ad}}_{f_i(z)}^{(D)}(y) &= f_i(z) y - \psi_i^+(z) y \psi_i^+(z)^{-1} f_i(z). \end{aligned} \quad (4.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеют место следующие равенства:*

$$\mathrm{ad}_{f_\beta(w)}^{(D)}(f_\alpha(z)) = \delta\left(\frac{zq^{-1}}{w}\right)f_{\alpha+\beta}(z), \quad \widetilde{\mathrm{ad}}_{f_\alpha(w)}^{(D)}(f_\beta(z)) = \delta\left(\frac{qz}{w}\right)f_{\alpha+\beta}(qz), \quad (4.4)$$

тем самым

$$f_{\alpha+\beta}(z) = \oint \frac{dw}{w} \mathrm{ad}_{f_\beta(w)}^{(D)}(f_\alpha(z)) = \oint \frac{dw}{w} \widetilde{\mathrm{ad}}_{f_\alpha(w)}^{(D)}(f_\beta(q^{-1}z)). \quad (4.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2 [5]. *В алгебре $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} f_\alpha(z)f_{\alpha+\beta}(w) &= \frac{q^{-1}z - qw}{z - w}f_{\alpha+\beta}(w)f_\alpha(z), \\ f_{\alpha+\beta}(qz)f_\beta(w) &= \frac{q^{-1}z - qw}{z - w}f_\beta(w)f_{\alpha+\beta}(qz), \\ \frac{qz - q^{-1}w}{z - w}f_{\alpha+\beta}(z)f_{\alpha+\beta}(w) &= \frac{zq^{-1} - qw}{z - w}f_{\alpha+\beta}(w)f_{\alpha+\beta}(z). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Заметим, что обе стороны каждого из соотношений в (4.6) являются аналитическими функциями в $(\mathbb{C}^*)^2$. Это означает, что, к примеру, произведение $f_\alpha(z)f_{\alpha+\beta}(w)$ не имеет ни нулей, ни полюсов, тогда как произведение $f_{\alpha+\beta}(w)f_\alpha(z)$ имеет простой нуль при $z = w$ и простой полюс при $z = q^2w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этого предложения требует совместного рассмотрения соотношений (2.6) и соотношений Серра, записанных в аналитическом виде [9]. А именно, в алгебре $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$

- 1) произведения $f_\alpha(z)f_\alpha(w)$ и $f_\beta(z)f_\beta(w)$ имеют простые нули при $z = w$;
- 2) произведения $(z_1 - qz_2)(z_2 - qz_3)(z_1 - q^{-2}z_3)f_\alpha(z_1)f_\beta(z_2)f_\alpha(z_3)$ и $(z_1 - qz_2)(z_2 - qz_3)(z_1 - q^{-2}z_3)f_\beta(z_1)f_\alpha(z_2)f_\beta(z_3)$ равны нулю на прямых $z_2 = qz_1 = q^{-1}z_3$ и $z_2 = q^{-1}z_1 = qz_3$.

Свойства произведений токов, сформулированные в предложении 4.2, имеют прямое обобщение для струн.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. (I) *Струны (2.22) имеют простые полюсы только на гиперплоскостях $u_i = q^{-2}u_j$ и простые нули только на гиперплоскостях $u_i = u_j$, где либо $1 \leq i < j \leq a$, либо $a+1 \leq i < j \leq a+b$.*

(II) *Обратные струны (2.23) имеют простые полюсы только на гиперплоскостях $u_i = q^2u_j$ и простые нули только на гиперплоскостях $u_i = u_j$ для всех пар $i < j$.*

(III) *Прямые и обратные струны связаны. В частности,*

$$\begin{aligned} f_\alpha(t_{k+1}) \cdots f_\alpha(t_n) f_{\alpha+\beta}(t_1) \cdots f_{\alpha+\beta}(t_k) = \\ = \prod_{i,j: 1 \leq i \leq k < j \leq n} \frac{q^{-1}t_i - qt_j}{t_i - t_j} f_{\alpha+\beta}(t_1) \cdots f_{\alpha+\beta}(t_k) f_\alpha(t_{k+1}) \cdots f_\alpha(t_n). \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2. Экранирующие операторы и проекции тока $f_{\alpha+\beta}(z)$. Обозначим через $\tilde{S}_i$ экранирующий оператор $\tilde{S}_i = \widetilde{\text{ad}}_{f_i[0]}$ относительно присоединенного действия $\widetilde{\text{ad}}$ в $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$, где $\widetilde{\text{ad}}_x(y) = \sum_i x_i'' \cdot y \cdot a(x_i')$, с $\Delta(x) = \sum_i x_i' \otimes x_i''$, так что

$$\tilde{S}_i(y) = f_i[0]y - k_i^{-1}y k_i f_i[0]. \quad (4.8)$$

Имеются соотношения между экранирующими и проекционными операторами.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. (I) Для любых $y \in U_F$ и $i = \alpha, \beta$

$$P^+ \left(\oint \frac{dw}{w} \text{ad}_{f_i(w)}^{(D)}(y) \right) = S_i(P^+(y)), \quad P^- \left(\oint \frac{dw}{w} \widetilde{\text{ad}}_{f_i(w)}^{(D)}(y) \right) = \tilde{S}_i(P^-(y)). \quad (4.9)$$

(II) Экранирующие операторы S_i и $\tilde{S}_i$ связаны следующим образом:

$$\tilde{S}_i(y) = -q^{-2}k_i^{-1}S_i(y)k_i. \quad (4.10)$$

(III) Операторы S_i и $\tilde{S}_i$ коммутируют с проекциями $P^\pm$: для любого $y \in U_F$

$$P^\pm S_i(y) = S_i P^\pm(y), \quad P^\pm \tilde{S}_i(y) = \tilde{S}_i P^\pm(y). \quad (4.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (I) и (II) очевидны. Пусть $y = y_1 y_2$, где $y_1 \in U_f^-$, $y_2 \in U_F^+$. Докажем равенство $PS_{f_i[0]}(y) = S_{f_i[0]}P(y)$. Присоединенное действие удовлетворяет условию $\text{ad}_x(y_1 \cdot y_2) = \sum_i \text{ad}_{x_i'}(y_1) \cdot \text{ad}_{x_i''}(y_2)$, если $\Delta(x) = \sum_i x_i' \otimes x_i''$. Это приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} S_i(y) &= S_i(y_1)k_i y_2 k_i^{-1} + y_1 S_i(y_2), \\ PS_i(y) &= \varepsilon(S_i(y_1))k_i y_2 k_i^{-1} + \varepsilon(y_1)S_i(y_2) = S_i P(y), \end{aligned} \quad (4.12)$$

так как экранирующий оператор S_i сохраняет подалгебры U_F^+ , U_f^- и $\varepsilon(S_i(y)) = 0$ для любых $y \in \overline{U}_f$ за исключением $y = 1$.

