Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Р. Садыков, Скручиваемость траекторий спиновых частиц, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 280–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 18:08:26

СКРУЧИВАЕМОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ СПИНОВЫХ ЧАСТИЦ

В приближении геометрической оптики предсказан эффект дополнительного кручения траекторий спиновых частиц (аналог оптического эффекта Магнуса). Эффект определяется поляризацией (спиральностью) и кривизной траектории частицы. Рассмотрены рассеяние протона в кулоновском поле ядра и задача отклонения от зеркального отражения ультрахолодных нейтронов.

Ключевые слова: геометрическая оптика, оптический эффект Магнуса, ультрахолодные нейтроны.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных областях физики интенсивно исследуются эффекты, связанные с поляризацией частиц. Это оптический эффект Магнуса [1], [2], поляризационные эффекты в оптической линзе [3], геометрическая фаза Берри–Панчаратнама [4] (в оптике прототипом фазы Берри–Панчаратнама является фаза Рывтова–Владимирского [5]). В ядерных взаимодействиях учет поляризации частиц позволяет рассмотреть эффекты нарушения пространственной четности при радиационном захвате нейтронов [6] и при упругом взаимодействии нейтронов с ядрами [7], а также спиновые эффекты в физике высоких энергий [8] и при делении ядер [9].

Учет поляризационных эффектов в оптике позволяет в приближении геометрической оптики получить связь между параметрами траектории фотона и спиральностью (циркулярной поляризацией) фотона. Это дополнительное кручение траектории фотона при наличии у траектории ненулевой кривизны (оптический эффект Магнуса) [10], [11], дополнительное искривление траектории при наличии кручения фотона [2], дополнительное кручение траектории фотона в поглощающей среде [10] и др. Все вышеперечисленные оптические эффекты определяются знаком циркулярной поляризации (спиральностью) фотона.

В данной работе для спиновых частиц с ненулевой массой в приближении геометрической оптики (условие квазиклассичности) рассмотрен один из перечисленных выше

* Российский федеральный ядерный центр, Всероссийский научно-исследовательский институт технической физики им. акад. Е. И. Забабахина, Снежинск, Челябинская обл., Россия. E-mail: 540@vniitf.ru

эффектов – дополнительное кручение траектории спиновой частицы при движении по искривленной траектории (оптический эффект Магнуса). Для этого по аналогии с фотоном показано, что при движении спиновой частицы по круговой траектории у волнового вектора появляется поперечная к плоскости траектории компонента. Наличие волнового вектора позволяет записать эйконал для частицы. Уравнение траектории спиновой частицы получено с помощью вариационного метода применительно к эйконалу частицы. В качестве примеров рассмотрены задачи о влиянии полученного эффекта на траекторию протона в кулоновском поле ядра и об отклонении от закона зеркального отражения ультрахолодных нейтронов от стенок нейтронотводов.

2. ВЛИЯНИЕ ПОЛЯРИЗАЦИИ СПИНОВОЙ ЧАСТИЦЫ НА ЕЕ ФАЗУ

Пусть заряженная частица без аномального магнитного момента движется по искривленной траектории с радиусом кривизны $\mathbf{R}$ в результате действия центростремительной электростатической силы $\mathbf{F}$. Для описания движения частицы в этом случае удобно воспользоваться тороидальной системой координат (П.1) (см. приложение 1), где натуральный параметр z отсчитывается вдоль окружности радиуса R ; x и y – координаты, у которых базисные векторы ортогональны друг другу и перпендикулярны траектории частицы, причем x отсчитывается вдоль радиуса кривизны $\mathbf{R}$ траектории частицы. Нетрудно заметить, что с точностью до $\sim 1/R$ система координат (П.1) в окрестности точки $x = y = z = 0$ совпадает с декартовой. В этой системе координат потенциальная энергия U имеет вид

$$U = -Fx, \quad (1)$$

где $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, e – заряд частицы, $\mathbf{E}$ – напряженность поля.

