Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Васильев, О. А. Гельфонд, Конформные поля высших рангов в $Sp(2M)$ -симметричном обобщенном пространстве-времени, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 1, 35–65

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1880>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 03:05:56

© 2005 г.

М. А. Васильев*, О. А. Гельфонд†

КОНФОРМНЫЕ ПОЛЯ ВЫСШИХ РАНГОВ В $Sp(2M)$ -СИММЕТРИЧНОМ ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Изучаются $Sp(2M)$ -инвариантные уравнения поля, связанные с тензорными произведениями различных рангов фоковских (синглетонных) представлений $Sp(2M)$. Показано, что эти уравнения описывают локализацию на поверхностях (“бранах”) различных размерностей, вложенных в обобщенное пространство-время $\mathcal{M}_M$ с матричными координатами (координатами “центральных зарядов”). Детально изучен случай билинейного тензорного произведения. Показано, что билинейные сохраняющиеся токи, построенные ранее из полей ранга 1 в $\mathcal{M}_M$, удовлетворяют некоторым уравнениям полей ранга 2 в $\mathcal{M}_M$. Показано также, что поля ранга 2 в $\mathcal{M}_M$ эквивалентны полям ранга 1 в $\mathcal{M}_{2M}$.

Ключевые слова: поля высших спинов, высшие симметрии.

1. ВВЕДЕНИЕ

Идея о том, что совокупность $4d$ -безмассовых полей всех спинов допускает явно $Sp(8)$ -симметричную формулировку в 10-мерном обобщенном пространстве-времени $\mathcal{M}_4$ с матричными координатами $X^{\alpha\beta} = X^{\beta\alpha}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, 4$ – 4-мерные майорановские спинорные индексы), первоначально была выдвинута Фронсдалом [1]. В работах [2], [3] изучались твисторные модели мировых частиц, которые в результате квантования приводят к волновым функциям, эквивалентным $sp(8)$ -синглетонам, отождествляемым в работе [1] с множеством всех $4d$ -безмассовых представлений $o(3, 2)$. В работе [4] было показано, что совокупность свободных уравнений движения безмассовых полей всех спинов в 4-мерном пространстве-времени Минковского действительно обладает $Sp(8)$ -симметрией, действующей локально на инфинитезимальном уровне, и допускает эквивалентное описание в $\mathcal{M}_4$. В работах [3], [4] предложенные конструкции были обобщены на общий случай $Sp(2M)$ и было показано, что большие значения M соответствуют теориям высших спинов в высших размерностях.

*Физический институт РАН им. П. Н. Лебедева, Москва, Россия. E-mail: vasiliev@lpi.ru

†Институт системных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: gel@lpi.ru

Задача построения последовательной калибровочной теории высших спинов представляется весьма интересной в контексте обнаружения наиболее симметричной фазы теории фундаментальных взаимодействий. Недавно было высказано предположение, что безмассовые калибровочные теории высших спинов AdS/CFT-дуальны [5]–[7] граничным конформным теориям в пределе $g^2 N \rightarrow 0$ [8]–[11]. Для проверки этого предположения необходимо построение нелинейной теории безмассовых полей высших спинов, что является непростой задачей, решенной к моменту написания этой статьи только для $3d$ - и $4d$ -теорий высших спинов на уровне уравнений движения [12], [13]¹⁾. Для этой цели важно разработать эффективный формализм, наиболее полно использующий симметрии модели. Поскольку конформные теории высших спинов обладают высшими симплектическими симметриями, важный шаг состоит в том, чтобы развить явно $Sp(2M)$ -инвариантную формулировку. Это достигается введением обобщенного пространства-времени $\mathcal{M}_M$, являющегося минимальным пространством, в котором $Sp(2M)$ действует геометрически, как было показано в работе [1], где пространство $\mathcal{M}_M$ реализовывалось как пространство M -форм минимального ранга. Эквивалентным образом $\mathcal{M}_M$ может быть определено [17] как фактор-пространство $Sp(2M)/P$, где P – определенная параболическая подгруппа $Sp(2M)$, генераторами которой являются обобщенные преобразования Лоренца, дилатации и специальные конформные преобразования (см. ниже). Определенное таким образом пространство $\mathcal{M}_M$ аналогично компактифицированному пространству Минковского в случае обычной конформной группы $SO(d, 2)$. Обычное пространство Минковского – это большая клетка компактифицированного пространства Минковского. В данной статье мы анализируем задачу в большой клетке $R^{M(M+1)/2}$ пространства $\mathcal{M}_M$ (используя для большой клетки то же самое обозначение $\mathcal{M}_M$). Бесконечная башня безмассовых полей всех спинов в размерности 4 описывается одним скаляром и одним спинором (или одним скалярным суперполем) в $\mathcal{M}_4$ [4].