Свойства экранирующих операторов и присоединенного действия позволяют определить проекцию тока $f_{\alpha+\beta}(z)$ и вычислить для него соответствующее нормально упорядоченное разложение (2.18).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. (I) Проекция тока $f_{\alpha+\beta}(z)$ равна

$$P^+(f_{\alpha+\beta}(z)) = S_\beta(f_\alpha^+(z)), \quad P^-(f_{\alpha+\beta}(z)) = -\tilde{S}_\alpha(f_\beta^-(q^{-1}z)). \quad (4.13)$$

(II) Имеет место следующее нормально упорядоченное разложение:

$$f_{\alpha+\beta}(z) - P(f_{\alpha+\beta}(z)) = (q^{-1} - q) \left(f_\beta^-(q^{-1}z) f_\alpha(z) \right)^+ - f_{\alpha+\beta}^-(z). \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (I) следует из предложения 4.4 и формулы (4.5). Далее, формальный интеграл (2.19) можно записать как

$$\begin{aligned} f_{\alpha+\beta}(w) &= f_{\alpha}(w)f_{\beta}[0] - q^{-1}f_{\beta}[0]f_{\alpha}(w) - (q^{-1} - q) \sum_{k>0} f_{\beta}[-k]f_{\alpha}(w) (q^{-1}w)^k = \\ &= f_{\alpha}(w)f_{\beta}[0] - qf_{\beta}[0]f_{\alpha}(w) - (q^{-1} - q) \sum_{k\geq 0} f_{\beta}[-k]f_{\alpha}(w) (q^{-1}w)^k = \\ &= S_{\beta}(f_{\alpha}(w)) + (q^{-1} - q)f_{\beta}^{-}(q^{-1}w)f_{\alpha}(w). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Применение оператора $\oint \frac{(\cdot)dw}{z(1-w/z)}$ к обеим сторонам равенства (4.15) доказывает утверждение II, см. формулу (3.11).

4.3. Доказательство теоремы 2. Вычислим сначала проекцию обратной струны $P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k)f_{\alpha}(t_{k+1}) \dots f_{\alpha}(t_a))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. (I) *Проекция струны $f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k)f_{\alpha}(t_{k+1}) \dots f_{\alpha}(t_a)$ при $a > k$ может быть записана следующим образом:*

$$\begin{aligned} P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k)f_{\alpha}(t_{k+1}) \dots f_{\alpha}(t_a)) &= \\ &= P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k)f_{\alpha}(t_{k+1}) \dots f_{\alpha}(t_{a-1}))f_{\alpha}^{+}(t_a) + \\ &+ \sum_{j=1}^{a-1} \frac{X_j(t_1, \dots, t_{a-1})}{t_a - q^2 t_j}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

(II) *Проекция струны $f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k)$ записывается в виде*

$$\begin{aligned} P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k)) &= \\ &= P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_{k-1}))P(f_{\alpha+\beta}(t_k)) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{X'_j(t_1, \dots, t_{k-1})}{t_k - q^2 t_j}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО соотношения (4.16) основывается на индуктивном использовании следующей леммы, которая показывает, что при движении тока $f_{\alpha}^{-}(t_a)$ в левую часть струны могут возникать только простые полюсы в точках $t_a = q^2 t_j$, и соответствующие операторнозначные коэффициенты X_j при $(t_a - q^2 t_j)^{-1}$ не зависят от t_a .

ЛЕММА 4.1. *Справедливы следующие соотношения:*

$$f_{\alpha}(z)f_{\alpha}^{-}(w) = \frac{q^{-1}z - qw}{qz - q^{-1}w}f_{\alpha}^{-}(w)f_{\alpha}(z) + \frac{z(q - q^{-1})}{qz - q^{-1}w}(1 + q^2)f_{\alpha}^{+}(q^2 z)f_{\alpha}(z), \quad (4.18)$$

$$f_{\alpha+\beta}(z)f_{\alpha}^{-}(w) = \frac{z - w}{qz - q^{-1}w}f_{\alpha}^{-}(w)f_{\alpha+\beta}(z) + \frac{(q - q^{-1})z}{qz - q^{-1}w}f_{\alpha+\beta}(z)f_{\alpha}^{-}(z). \quad (4.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные равенства можно получить, применяя интегральное преобразование $-\oint \frac{du}{u} \frac{(\cdot)}{1-w/u}$ к соотношениям

$$\begin{aligned} f_\alpha(z)f_\alpha(u) &= \frac{q^{-1}z - qu}{qz - q^{-1}u} f_\alpha(u)f_\alpha(z) + (q^{-2} - q^2)\delta(q^2z/u)f_\alpha(q^2z)f_\alpha(z), \quad (4.20) \\ f_\alpha(u)f_{\alpha+\beta}(z) &= \frac{q^{-1}u - qz}{u - z} f_{\alpha+\beta}(z)f_\alpha(u). \end{aligned}$$

Для вывода утверждения (II) воспользуемся соотношением (4.14) и подставим в левую часть (4.17) нормально упорядоченное разложение

$$f_{\alpha+\beta}(z_k) = P(f_{\alpha+\beta}(z_k)) + (q^{-1} - q) \left(f_\beta^-(q^{-1}z_k)f_\alpha(z_k) \right)^+ - f_{\alpha+\beta}^-(z_k).$$

Затем будем последовательно двигать токи $f_\beta^-(q^{-1}z_k)$ и $f_{\alpha+\beta}^-(z_k)$ налево, используя соотношения (Б.4) и учитывая, что $P(f_\beta^-(z_k) \cdot F) = P(f_{\alpha+\beta}^-(z_k) \cdot F) = 0$ для любых $F \in U_F$.

Воспользуемся теперь утверждением (II) из предложения 4.3. Оно говорит, что струна $f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k) f_\alpha(t_{k+1}) \dots f_\alpha(t_a)$ имеет простые полюсы на гиперплоскостях $t_a = t_i$, $i = 1, \dots, a-1$. Подстановка этих условий в соотношения (4.16) и (4.17) дает систему из $(a-1)$ линейных уравнений над полем рациональных функций $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_{a-1})$ для операторов $X_j(t_1, \dots, t_{a-1})$:

$$\sum_{j=1}^{a-1} \frac{X_j(t_1, \dots, t_{a-1})}{t_i - q^2 t_j} = X \cdot f_\alpha^+(t_i), \quad i = 1, \dots, a-1, \quad (4.21)$$

где $X = P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k) f_\alpha(t_{k+1}) \dots f_\alpha(t_{a-1}))$. Матрица $B_{i,j} = (t_i - q^2 t_j)^{-1}$ этой системы имеет ненулевой в $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_{a-1})$ определитель,

$$\det(B) = (-q^2)^{a(a-1)/2} \frac{\prod_{i \neq j} (t_i - t_j)^2}{\prod_{i,j} (t_i - q^2 t_j)},$$

поэтому данная система имеет единственное решение в $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_{a-1})$. Это доказывает, что операторы X_j являются линейными комбинациями над $\mathbb{C}(t_1, \dots, t_{a-1})$ операторов $X \cdot f_\alpha^+(t_j)$, $j = 1, \dots, a-1$, поэтому проекция струны может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k) f_\alpha(t_{k+1}) \dots f_\alpha(t_a)) &= \\ &= X \cdot f_\alpha^+(t_a) - \sum_{j=1}^{a-1} \varphi_{t_j}(t_a; t_1, \dots, t_{a-1}) X \cdot f_\alpha^+(t_j), \end{aligned} \quad (4.22)$$

где $\varphi_{t_j}(t_a; t_1, \dots, t_{a-1}) = A_j(t_a; t_1, \dots, t_{a-1}) / \prod_{m=1}^{a-1} (t_a - q^2 t_m)$ являются рациональными функциями, числители которых суть полиномы от t_a степени, меньшей чем $a-1$.