Для потенциала (1) решение можно искать в высокоэнергетическом приближении, если предположить, что размеры волнового пакета частицы соизмеримы нескольким длинам волн де Бройля λ ([12], с. 38). В этом случае

$$\frac{|U|}{pv} \sim \frac{\lambda^2}{R^2} \ll 1, \quad \frac{|\chi_0|\tilde{z}}{p\rho^2} \ll 1,$$

где p и v – импульс и скорость частицы, χ_0 – первый член разложения эйконала, ρ и $\tilde{z}$ – характерные размеры потенциального поля. Для потенциала (1) $\tilde{z} \sim \rho \sim \lambda$. В этом случае

$$\frac{|\chi_0|\tilde{z}}{p\rho^2} \sim \zeta \frac{\lambda^2}{R^2}, \quad \zeta = \frac{Ze^2}{\hbar v}.$$

Волновая функция в эйкональном приближении будет иметь вид (см. [12], с. 38 или [13], с. 176)

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(1 - \frac{i\hbar}{2mc} \hat{\alpha} \hat{\nabla}\right) u \Psi_{\text{нр}}, \quad u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \\ \left(\Delta - \frac{(|\varepsilon_n| + U)2m}{\hbar^2}\right) \Psi_{\text{нр}} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где u – биспинор, причем $\chi \rightarrow 0$, ε_n – нерелятивистский дискретный уровень энергии (в нашем случае $\varepsilon_n = 0$), m – масса частицы, $\hat{\alpha}$ – динамическая переменная в уравнении Дирака. В стандартном представлении

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \hat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j + \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i = 2\delta_{ij}, \\ \hat{\alpha}_i \hat{\alpha}_j - \hat{\alpha}_j \hat{\alpha}_i &= ie_{ijk} \Sigma_k, \quad \Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

где e_{ijk} – кососимметричный тензор, $i, j, k = 1, 2, 3$. Для потенциала (1) уравнение (2) для $\Psi_{\text{нр}}$ в тороидальной системе координат (П.1) с учетом (П.3) запишется в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{x}{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{2mFx}{h^2} \right) \Psi_{\text{нр}} = 0. \quad (4)$$

Два слагаемых в левой части (4) сокращаются. Действительно, в нулевом приближении $\partial^2 \Psi_{\text{нр}} / \partial z^2 = -(p^2 / h^2) \Psi_{\text{нр}}$. Отсюда из равенства третьего и четвертого слагаемых в (4) получим, что F равна центробежной силе $F = -p^2 / (mR)$. Оставшиеся два слагаемых в (4) приводят к тому, что в приближении геометрической оптики

$$\Psi_{\text{нр}} = \text{const} \cdot e^{-\tau x + i p z / h}, \quad \tau = \frac{1}{2R}. \quad (5)$$

Отсюда видно, что волновая функция как бы “сжимается” к центру радиуса кривизны траектории и “растягивается” в противоположном направлении. Такая закономерность является следствием того, что изменение элементарного объема $dV = h_1 h_2 h_3 \times dx dy dz = (1 + x/R) dx dy dz$ приводит к изменению плотности вероятности $|\Psi|^2$ (величина $|\Psi|^2 dV$ остается постоянной).

Покажем, что для частицы, у которой волновая функция имеет вид (5), направление распространения частицы и направление волнового вектора не совпадают. Действительно, для плотности потока $\mathbf{S}$ нерелятивистской спиновой частицы имеет место уравнение ([13], с. 102)

$$\mathbf{S} = \Psi^* \hat{\alpha} \Psi = \frac{\mathbf{p}}{m} + \frac{h}{2m} \text{rot}(\varphi^* \hat{\sigma} \varphi), \quad (6)$$

где в рассматриваемом случае функция Ψ определена в (2). Из (6), (2) и (5) получим

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{h}{2m} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}, \quad (7)$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор, направленный вдоль вектора поляризации частицы в системе покоя $(\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma})\varphi = \sigma_s \varphi$, $\sigma_s = \pm 1$, $\langle \mathbf{S} \rangle$ – усредненный по волновому пакету вектор $\mathbf{S}$, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}/R^2$ – кривизна траектории. При выводе (7) с точностью до $\sim v/c$, где v – скорость нерелятивистской частицы, учтено, что спиновая часть волновой функции φ не зависит от $\mathbf{r}$, а скалярная часть при движении по искривленной траектории в соответствии с (5) имеет анизотропию.

Поскольку $\mathbf{p}$ – касательный к траектории частицы вектор, то потребуем, чтобы вектор $\langle \mathbf{S} \rangle$ (7) был параллелен $\mathbf{p}$. Этого можно добиться, если волновую функцию представить в виде (см. (2))

$$\Psi(x, y, z) = u \exp\left(-\frac{x}{2R} + ikz + i \int \eta_\alpha dx^\alpha\right) \Psi_{\text{нр}}, \quad (8)$$

где $k = p/\hbar$, η_α – ковариантная α -я компонента вектора

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{n}. \quad (9)$$

Если (8) подставить в соотношение (6), то получим

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{\mathbf{P}}{m}. \quad (10)$$

В этом случае, как и следовало ожидать, вектор $\langle \mathbf{S} \rangle$ параллелен $\mathbf{p}$.

В соответствии с (8) фазу $\Delta\phi$ и импульс $\mathbf{P}$ частицы в окрестности начала координат $x = y = z = 0$ можно записать в виде

$$\Delta\phi = \int (k dz + \eta_\alpha dx^\alpha), \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + \hbar \boldsymbol{\eta}, \quad (11)$$

где z – натуральный параметр, отсчитываемый вдоль траектории луча.

3. УРАВНЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ СПИНОВОЙ ЧАСТИЦЫ

Пусть $\mathbf{p} = \hbar k \mathbf{l}$, $|\mathbf{l}| = 1$. Приравняв вариацию фазы $\Delta\phi$ из (11) к нулю, мы получим уравнение траектории частицы в потенциальном поле (подробнее см. [14])

$$\frac{d\mathbf{l}}{dz} = \mathbf{l} \times \nabla \ln n \times \mathbf{l} + \frac{1}{k} \mathbf{l} \times \text{rot } \boldsymbol{\eta}, \quad (12)$$

где вектор $\boldsymbol{\eta}$ определен в (9).

При движении частицы по определенной траектории вектор $\boldsymbol{\eta}$ зависит от натурального параметра z . Поэтому величину $\text{rot } \boldsymbol{\eta}$ можно заменить на величину $\mathbf{l} \times \partial \boldsymbol{\eta} / \partial z$. С учетом последнего обстоятельства уравнение (12) запишется в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{dz} = \mathbf{l} \times \nabla \ln n \times \mathbf{l} + \frac{1}{k} \mathbf{l} \times \mathbf{l} \times \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial z}. \quad (13)$$

Последнее слагаемое в этом равенстве содержит величину $\partial \boldsymbol{\eta} / \partial z$. Если положить

$$\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z} \times \mathbf{n},$$

то получится уравнение, аналогичное тому, которое было получено из укороченных векторных волновых уравнений в работе [15] на основе модового подхода, развитого в [10], [14]. В случае фотонов это слагаемое позволяет в приближении геометрической оптики описать оптический эффект Магнуса [1], [2], суть которого состоит в том, что изначально плоская траектория фотона за счет изменения кривизны начинает скручиваться.

Эффект зависит от спиральности фотона. В многомодовом световоде (волновая оптика) оптический эффект приводит к повороту спекл-картины при смене знака циркулярной поляризации (спиральности) на противоположный. Поскольку для фотона $\mathbf{l} \parallel \mathbf{n}$, то в уравнении траектории фотона последнее слагаемое будет пропорционально $\sigma \partial|\boldsymbol{\tau}|/\partial z$, где $\sigma = \pm 1$ – спиральность фотона, $|\boldsymbol{\tau}|$ – кривизна траектории фотона. Видно, что при движении фотона по круговой траектории оптический эффект Магнуса отсутствует.