Соотношения (4.21) будут выполнены, если рациональные функции $\varphi_{t_j}(t_a; t_1, \dots, t_{a-1})$ удовлетворяют условиям

$$\varphi_{t_j}(t_i; t_1, \dots, t_{a-1}) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, \dots, a-1.$$

Эта интерполяционная задача имеет единственное решение (3.14).

Соотношения (4.22) можно интерпретировать как рекурсионные соотношения между проекциями струн разных длин. Соответствующее рекурсионное соотношение для струны $f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_k)$ выглядит аналогичным образом:

$$P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_a)) = X' \cdot P(f_{\alpha+\beta})(t_a) - \sum_{j=1}^{a-1} \varphi_{t_j}(t_a; t_1, \dots, t_{a-1}) X' \cdot P(f_{\alpha+\beta})(t_j),$$

где $X' = P(f_{\alpha+\beta}(t_1) \dots f_{\alpha+\beta}(t_{a-1}))$, а рациональные функции $\varphi_{t_j}(t_a; t_1, \dots, t_{a-1})$ также задаются формулами (3.14). Последовательное применение рекурсионных соотношений и формул (4.7) дает утверждение теоремы 2.

5. ТОКОВОЕ ПРИСОЕДИНЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ И СИММЕТРИЗАЦИЯ

5.1. Проекции и аналитическое продолжение. Напомним, что в пополненной алгебре $\overline{U}_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_3)$ произведение токов $f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(n)}(t_n)$ может быть рассмотрено как аналитическая в области $|t_1| \gg |t_2| \gg \dots \gg |t_n|$ функция, которая имеет аналитическое продолжение до мероморфной в $(\mathbb{C}^*)^n$ функции [8]. В силу коммутационных соотношений (2.6) для любой перестановки $\sigma \in S_n$ аналитическое продолжение этого произведения в область $|t_{\sigma(1)}| \gg |t_{\sigma(2)}| \gg \dots \gg |t_{\sigma(n)}|$ задается рядом

$$\prod_{\substack{k > l \\ \sigma(k) < \sigma(l)}} \frac{q^{(\iota(\sigma(k)), \iota(\sigma(l)))} - t_{\sigma(l)}/t_{\sigma(k)}}{1 - q^{(\iota(\sigma(k)), \iota(\sigma(l)))} t_{\sigma(l)}/t_{\sigma(k)}} f_{\iota(\sigma(1))}(t_{\sigma(1)}) \dots f_{\iota(\sigma(n))}(t_{\sigma(n)}). \quad (5.1)$$

Пусть ${}^\sigma P(f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(n)}(t_n))$ означает аналитическое продолжение проекции произведений токов $P(f_{\iota(\sigma(1))}(t_{\sigma(1)}) \dots f_{\iota(\sigma(n))}(t_{\sigma(n)}))$ в область $|t_1| \gg |t_2| \gg \dots \gg |t_n|$ из области $|t_{\sigma(1)}| \gg |t_{\sigma(2)}| \gg \dots \gg |t_{\sigma(n)}|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. (I) *Проекции $P^\pm$ коммутируют с аналитическим продолжением произведений токов.*

(II) *Имеется следующее тождество формальных рядов в $U\{t_1, \dots, t_n\}$, см. (3.2):*

$$\begin{aligned} {}^\sigma P^\pm(f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(n)}(t_n)) &= \\ &= \prod_{\substack{k < l \\ \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(l)}} \frac{q^{(\iota(k), \iota(l))} - t_l/t_k}{1 - q^{(\iota(k), \iota(l))} t_l/t_k} P^\pm(f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(n)}(t_n)). \end{aligned} \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (I) основано на том факте, что оператор проектирования сохраняет нормальное упорядочение в алгебре U_F (по отношению к действию в категории представлений старшего веса), иными словами, непрерывен в топологии, определяющей пополнение $\overline{U}_F$. Утверждение (II) следует из (I) и (5.1).

Доказанное предложение дает мощный инструмент для вычислений весовых функций. При его применении основным является тот факт, что, в отличие от произведений токов, их проекции имеют простые аналитические продолжения, определяемые аналитическими продолжениями рациональных функций.

ПРИМЕР. Рассмотрим проекцию $P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2))$. Имеем (см. раздел 3.4)

$$P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)) = f_\alpha^+(t_1)f_\alpha^+(t_2) - \frac{(q - q^{-1})t_1}{qt_1 - q^{-1}t_2} (f_\alpha^+(t_1))^2, \quad (5.3)$$

$$P(f_\alpha(t_2)f_\alpha(t_1)) = f_\alpha^+(t_2)f_\alpha^+(t_1) - \frac{(q - q^{-1})t_2}{qt_2 - q^{-1}t_1} (f_\alpha^+(t_2))^2. \quad (5.4)$$

Равенство (5.3) является равенством формальных рядов в области $|t_1| \gg |t_2|$, что означает разложение рациональной функции $t_1/(qt_1 - q^{-1}t_2)$ в степенной ряд по степеням t_2/t_1 , тогда как равенство (5.4) является равенством формальных рядов в области $|t_2| \gg |t_1|$, что означает, в свою очередь, разложение рациональной функции $t_2/(qt_2 - q^{-1}t_1)$ в ряд по степеням t_1/t_2 . Аналитическое продолжение из области $|t_1| \gg |t_2|$ правой части (5.4) состоит из аналитического продолжения рациональной функции $t_2/(qt_2 - q^{-1}t_1)$, которая должна быть теперь разложена по степеням t_2/t_1 . Поэтому равенство

$$^{(12)}P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)) = \frac{q^2 - t_2/t_1}{1 - q^2 t_2/t_1} P(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2))$$

означает равенство между формальными рядами в области $|t_2| \gg |t_1|$:

$$\begin{aligned} f_\alpha^+(t_2)f_\alpha^+(t_1) - \frac{(q - q^{-1})t_2}{qt_2 - q^{-1}t_1} (f_\alpha^+(t_2))^2 &= \\ &= \frac{qt_1 - q^{-1}t_2}{q^{-1}t_1 - qt_2} f_\alpha^+(t_1)f_\alpha^+(t_2) - \frac{(q - q^{-1})t_1}{q^{-1}t_1 - qt_2} (f_\alpha^+(t_1))^2. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Последнее соотношение является базисным в борелевской подалгебре $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. Оно справедливо также в области $|t_1| \gg |t_2|$ и может быть обобщено на случай большего произведения токов, см. следствие из теоремы 3.