При движении по искривленной траектории или движении в электромагнитном поле имеет место неравенство $\partial \mathbf{n} / \partial z \neq 0$. В соответствии с (13) это, в свою очередь, должно влиять на величину рассматриваемого эффекта. При движении по искривленной траектории имеет место прецессия Томаса [16], суть которой сводится к тому, что при движении по криволинейной траектории в мгновенно сопутствующей инерциальной системе гироскоп прецессирует с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega}_T = \frac{j-1}{v^2} \mathbf{v} \times \mathbf{a}, \quad (14)$$

где $j = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ – скорость и ускорение гороскопа. При движении по искривленной траектории с нерелятивистскими скоростями из (14) получим

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = \frac{1}{2c^2} \mathbf{n} \times \mathbf{a} \times \mathbf{l}. \quad (15)$$

Формула (15) при μ' совпадает с прецессией $\mathbf{n}$ в электрическом поле $\mathbf{E}$ ([13], с. 182)

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial z} = \frac{\mu + \mu'}{ch} \mathbf{n} \times \mathbf{E} \times \mathbf{l}, \quad (16)$$

где $\mu = eh/(2mc)$ – магнитный момент, μ' – аномальный магнитный момент. Действительно, $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$. При $\mu' = 0$ из (15) следует (16).

Таким образом, влияние прецессии Томаса на величину скручиваемости траектории того же порядка, что и влияние прецессии спина в электрическом поле. Ниже будет показано, что при движении протона в кулоновском поле ядра угол рассеяния значительно больше угла поворота спина за счет прецессии в электрическом поле.

4. ДВИЖЕНИЕ ПРОТОНА В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ ЯДРА

Рассмотрим влияние полученного эффекта на траекторию протона в кулоновском поле. Для этого покажем, что при кулоновском рассеянии протона на ядре с зарядом Ze величина угла поворота $\Delta\alpha$ вектора поляризации протона $\mathbf{n}$ от первоначального направления значительно меньше единицы, т.е. $\Delta\alpha \ll 1$. Это, в свою очередь, при дальнейшей оценке величины скручивания траектории фотона позволит считать, что вектор $\mathbf{n}$ не меняет направления. При движении протона в кулоновском поле ядра угол поворота $\Delta\phi$, на котором происходит рассеяние фотона, и минимальное расстояние $r_{\min}$ протона от ядра соответственно оцениваются как ([17], с. 212)

$$\Delta\phi \approx \frac{l_0}{\zeta h}, \quad r_{\min} \approx \frac{\zeta h v}{2E_0} \left(1 + \frac{l_0^2}{4\zeta^2 h^2} \right), \quad (17)$$

где $E_0 = mv^2/2$, v – скорость протона при $r \rightarrow \infty$, $\zeta = Ze^2/(hv)$.

В электрическом поле $\mathbf{E}$ вектор $\mathbf{n}$ удовлетворяет эволюционному уравнению (16). Из (16) и (17) получим

$$\frac{d\Delta\alpha}{dz} \approx \frac{\mu + \mu'}{ch} |\mathbf{E} \times \mathbf{l}| \approx \frac{\zeta h l_0}{2m^2 c^2 r^3}. \quad (18)$$

Поскольку в основном изменение величины $\Delta\alpha$ происходит в точке $r = r_{\min}$, то из (18) следует

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta\phi} \approx \left(\frac{d\Delta\alpha}{dz} \right) \Big|_{r=r_{\min}} r_{\min} \approx \frac{E_0 l_0}{mc^2 h \zeta}. \quad (19)$$

Если взять значения $l_0 = 10h$, $E_0 = 1 \text{ МэВ}$, $Z = 85$, $\zeta = 19$, $\Delta\phi = 0.5$ рад, то получим $\Delta\alpha \approx 5 \cdot 10^{-4}$ рад $\ll 1$. Таким образом, наше предположение $\Delta\alpha \ll 1$ справедливо, поэтому в дальнейших выкладках будем считать, что $\mathbf{n}$ не зависит от z . Теперь с помощью уравнения (13) определим величину скручивания траектории при $\mathbf{n} = \text{const}$, где $|\mathbf{n}| = 1$. Поскольку $\mathbf{n}$ практически не меняет своего направления, то предположим, что вектор $\mathbf{n}$ налетающего протона лежит в плоскости траектории и перпендикулярен вектору Паули ([17], с. 215)

$$\mathbf{A} = \mathbf{r} - \frac{\mathbf{l}_0 \times \mathbf{l}}{\zeta h}. \quad (20)$$