В соответствии с нашим определением q -симметризации (см. п. 3.2, утверждения предложения 5.1 и правила аналитического продолжения произведения токов (5.1)) как проекции произведений токов, отвечающих одному и тому же корню, так и сами произведения являются q -симметричными:

$$\begin{aligned} f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n) &= \frac{1}{n!} \overline{\text{Sym}}_t^n f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n), \\ P^\pm(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n)) &= \frac{1}{n!} \overline{\text{Sym}}_t^n P^\pm(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_n)). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Используя эти утверждения, мы получим сейчас симметризованную версию канонического разложения (2.18) произведения токов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. В области $|t_1| \gg |t_2| \gg \dots \gg |s_b|$ имеет место равенство формальных рядов:

$$\begin{aligned}
 f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b) = \\
 = \sum_{\substack{0 \leq m \leq a \\ 0 \leq k \leq b}} \frac{1}{m!(a-m)!k!(b-k)!} \times \\
 \times \overline{\text{Sym}}_t^a \overline{\text{Sym}}_s^b \left(\prod_{\substack{m+1 \leq \ell \leq a \\ 1 \leq \ell' \leq k}} \frac{qt_\ell - s_{\ell'}}{t_\ell - qs_{\ell'}} P^- (f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_m) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_k)) \times \right. \\
 \left. \times P^+ (f_\alpha(t_{m+1}) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_{k+1}) \dots f_\beta(s_b)) \right). \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

В частности, для токов одного сорта получим

$$\begin{aligned}
 f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b) = \\
 = \sum_{0 \leq k \leq b} \frac{1}{k!(b-k)!} \overline{\text{Sym}}_s^b (P^- (f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_k)) \cdot P^+ (f_\beta(s_{k+1}) \dots f_\beta(s_b))). \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прямое применение разложения (2.18) произведений токов дает следующее соотношение для формальных рядов в области $|t_1| \gg \dots \gg |t_n|$:

$$\begin{aligned}
 f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(n)}(t_n) = \sum_{J \subset I} \prod_{\substack{\ell < \ell' \\ \ell \in J, \ell' \notin J}} \frac{t_\ell - q^{(\iota(\ell), \iota(\ell'))} t_{\ell'}}{q^{(\iota(\ell), \iota(\ell'))} t_\ell - t_{\ell'}} \times \\
 \times P^- \left(f_{\iota(j'_1)}(t_{j'_1}) \dots f_{\iota(j'_k)}(t_{j'_k}) \right) \cdot P^+ \left(f_{\iota(j''_1)}(t_{j''_1}) \dots f_{\iota(j''_l)}(t_{j''_l}) \right). \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Здесь $I = \{1, \dots, n\}$ является набором, $J = \{j'_1, \dots, j'_k\}$, где $j'_1 < \dots < j'_k$, является его поднабором, и $I \setminus J = \{j''_1, \dots, j''_l\}$, $j''_1 < \dots < j''_l$. Применение симметризацонной процедуры, основанной на предложении 5.1, доказывает справедливость формулы (5.7).

5.2. Токовое присоединенное действие. Соотношения Серра (2.10), (2.11) допускают различные представления. В п. 4.1 они были сформулированы как свойства сложных токов и струн. В этом разделе мы переформулируем соотношения Серра при помощи токового присоединенного действия (4.2).

ЛЕММА 5.1. Соотношения Серра (2.11) для $i = \beta$, $j = \alpha$, могут быть записаны следующим образом:

$$\text{ad}_{f_\beta(s_1)f_\beta(s_2)}^{(D)} (f_\alpha(t)) = 0. \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из цепочки равенств

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_{f_{\beta}(s_1)f_{\beta}(s_2)}^{(D)}(f_{\alpha}(t)) &= \operatorname{ad}_{f_{\beta}(s_2)}^{(D)}(\operatorname{ad}_{f_{\beta}(s_1)}^{(D)}(f_{\alpha}(t))) = \operatorname{ad}_{f_{\beta}(s_2)}^{(D)}(f_{\alpha+\beta}(t)) \delta\left(\frac{t}{qs_1}\right) = \\ &= \left(f_{\alpha+\beta}(t)f_{\beta}(s_2) - f_{\beta}(s_2)\psi_{\beta}^{+}(s_2)^{-1}f_{\alpha+\beta}(t)\psi_{\beta}^{+}(s_2)\right) \delta\left(\frac{t}{qs_1}\right) = \\ &= \left(f_{\alpha+\beta}(t)f_{\beta}(s_2) - f_{\beta}(s_2)f_{\alpha+\beta}(t)\frac{t-q^3s_2}{qt-q^2s_2}\right) \delta\left(\frac{t}{qs_1}\right) = 0. \end{aligned}$$

Данная лемма позволяет сформулировать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Для $a \geq k$ справедливо тождество формальных рядов в области $|t_1| \gg \dots \gg |t_a|$

$$\begin{aligned} P(\operatorname{ad}_{f_{\beta}(u_1)\dots f_{\beta}(u_k)}^{(D)}(f_{\alpha}(t_1)\dots f_{\alpha}(t_a))) &= \frac{1}{k!(a-k)!} \times \\ &\times \overline{\operatorname{Sym}}_t^a \left(P(f_{\alpha}(t_1)\dots f_{\alpha}(t_{a-k})f_{\alpha+\beta}(t_{a-k+1})\dots f_{\alpha+\beta}(t_a)) \times \right. \\ &\times \left. \prod_{i < j}^k \frac{q^{-1}\tilde{t}_i - q\tilde{t}_j}{\tilde{t}_i - \tilde{t}_j} \widetilde{\operatorname{Sym}}_{\tilde{t}}^k \left(\prod_{i=1}^k \delta\left(\frac{\tilde{t}_i}{qu_i}\right) \right) \right), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $\tilde{t}_i = t_{a-k+i}$, $i = 1, \dots, k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является чисто комбинаторным рассуждением, использующим определение токового присоединенного действия (4.2), его свойств, включая (5.10), и соотношения

$$\operatorname{ad}_{f_{\beta}(s)}^{(D)}(F_1 \cdot F_2) = F_1 \cdot \operatorname{ad}_{f_{\beta}(s)}^{(D)}(F_2) + \operatorname{ad}_{f_{\beta}(s)}^{(D)}(F_1) \cdot \psi_{\beta}^{+}(s)^{-1} F_2 \psi_{\beta}^{+}(s).$$

Отметим активное использование в этих рассуждениях предложения 5.1, которое позволяет применять под знаком проекции коммутационные соотношения, не обращая внимания на члены, содержащие δ -функции. Учитывая вышесказанное, после применения необходимой комбинаторики получим

$$\begin{aligned} P(\operatorname{ad}_{f_{\beta}(u_1)\dots f_{\beta}(u_k)}^{(D)}(f_{\alpha}(t_1)\dots f_{\alpha}(t_a))) &= \frac{1}{k!(a-k)!} \overline{\operatorname{Sym}}_t^a \overline{\operatorname{Sym}}_u^k \left(\prod_{i=1}^k \prod_{\ell=1}^{i-1} \frac{qt_{a-k+i} - u_{\ell}}{t_{a-k+i} - qu_{\ell}} \times \right. \\ &\times \left. P(f_{\alpha}(t_1)\dots f_{\alpha}(t_{a-k}) \operatorname{ad}_{f_{\beta}(u_1)}^{(D)}(f_{\alpha}(t_{a-k+1}))\dots \operatorname{ad}_{f_{\beta}(u_k)}^{(D)}(f_{\alpha}(t_a))) \right). \end{aligned}$$

Используя теперь тот факт, что присоединенные действия в последней формуле порождают произведение $\prod_i \delta(t_{a-k+i}/qu_i)$, $i = 1, \dots, k$ (см. (4.4)), можно вынести рациональную функцию, стоящую под знаком q -симметризации по переменным u_i , наружу этой симметризации и затем заменить ее на q^{-1} -симметризацию по $t_{a-k+i} = \tilde{t}_i$. Предложение 5.3 доказано.