Так как мы полагаем, что $\mathbf{n} = \text{const}$, а $d\mathbf{l}/dz \parallel \boldsymbol{\tau}$, то получим, что $\mathbf{l} \times d\boldsymbol{\eta}/dz \sim (\mathbf{n} \times \mathbf{l}) \cdot (\partial\boldsymbol{\tau}/\partial z) \approx 0$. Поэтому в (13) будет иметь место

$$\frac{1}{k} \mathbf{l} \times \mathbf{l} \times \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial z} = -\frac{1}{k} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial z}. \quad (21)$$

Из (13), (21) и (П.6) (см. приложение 2) получим

$$k \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \approx \pm |\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}|, \quad (22)$$

где $\mathbf{n} \perp \mathbf{A}$, $\boldsymbol{\tau}$ – кривизна траектории, ось $\tilde{z}$ направлена перпендикулярно $\mathbf{v}_\infty$ и $\mathbf{A}$. Поскольку величина угла отклонения частицы относительно ядра вдоль прямой $\tilde{z}$ равна $\Delta\Theta \approx \Delta\tilde{z}/r_{\min}$, то из (22) получим

$$\Delta\Theta \approx \frac{\tau \Delta z}{k r_{\min}} \approx \frac{\tau \Delta\phi}{k},$$

где $\tau = |\boldsymbol{\tau}|$. В точке $r_{\min}$ имеет место $\tau/k = 1/\eta \approx 0.05$ рад. При $\Delta\phi = 0.5$ рад в точке разворота фотона получим $\Delta\Theta \approx 2.5 \cdot 10^{-2}$ рад.

Таким образом, вблизи точки разворота $r_{\min}$ должен наблюдаться эффект отклонения характера движения от плоскостного. В соответствии с (22) при $r \rightarrow \infty$ ($\tau \rightarrow 0$) имеет место $d\tilde{z}/dz = 0$, т.е. на больших расстояниях от ядра рассматриваемый эффект не будет проявляться. Из (22) также следует, что при $r \rightarrow \infty$ траектория протона будет лежать в различных, но параллельных плоскостях, причем расстояние H между плоскостями будет определяться в соответствии с (22) с помощью интеграла

$$H = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} |\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}| dz \right|.$$

5. ДВИЖЕНИЕ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ

Полученные в работе результаты могут быть использованы при исследовании ультрахолодных нейтронов [18]. Из результатов работы следует, что при $E \rightarrow 0$ должно наблюдаться отклонение от закона зеркального отражения нейтронов от стен нейтронного канала. Действительно, аппроксимируем функциональную зависимость потенциальной энергии вблизи стенки нейтронного канала при $x > 0$ параболой

$$U(x) = \frac{\Delta U x^2}{H^2}, \quad (23)$$

где $\Delta U \sim 10^{-7}$ эВ. Из (13) с учетом (21) получим уравнения траектории при $E \gg \Delta U$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dz^2} &= -\frac{\Delta U}{E} \frac{x}{H^2}, \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= -2 \frac{\Delta U}{k E H^2} \frac{\partial x}{\partial z}. \end{aligned} \quad (24)$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае величина поперечного отклонения за счет прецессии Томаса меньше поперечного отклонения за счет оптического эффекта Магнуса (24) в число раз, которое оценивается как $\sim \Delta U / mc^2 \ll 1$. Из (24) следует, что x в зависимости от z меняется по гармоническому закону с полупериодом $\Delta z = \pi H E / (\Delta U)$. На расстоянии Δz поперечное отклонение $|\Delta y|$ в соответствии с (24) будет равно $\Delta y = x_0 \sqrt{\Delta U} / (2 k h \sqrt{E})$, где x_0 – амплитуда отклонения частицы вдоль x при движении по гармоническому закону. Отклонение от закона зеркального отражения будет существенным при $x_0 \sim |\Delta y|$, т.е. при $E \sim \Delta U \lambda^2 / H^2$. При $\lambda \sim H$ получим $E/10 \sim \Delta U \sim 10^{-7}$ эВ, т.е. для ультрахолодных нейтронов должно наблюдаться сильное отклонение от законов геометрической оптики.

Отклонение от закона зеркального отражения фотона было предсказано в работах [19] и в научной литературе встречается под названием эффекта Федорова.

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотренный в работе эффект является следствием закона сохранения полного момента импульса. Действительно, пусть частица с продольной поляризацией движется по круговой траектории. Поскольку в этом случае частица является замкнутой системой, которая движется в центрально-симметричном поле, то должна сохраняться проекция полного момента на бинормаль круговой траектории. Из (11) следует, что момент импульса $\mathbf{L}$ относительно центра окружности равен

$$\mathbf{L} = h \left(k \mathbf{R} \times \mathbf{l} - \frac{1}{2} \mathbf{n} \right), \quad (25)$$

откуда для полного момента $\mathbf{J} = \mathbf{L} + h \mathbf{n} / 2$ получим

$$\mathbf{J} = h k \mathbf{R} \times \mathbf{l}. \quad (26)$$

Таким образом, при движении частицы с продольной поляризацией по круговой траектории полный момент определяется в соответствии с (26) через параметры этой траектории, т.е. является инвариантом.

Рассмотренный в работе эффект связан с эффектом азимутальной асимметрии в случае борновского рассеяния в кулоновском поле ядра для частиц с $\zeta \ll 1$, $v = c$. В кулоновском поле величина скручивания равна (см. выше) $\Delta\Theta/\Delta\varphi \approx \tau\Delta\phi/k \sim \lambda/R$. Поскольку рассматриваемый эффект является следствием закона сохранения полного момента, то в первом борновском приближении величина $\Delta\Theta/\Delta\varphi$ должна быть $\sim \lambda/R$. Но в первом борновском приближении азимутальная асимметрия отсутствует ([12], с. 75). Именно такая закономерность получена в настоящей работе для $\zeta \gg 1$ при движении протона в кулоновском поле ядра.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Имеет место следующая связь между тороидальной (x, y, z) и декартовой (x^1, x^2, x^3) системами координат:

$$\begin{aligned} x^1 &= (R + x) \cos \frac{z}{R}, \\ x^2 &= (R + x) \sin \frac{z}{R}, \\ x^3 &= -y, \end{aligned} \quad (\text{П.1})$$

где R – радиус тора. Из (П.1) следует, что тороидальная система координат является ортогональной с коэффициентами Ламе

$$h_1 = 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = 1 + \frac{x}{R}. \quad (\text{П.2})$$

С точностью до членов порядка $1/R$ лапласиан в рассматриваемой системе координат в соответствии с (П.2) запишется в виде

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} - 2 \frac{x}{R} \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (\text{П.3})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Для единичного касательного к траектории частицы вектора $\mathbf{l}$ в цилиндрической системе координат $(r, \phi, \tilde{z})$ получим

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \mathbf{e}_r r'_z + \mathbf{e}_z \tilde{z}'_z, \\ \frac{d\mathbf{l}}{dz} &= \mathbf{e}_r (r''_{zz} - r(\phi'_z)^2) + \mathbf{e}_\phi (r\phi''_{zz} + 2r'_z\phi'_z) + \mathbf{e}_z \tilde{z}''_{zz}, \\ \mathbf{l} \times \nabla \ln k \times \mathbf{l} &= \mathbf{e}_r \frac{\partial \ln k}{\partial r} - \mathbf{l} \frac{\partial \ln k}{\partial z}, \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial z} \nabla \ln k = -\frac{2mZe^2}{h^2 k^2 r^3} r'_z \mathbf{e}_r - \frac{2m^2 Z^2 e^4}{h^4 k^4 r^4} r'_z \mathbf{e}_r + \frac{mZe^2}{h^2 k^2 r^2} \phi'_z \mathbf{e}_\phi,$$

где $r'_z, \phi'_z, \tilde{z}'_z$ — соответственно производные r, ϕ и $\tilde{z}$ по натуральному параметру z .