5.3. Доказательство теоремы 1. Нашей целью является редукция выражения $P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b))$ к проекциям струн. Для этого мы подставим в это выражение разложение (5.8) для произведения токов $f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b)$:

$$P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b)) = \sum_{k=0}^b \frac{1}{k!(b-k)!} \times \\ \times \overline{\text{Sym}}_s^b (P^+(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) P^-(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_k))) \cdot P^+(f_\beta(s_{k+1}) \dots f_\beta(s_b))) . \quad (5.12)$$

Воспользуемся теперь следующим уточнением свойств коидеальности подалгебры U_f^- .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. (I) Для любого элемента $F \in U_f^-$

$$\Delta^{(D)} F = 1 \otimes F + F' \otimes F'', \quad \text{так что} \quad F' \in U_f^- \quad \text{и} \quad \varepsilon(F') = 0. \quad (5.13)$$

(II) Для любого произведения $f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(n)}(t_n)$ имеется равенство рядов в пространстве $U\{t_1, \dots, t_n\}$ (см. (3.2)):

$$P(f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(m)}(t_m) P^-(f_{\iota(m+1)}(t_{m+1}) \dots f_{\iota(n)}(t_n))) = \\ = P\left(\text{ad}_{P^-(f_{\iota(m+1)}(t_{m+1}) \dots f_{\iota(n)}(t_n))}^{(D)} f_{\iota(1)}(t_1) \dots f_{\iota(m)}(t_m)\right). \quad (5.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (I) достаточно проверить для образующих алгебры U_f^- , где оно тривиально. Утверждение (II) является прямым следствием (I).

Воспользуемся частным случаем соотношения (5.14):

$$P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) P^-(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_k))) = P(\text{ad}_{P^-(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_k))}^{(D)} f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a)) \quad (5.15)$$

и подставим в него интегральное представление проекции $P^-(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_k))$:

$$P^-(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_k)) = \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{q s_i - q^{-1} s_j} \oint \dots \oint Y(\widehat{\omega} \bar{u}; \widehat{\omega} \bar{s}) f_\beta(u_1) \frac{du_1}{u_1} \dots f_\beta(u_k) \frac{du_k}{u_k}. \quad (5.16)$$

Тогда правая часть равенства (5.15) примет вид

$$\prod_{i < j}^k \frac{s_i - s_j}{q s_i - q^{-1} s_j} \oint \dots \oint \prod_{i=1}^k \frac{du_i}{u_i} Y(\widehat{\omega} \bar{u}; \widehat{\omega} \bar{s}) P(\text{ad}_{f_\beta(u_1) \dots f_\beta(u_k)}^{(D)} (f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a))) = \\ = \frac{1}{k!(a-k)!} \overline{\text{Sym}}_t^a \left(P(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_{a-k}) f_{\alpha+\beta}(t_{a-k+1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_a)) \times \right. \\ \left. \times \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{q s_i - q^{-1} s_j} \frac{q^{-1} \tilde{t}_i - q \tilde{t}_j}{\tilde{t}_i - \tilde{t}_j} \widetilde{\text{Sym}}_{\tilde{t}}^k \left(\oint \dots \oint \prod_{i=1}^k \frac{du_i}{u_i} \delta\left(\frac{\tilde{t}_i}{qu_i}\right) Y(\widehat{\omega} \bar{u}; \widehat{\omega} \bar{s}) \right) \right), \quad (5.17)$$

где $\tilde{t}_i = t_{a-k+i}$, $i = 1, \dots, k$. После взятия интеграла последняя строка в (5.17) принимает вид

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{qs_i - q^{-1}s_j} \frac{q^{-1}\tilde{t}_i - q\tilde{t}_j}{\tilde{t}_i - \tilde{t}_j} \widetilde{\text{Sym}}_{\tilde{t}}^k \left(Y(q^{-1} \cdot (\tilde{\omega}_{\tilde{t}}); \tilde{\omega}_{\tilde{s}}) \right) = \\ = \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{qs_i - q^{-1}s_j} \frac{q\tilde{t}_i - q^{-1}\tilde{t}_j}{\tilde{t}_i - \tilde{t}_j} \times \\ \times \overline{\text{Sym}}_{\tilde{t}}^k \left(Y(q^{-1} \cdot \tilde{t}; \tilde{\omega}_{\tilde{s}}) \right) = \overline{\text{Sym}}_s^k \left(Y(q^{-1} \cdot \tilde{t}; \tilde{s}) \right). \end{aligned} \quad (5.18)$$

В первом равенстве (5.18) использована связь (3.23) между q - и q^{-1} -симметризациями, второе равенство получено применением комбинаторного тождества (3.31).

В результате для проекции (5.15) получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} P \left(\text{ad}_{P^-}^{(D)}(f_{\beta}(s_1) \dots f_{\beta}(s_k)) f_{\alpha}(t_1) \dots f_{\alpha}(t_a) \right) = \frac{1}{k!(a-k)!} \\ \times \overline{\text{Sym}}_t^a \overline{\text{Sym}}_s^k \left(Y(q^{-1}t_{a-k+1}, \dots, q^{-1}t_a; s_1, \dots, s_k) \right) \\ \times P(f_{\alpha}(t_1) \dots f_{\alpha}(t_{a-k}) f_{\alpha+\beta}(t_{a-k+1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_a)). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. По определению q -симметризации (3.6) правая часть последней формулы q -симметрична по переменным $s_1, \dots, s_k$. Поэтому дополнительная q -симметризация сократит нежелательные факториалы (см. (5.6)), и мы получим доказательство теоремы 1.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Проекция P^-

В этом приложении мы соберем наиболее важные формулы для противоположного проекционного оператора P^- .

1. Как проекция $P = P^+$, проекция $P^- (f_{\iota(i_1)}(t_{i_1}) \dots f_{\iota(i_n)}(t_{i_n}))$ может быть представлена рядом в области $|t_{i_1}| \gg \dots \gg |t_{i_n}|$, допускающим аналитическое продолжение в другие асимптотические области. В смысле аналитического продолжения оно обладает теми же свойствами симметрии, что и аналогичное выражение с проекцией P^+ .

Напомним формулу для проекции P^+ произведения токов, соответствующих одному корню:

$$P^+ (f_{\alpha}(t_1) \dots f_{\alpha}(t_a)) = f_{\alpha}^+(t_1) f_{\alpha}^+(t_2; t_1) \dots f_{\alpha}^+(t_{a-1}; t_1, \dots, t_{a-2}) f_{\alpha}^+(t_a; t_1, \dots, t_{a-1}).$$

Структура этой формулы была объяснена при доказательстве теоремы 2. Из аналогичных рассуждений (см. следующее приложение) следует, что для проекции P^- произведения токов с одинаковым корневым индексом также справедливо треугольное разложение:

$$\begin{aligned} P^- (f_{\beta}(s_1) \dots f_{\beta}(s_b)) = \\ = (-1)^b f_{\beta}^-(s_1; s_2, \dots, s_b) f_{\beta}^-(s_2; s_3, \dots, s_b) \dots f_{\beta}^-(s_{b-1}; s_b) f_{\beta}^-(s_b), \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где токи $f_\beta^-(s_k; s_{k+1}, \dots, s_b)$ определяются как суммы:

$$f_\beta^-(s_k; s_{k+1}, \dots, s_b) = f_\beta^-(s_k) - \sum_{m=k+1}^b \tilde{\varphi}_{s_m}(s_k; s_{k+1}, \dots, s_b) f_\beta^-(s_m), \quad (\text{A.2})$$

а рациональная функция $\tilde{\varphi}_{s_j}(s; s_1, \dots, s_b)$, равная

$$\tilde{\varphi}_{s_j}(s; s_1, \dots, s_b) = \prod_{i=1, i \neq j}^b \frac{s - s_i}{s_j - s_i} \prod_{i=1}^b \frac{qs_j - q^{-1}s_i}{qs - q^{-1}s_i}, \quad (\text{A.3})$$

имеет как функция переменной s простые полюсы в точках $s = q^{-2}s_i$, $i = 1, \dots, b$, стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$ и удовлетворяет условию $\tilde{\varphi}_{s_j}(s_i; s_1, \dots, s_b) = \delta_{ij}$. Эти условия определяют множество функций (A.3) однозначно.

Так же как и для проекции P^+ , проекция произведения токов (A.1) может быть записана в обратном порядке:

$$\begin{aligned} P^-(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b)) &= \\ &= (-1)^b \prod_{1 \leq i < j \leq b} \frac{q^{-1}s_i - qs_j}{qs_i - q^{-1}s_j} f_\beta^-(s_b; s_{b-1}, \dots, s_1) \dots f_\beta^-(s_2; s_1) f_\beta^-(s_1). \end{aligned}$$

Формула (A.1) может быть также переписана в виде интегрального преобразования от произведения полных токов:

$$\begin{aligned} P^-(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b)) &= \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{qs_i - q^{-1}s_j} \oint \prod_{k=1}^b \frac{du_k}{u_k} Y(\tilde{\omega} \bar{u}; \tilde{\omega} \bar{s}) f_\beta(u_1) \dots f_\beta(u_b) = \\ &= \prod_{i < j} \frac{s_i - s_j}{qs_i - q^{-1}s_j} \oint \prod_{k=1}^b \frac{du_k}{u_k} \frac{1}{1 - s_k/u_k} \prod_{i=k+1}^b \frac{q - q^{-1}s_i/u_k}{1 - s_i/u_k} f_\beta(u_1) \dots f_\beta(u_b), \end{aligned}$$

которое уже использовалось в предыдущем разделе для доказательства теоремы 1.

2. Вычисление проекции $P^-(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b))$ также сводится к вычислению проекций струн:

$$\begin{aligned} P^-(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_a) f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b)) &= \\ &= \sum_{k=0}^{\min\{a,b\}} \frac{1}{k!(a-k)!(b-k)!} \overline{\text{Sym}}_t^a \overline{\text{Sym}}_s^b (P^-(f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_{a-k})) \times \\ &\times P^-(f_{\alpha+\beta}(qs_1) \dots f_{\alpha+\beta}(qs_k) f_\beta(s_{k+1}) \dots f_\beta(s_b)) \times \\ &\times Z(q^{-1}t_{a-k+1}, \dots, q^{-1}t_a; s_1, \dots, s_k)), \quad (\text{A.4}) \end{aligned}$$

где ряд $Z(\bar{t}, \bar{s})$ определен в (3.9), а проекция струны задана формулой

$$\begin{aligned}
P^-(f_{\alpha+\beta}(qs_1) \dots f_{\alpha+\beta}(qs_k) f_\beta(s_{k+1}) \dots f_\beta(s_b)) = \\
= \prod_{1 \leq i < k+1 \leq j \leq b} \frac{qs_i - q^{-1}s_j}{s_i - s_j} \prod_{1 \leq i < j \leq b} \frac{q^{-1}s_i - qs_j}{qs_i - q^{-1}s_j} \times \\
\times P^-(f_\beta(s_b; s_{b-1}, \dots, s_1)) \dots P^-(f_\beta(s_{k+1}; s_k, \dots, s_1)) \times \\
\times P^-(f_{\alpha+\beta}(qs_k; qs_{k-1}, \dots, qs_1)) \dots P^-(f_{\alpha+\beta}(qs_1)). \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Токи $f_\gamma(t_i; t_{i-1}, \dots, t_1)$ в этой формуле для $\gamma = \beta, \alpha + \beta$ определяются соотношениями (A.2) с учетом вида функций (A.3), которые инвариантны относительно одновременного растяжения всех переменных. Формулы для проекций единичных токов заданы соотношениями (3.13), так что $P^-(f_\alpha(t)) = -f_\alpha^-(t)$, $P^-(f_{\alpha+\beta}(qs)) = -(f_\alpha[0]f_\beta^-(s) - q^{-1}f_\beta^-(s)f_\alpha[0])$, $P^-(f_\beta(s)) = -f_\beta^-(s)$. Имеем, в частности,

$$\begin{aligned}
P^-(f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)) &= \left(f_\alpha^-(t_1) - \frac{(q - q^{-1})t_2}{qt_1 - q^{-1}t_2} f_\alpha^-(t_2) \right) f_\alpha^-(t_2) = \\
&= \frac{q^{-1}t_1 - qt_2}{qt_1 - q^{-1}t_2} \left(f_\alpha^-(t_2) - \frac{(q - q^{-1})t_1}{qt_2 - q^{-1}t_1} f_\alpha^-(t_1) \right) f_\alpha^-(t_1), \\
P^-(f_{\alpha+\beta}(qs_1)f_\beta(s_2)) &= -\frac{q^{-1}s_1 - qs_2}{s_1 - s_2} \times \\
&\times \left(f_\beta^-(s_2) - \frac{(q - q^{-1})s_1}{qs_2 - q^{-1}s_1} f_\beta^-(s_1) \right) P^-(f_{\alpha+\beta}(qs_1)).
\end{aligned}$$

3. Доказательство формулы (A.4) основывается на еще одной переформулировке соотношений Серра, использующей правое токовое присоединенное действие $\widetilde{\text{ad}}_x^{(D)}(y)$ из формулы (4.2):

$$\widetilde{\text{ad}}_{f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2)}^{(D)}(f_\beta(s)) = 0, \quad (\text{A.6})$$

и на тождестве, аналогичном доказанному в предложении 5.4. А именно, для $k \leq b$ справедливо равенство

$$\begin{aligned}
P^-(\widetilde{\text{ad}}_{f_\alpha(t_1) \dots f_\alpha(t_k)}^{(D)}(f_\beta(s_1) \dots f_\beta(s_b))) &= \frac{1}{k!(b-k)!} \overline{\text{Sym}}_s^b \overline{\text{Sym}}_t^k \left(\prod_{i=1}^k \prod_{\ell=i+1}^b \frac{qt_\ell - s_i}{t_\ell - qs_i} \times \right. \\
&\times P^-(\widetilde{\text{ad}}_{f_\alpha(t_1)}^{(D)}(f_\beta(s_1)) \dots \widetilde{\text{ad}}_{f_\alpha(t_k)}^{(D)}(f_\beta(s_k)) f_\beta(s_{k+1}) \dots f_\beta(s_b)) \Big). \quad (\text{A.7})
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Коммутационные соотношения с проекциями токов