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial z} = \mathbf{l} \times \nabla \ln k \times \mathbf{l} - \frac{1}{k} \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial z}. \quad (\text{П.5})$$

При $\tilde{z}'_z \ll 1$ из (П.4) и (П.5) при $\boldsymbol{\eta} \parallel \mathbf{e}_z$ следует

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial z^2} = -\frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (\text{П.6})$$

Список литературы

- [1] Б. Я. Зельдович, В. С. Либерман. Квантовая электроника. 1990. Т. 17. С. 433; А. В. Дугин, Б. Я. Зельдович, Н. Д. Кундикова, В. С. Либерман. Письма в ЖЭТФ. 1991. Т. 53. С. 186; ЖЭТФ. 1991. Т. 100. С. 1474; А. В. Воляр, С. Н. Лапеева. Письма в Журн. технич. физ. 1992. Т. 18. № 8. С. 53; 1994. Т. 20. № 8. С. 4; Н. Р. Садыков. Опт. и спектр. 2000. Т. 89. № 2. С. 273.
- [2] Н. Р. Садыков. Опт. и спектр. 1998. Т. 84. № 4. С. 589.
- [3] Н. Б. Баранова, А. Ю. Савченко, Б. Я. Зельдович. Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. № 4. С. 216; М. Я. Даршт, И. В. Жиргалова, Б. Я. Зельдович. Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 59. № 11. С. 734.
- [4] M. V. Berry. Proc. Roy. Soc. London. A. 1984. V. 392. P. 216; Y. Aharonov, J. Anandan. Phys. Rev. Lett. 1987. V. 58. P. 1593; S. Pancharatnam. Proc. Indian Acad. Sci. A. 1956. V. 44. P. 247; V. 46. P. 1.
- [5] С. М. Рытов. ДАН СССР. 1938. Т. 28. С. 263; В. В. Владимирский. ДАН СССР. 1941. Т. 31. С. 222.
- [6] Д. В. Зарецкий, В. К. Сироткин. ЯФ. 1984. Т. 39. С. 585; E. Kolomensky et al. Phys. Lett. B. 1981. V. 107. P. 272; Yu. G. Abov et al. Phys. Lett. 1964. V. 12. P. 25; В. М. Лобашев и др. Письма в ЖЭТФ. 1966. Т. 3. С. 268.
- [7] Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. ЖЭТФ. 1974. Т. 67. С. 397; В. П. Алфименков. УФН. 1984. Т. 144. С. 361.
- [8] С. М. Трошин, Н. Е. Тюрин. УФН. 1994. Т. 164. С. 1073.
- [9] Г. В. Данилян. УФН. 1980. Т. 131. С. 329.
- [10] Н. Р. Садыков. Квантовая электроника. 1993. Т. 20. С. 1140.
- [11] Н. Р. Садыков. Опт. и спектр. 1995. Т. 78. № 2. С. 300.
- [12] А. И. Ахизер, В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981.
- [13] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1980.
- [14] Н. Р. Садыков. Квантовая электроника. 1992. Т. 19. С. 1021.
- [15] Н. Р. Садыков. Квантовая электроника. 1993. Т. 20. С. 1137.
- [16] L. H. Thomas. Nature. 1926. V. 117. P. 514.
- [17] И. Айзенберг, В. Грайнер. Механизмы возбуждения ядра. М.: Атомиздат, 1973.
- [18] И. М. Франк. УФН. 1991. Т. 161. № 11. С. 107.
- [19] Ф. И. Федоров. ДАН СССР. 1955. Т. 105. С. 465; Журн. прикл. спектр. 1977. Т. 27. С. 580.

Поступила в редакцию 3.I.2002 г.,
после доработки 12.VII.2002 г.