Коммутационные соотношения (2.21) позволяют выписать через полные токи правила перестановки проекций токов $f^-(z)$ налево, а проекций $f^+(z)$ — направо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Б.1. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} f_\alpha^+(z)f_\beta(w) &= \frac{qz-w}{z-qw}f_\beta(w)f_\alpha^+(z) + \\ &+ \frac{qw(q^{-1}-q)}{z-qw}f_\beta(w)f_\alpha^+(qw) + \frac{qw}{z-qw}f_{\alpha+\beta}(qw), \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

$$\begin{aligned} f_\alpha(z)f_\beta^-(w) &= \frac{qz-w}{z-qw}f_\beta^-(w)f_\alpha(z) + \\ &+ \frac{z(q^{-1}-q)}{z-qw}f_\beta^-(q^{-1}z)f_\alpha(z) - \frac{z}{z-qw}f_{\alpha+\beta}(z). \end{aligned} \quad (\text{Б.2})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, например, соотношения (Б.1) основывается на разложении ядра

$$\frac{qu-w}{(u-qw)(z-u)} = \frac{qz-w}{z-qw} \frac{1}{z-u} + \frac{qw(q^{-1}-q)}{z-qw} \frac{1}{qw-u}$$

в сумму двух ядер.

Аналогично, из соотношения (4.6), получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Б.2. *Нетривиальными соотношениями между полными токами и их проекциями являются*

$$\begin{aligned} f_\alpha^+(z)f_{\alpha+\beta}(w) &= \frac{q^{-1}z-qw}{z-w}f_{\alpha+\beta}(w)f_\alpha^+(z) + \frac{(q-q^{-1})w}{z-w}f_{\alpha+\beta}(w)f_\alpha^+(w), \\ f_\alpha(z)f_{\alpha+\beta}^-(w) &= \frac{q^{-1}z-qw}{z-w}f_{\alpha+\beta}^-(w)f_\alpha(z) + \frac{(q-q^{-1})z}{z-w}f_{\alpha+\beta}^-(z)f_\alpha(z) \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

и

$$\begin{aligned} f_{\alpha+\beta}^+(qz)f_\beta(w) &= \frac{q^{-1}z-qw}{z-w}f_\beta(w)f_{\alpha+\beta}^+(qz) + \frac{(q-q^{-1})w}{z-w}f_\beta(w)f_{\alpha+\beta}^+(q^{p-i}w), \\ f_{\alpha+\beta}(qz)f_\beta^-(w) &= \frac{q^{-1}z-qw}{z-w}f_\beta^-(w)f_{\alpha+\beta}(qz) + \frac{(q-q^{-1})z}{z-w}f_\beta^-(z)f_{\alpha+\beta}(qz), \\ f_{\alpha+\beta}(z)f_{\alpha+\beta}^-(w) &= \frac{q^{-1}z-qw}{qz-q^{-1}w}f_{\alpha+\beta}^-(w)f_{\alpha+\beta}(z) + \\ &+ \frac{z(q-q^{-1})}{qz-q^{-1}w}(1+q^2)f_{\alpha+\beta}^+(q^2z)f_{\alpha+\beta}(z). \end{aligned} \quad (\text{Б.4})$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Значение этого предложения состоит в том, что полутроки $f_\gamma^-(w)$ ($f_\gamma^+(z)$) можно переставлять через полные токи налево (направо) так, что полные токи не меняются и возникают только сдвинутые полутроки, умноженные на рациональные функции. В настоящей работе мы постоянно пользовались этим свойством коммутирования полных токов и полутроков.

Следующее предложение описывает коммутационные соотношения между проекциями токов, отвечающих составным и простым корням.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Б.3. *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned}
P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_1)) f_{\alpha}^+(t_2) - q f_{\alpha}^+(t_2) P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_1)) &= \\
&= \frac{q - q^{-1}}{t_1 - t_2} (f_{\alpha}^+(t_1) - f_{\alpha}^+(t_2)) (t_1 P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_1)) - t_2 P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_2))), \\
f_{\beta}^-(s_1) P^- (f_{\alpha+\beta}(qs_2)) - q^{-1} P^- (f_{\alpha+\beta}(qs_2)) f_{\beta}^-(s_1) &= \\
&= \frac{q - q^{-1}}{s_1 - s_2} (s_1 P^- (f_{\alpha+\beta}(qs_1)) - s_2 P^- (f_{\alpha+\beta}(qs_2))) (f_{\beta}^-(s_1) - f_{\beta}^-(s_2)).
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в применении экранирующего оператора $S_{f_{\beta}[0]}$ к равенству (5.5) и оператора $\tilde{S}_{f_{\alpha}[0]}$ к аналогичному равенству, в котором проекции токов $f_{\alpha}^+(t_i)$ заменены на проекции $f_{\beta}^-(s_i)$, а также в использовании соотношений Серра, которые в терминах проекций токов могут быть записаны как

$$\begin{aligned}
q f_{\alpha}^+(t_1) P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_2)) + q f_{\alpha}^+(t_2) P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_1)) &= \\
&= P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_1)) f_{\alpha}^+(t_2) + P^+ (f_{\alpha+\beta}(t_2)) f_{\alpha}^+(t_1), \\
q f_{\beta}^-(s_1) P^- (f_{\alpha+\beta}(s_2)) + q f_{\beta}^-(s_2) P^- (f_{\alpha+\beta}(s_1)) &= \\
&= P^- (f_{\alpha+\beta}(s_1)) f_{\beta}^-(s_2) + P^- (f_{\alpha+\beta}(s_2)) f_{\beta}^-(s_1).
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Прямое доказательство теоремы 1

Первый шаг доказательства такой же, как и в (5.12). Заметим, что проекция P^+ в (5.12) равна нулю при $k > a$. Это объясняет верхний предел суммирования в формуле (3.10). Для ее доказательства вычислим

$$P^+ (f_{\alpha}(t_1) \dots f_{\alpha}(t_a) P^- (f_{\beta}(s_1) \dots f_{\beta}(s_k))),$$

или

$$P^+ \left(f_{\alpha}(t_1) \dots f_{\alpha}(t_a) f_{\beta}^-(s_1; s_2, \dots, s_k) \dots f_{\beta}^-(s_{k-1}; s_k) f_{\beta}^-(s_k) \right),$$

переставляя комбинации токов $f_{\beta}^-(s_m; s_{m+1}, \dots, s_k)$, $m = 1, \dots, k$, налево с помощью соотношений (Б.2). В соответствии с этими перестановочными соотношениями на позициях $j = 1, \dots, a$ будут возникать сложные токи $f_{\alpha+\beta}(t_j)$. Затем переставим эти сложные токи налево, пользуясь соотношениями (4.6). При этих преобразованиях мы снова

используем утверждения предложения 5.1. После всех этих перестановок получим сумму по неупорядоченному набору $J = \{j_1, \dots, j_k\} \in \{1, \dots, a\}$:

$$\begin{aligned} & \prod_{i < j}^k \frac{s_i - s_j}{qs_i - q^{-1}s_j} \sum_J \prod_{m=1}^k \left(\prod_{\ell_m=1}^{j_m-1} \frac{qt_{j_m} - q^{-1}t_{\ell_m}}{t_{j_m} - t_{\ell_m}} \prod_{\ell_m=j_m+1}^a \frac{q^{-1}t_{j_m} - qt_{\ell_m}}{t_{j_m} - t_{\ell_m}} \right) \times \\ & \times \prod_{m=1}^k \left(\frac{t_{j_m}}{t_{j_m} - qs_m} \prod_{i=m+1}^k \frac{qt_{j_m} - s_i}{t_{j_m} - qs_i} \right) \times \\ & \times P^+ \left(f_{\alpha+\beta}(t_{j_1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_{j_k}) \underbrace{f_{\alpha}(t_1)f_{\alpha}(t_2) \dots f_{\alpha}(t_{a-1})f_{\alpha}(t_a)}_{\text{токи, зависящие от } t_{j_1}, \dots, t_{j_k}, \text{ опущены}} \right). \end{aligned}$$

На следующем шаге воспользуемся соотношениями (4.6), чтобы переставить слева направо группу сложных токов $f_{\alpha+\beta}(t_{j_1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_{j_k})$, находящихся под проекцией

$$\begin{aligned} & \prod_{i < j}^k \frac{s_i - s_j}{qs_i - q^{-1}s_j} \sum_J \prod_{\substack{i < j \\ i, j \in J}} \frac{q^{-1}t_i - qt_j}{t_i - t_j} \times \\ & \times \prod_{\substack{i < j \\ i \in J, j \notin J}} \frac{q^{-1}t_i - qt_j}{qt_i - q^{-1}t_j} \prod_{m=1}^k \left(\frac{t_{j_m}}{t_{j_m} - qs_m} \prod_{i=m+1}^k \frac{qt_{j_m} - s_i}{t_{j_m} - qs_i} \right) \times \\ & \times P^+ \left(\underbrace{f_{\alpha}(t_1)f_{\alpha}(t_2) \dots f_{\alpha}(t_{a-1})f_{\alpha}(t_a)}_{\text{токи, зависящие от } t_{j_1}, \dots, t_{j_k}, \text{ опущены}} f_{\alpha+\beta}(t_{j_1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_{j_k}) \right). \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь тем, что суммирование в данной формуле проходит по неупорядоченным наборам J размера k . Это означает, что данное суммирование можно представить как два последовательных суммирования: по всем различным, но упорядоченным выборкам $\{j_1 < j_2 < \dots < j_k\}$ из набора $\{1, 2, \dots, a\}$ и по всем перестановкам среди фиксированных $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Из-за перестановочных соотношений (4.6) между сложными токами второе суммирование может быть представлен как q^{-1} -симметризация по выделенному набору $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ функции

$$\prod_{m=1}^k \left(\frac{1}{t_{j_m} - qs_k} \prod_{i=m+1}^k \frac{qt_{j_m} - s_i}{t_{j_m} - qs_i} \right),$$

так как остальные составляющие формулы (B.1) инвариантны относительно перестановок $\{j_1, j_2, \dots, j_k\}$. Используя теперь комбинаторное тождество (3.31), которое может быть переписано в форме

$$\begin{aligned} & \prod_{i < j}^k \frac{q^{-1}t_i - qt_j}{t_i - t_j} \widetilde{\text{Sym}}_t^k \left(\prod_{m=1}^k \left(\frac{1}{t_m - qs_m} \prod_{i=m+1}^k \frac{qt_m - s_i}{t_m - qs_i} \right) \right) = \\ & = \prod_{i < j}^k \frac{qs_i - q^{-1}s_j}{s_i - s_j} \widetilde{\text{Sym}}_s^k \left(\prod_{m=1}^k \left(\frac{1}{t_m - qs_m} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{qt_m - s_i}{t_m - qs_i} \right) \right), \end{aligned}$$

формулу (В.1) можно записать как

$$\sum_J \prod_{\substack{i < j \\ i \in J, j \notin J}} \frac{q^{-1}t_i - qt_j}{qt_i - q^{-1}t_j} \overline{\text{Sym}}_s^k \left(\prod_{m=1}^k \frac{t_{j_m}}{t_{j_m} - qs_k} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{qt_{j_m} - s_i}{t_{j_m} - qs_i} \right) \times \\ \times P^+ \left(\underbrace{f_\alpha(t_1)f_\alpha(t_2) \dots f_\alpha(t_{a-1})f_\alpha(t_a)}_{\text{токи, зависящие от } t_{j_1}, \dots, t_{j_k}, \text{ опущены}} f_{\alpha+\beta}(t_{j_1}) \dots f_{\alpha+\beta}(t_{j_k}) \right). \quad (\text{В.2})$$

Теперь суммирование по всем упорядоченным наборам J в (В.2) может быть записано, как q -симметризация по всем переменным $t_1, \dots, t_a$, и мы получаем (5.19). Повторение аргументов, приведенных в конце п. 5.2, заканчивает предложенное в этом разделе прямое доказательство теоремы 1.

Благодарности. Многие идеи этой работы появились во время пребывания С. Пакуляка на математическом факультете университета Кюсю осенью 2003 г., тогда как основная часть работы была выполнена во время совместного визита обоих авторов в Математический институт им. М. Планка, г. Бонн, весной 2004 г. Авторы благодарят эти научные центры за стимулирующую научную атмосферу. Настоящая работа была частично поддержана грантом INTAS-OPEN-03-51-3350, программой Гейзенберга–Ландау, грантом РФФИ № 04-01-00642 и грантом Президентской программы поддержки научных школ НШ-1999.2003.2.

Список литературы

- [1] *P. Kulish, N. Reshetikhin.* J. Phys. A. 1983. V. 16. P. L591–L596.
- [2] *F. Smirnov.* Form Factors in Completely Integrable Models of Quantum Field Theory (Adv. Series in Math. Phys. V. 14). Singapore: World Scientific, 1992; *A. Варченко, В. Тарасов.* Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 90–137.
- [3] *B. Enriquez, S. Khoroshkin, S. Pakuliak.* Weight functions and Drinfeld currents. Preprint ITEP-TH-40/05. М.: ИТЭР, 2005.
- [4] *V. Drinfeld.* Sov. Math. Dokl. 1988. V. 36. P. 212–216.
- [5] *J. Ding, S. Khoroshkin.* Transformation Groups. 2000. V. 5. P. 35–59.
- [6] *V. Tarasov, A. Varchenko.* Combinatorial Formulae for Nested Bethe Vectors, to appear.
- [7] *J. Ding, S. Khoroshkin, S. Pakuliak.* Lett. Math. Phys. 2000. V. 53. № 2. P. 121–141.
- [8] *Дж. Динг, С. Пакуляк, С. Хорошкин.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 2. С. 179–214.
- [9] *B. Enriquez.* Transformation Groups. 2000. V. 5. P. 111–120.
- [10] *B. Enriquez, V. Rubtsov.* Israel J. Math. 1999. V. 112. P. 61–108.

Поступила в редакцию 17.II.2005