Обобщенные конформные $Sp(2M)$ -симметричные преобразования в $\mathcal{M}_M$ реализуются как векторные поля (см. например, [4]):

$$P_{\alpha\beta} = -i \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}}, \quad L_{\alpha}^{\beta} = 2i X^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\gamma}}, \quad K^{\alpha\beta} = -i X^{\alpha\gamma} X^{\beta\eta} \frac{\partial}{\partial X^{\gamma\eta}}.$$

Ненулевые $sp(2M)$ -коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} [L_{\alpha}^{\beta}, L_{\gamma}^{\delta}] &= i(\delta_{\alpha}^{\delta} L_{\gamma}^{\beta} - \delta_{\gamma}^{\beta} L_{\alpha}^{\delta}), \\ [L_{\alpha}^{\beta}, P_{\gamma\delta}] &= -i(\delta_{\gamma}^{\beta} P_{\alpha\delta} + \delta_{\delta}^{\beta} P_{\alpha\gamma}), \quad [L_{\alpha}^{\beta}, K^{\gamma\delta}] = i(\delta_{\alpha}^{\gamma} K^{\beta\delta} + \delta_{\alpha}^{\delta} K^{\beta\gamma}), \\ [P_{\alpha\beta}, K^{\gamma\delta}] &= \frac{i}{4}(\delta_{\beta}^{\gamma} L_{\alpha}^{\delta} + \delta_{\alpha}^{\gamma} L_{\beta}^{\delta} + \delta_{\alpha}^{\delta} L_{\beta}^{\gamma} + \delta_{\beta}^{\delta} L_{\alpha}^{\gamma}). \end{aligned}$$

¹⁾Более подробно с теориями высших спинов можно ознакомиться в работах [10], [14]. Некоторые кубические взаимодействия высших спинов в $5d$ -теориях были получены недавно в работах [15]. В работе [16] были предложены нелинейные уравнения движения в пространстве-времени произвольного числа измерений.

Здесь $P_{\alpha\beta}$ и $K^{\alpha\beta}$ — генераторы обобщенных сдвигов и специальных конформных преобразований. Алгебра gl_M , натянутая на L_α^β , распадается в прямую сумму центральной подалгебры, ассоциированной с обобщенным генератором дилатации $D = L_\alpha^\alpha$, и подалгебры sl_M обобщенных генераторов Лоренца $l_\alpha^\beta = L_\alpha^\beta - \delta_\alpha^\beta D/M$. Заметим, что координаты $X^{\beta\delta}$ в $\mathcal{M}_M$ можно интерпретировать как дуальные к обобщенным импульсам $P_{\beta\delta}$ в правой части антикоммутатора алгебры суперсимметрии $\{Q_\alpha, Q_\beta\} = P_{\beta\delta}$ — соотношения, играющего основную роль в физике бран [18].

$Sp(8)$ -инвариантные уравнения движения, рассматривавшиеся в работах [4], [17], имеют вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial X^{\alpha\beta} \partial X^{\gamma\delta}} - \frac{\partial^2}{\partial X^{\alpha\gamma} \partial X^{\beta\delta}} \right) b(X) = 0 \quad (1.1)$$

для скалярного поля $b(X)$ и

$$\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} f_\gamma(X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\gamma}} f_\beta(X) = 0 \quad (1.2)$$

для векторного поля $f_\beta(X)$. Мы используем термин “свектор” (симплектический вектор), чтобы отличать $f_\beta(X)$ от векторов в обычной алгебре Лоренца $o(d-1, 1)$. Отметим, что свекторные поля подчиняются статистике Ферми [17]. При $M = 2$ уравнение (1.1) совпадает с $3d$ -безмассовым уравнением Клейна–Гордона и (1.2) — с уравнением Дирака, так как антисимметризация по паре двухкомпонентных индексов α и β эквивалентна их свертке с (2×2) -симплектической формой $\varepsilon^{\alpha\beta}$. При $M = 4$ уравнения (1.1) и (1.2) в обобщенном 10-мерном пространстве-времени $\mathcal{M}_4$ содержат бесконечную серию обычных $4d$ -уравнений движения для безмассовых полей всех спинов [17].

Одна из возможных интерпретаций расширенного матричного пространства-времени состоит в том, что это просто удобное техническое средство, как суперпространство для суперсимметрии. Однако более интересно проанализировать свойства динамики в обобщенном пространстве-времени $\mathcal{M}_M$, понимаемом как реальное пространство-время. В работе [17] было показано, что динамика в $\mathcal{M}_M$, описываемая уравнениями (1.1) и (1.2), согласована с принципами релятивистской квантовой теории поля, включая унитарность и микропричинность. Наиболее существенное отличие от обычной картины состоит в том, что системы уравнений (1.1) и (1.2) сильно переопределены, и в результате локальные события происходят на подпространстве σ , названном в работе [17] локальной поверхностью Коши и отождествляемом с обычным пространством в пространстве-времени Минковского. Формулировки $Sp(2M)$ -инвариантных систем в терминах обобщенного пространства-времени $\mathcal{M}_M$ и в терминах обычного пространства-времени эквивалентны и дополнительные. Описание в терминах обобщенного пространства-времени $\mathcal{M}_M$ выявляет ясную геометрическую природу $Sp(2M)$ -обобщенной конформной симметрии. В частности, оно допускает геометрическую интерпретацию преобразований электромагнитной дуальности как некоторых обобщенных преобразований Лоренца. Однако для определения настоящих локальных полей необходимо разрешить определенные уравнения связи. Описание в терминах пространства-времени Минковского,

которое решает последнюю задачу, делает скрытыми часть симметрий, а именно те, которые сдвигают σ .

В работе [17] была отмечена возможность написания в одном и том же пространстве $\mathcal{M}_M$ различных $Sp(2M)$ -инвариантных уравнений, ассоциированных с локальными поверхностями Коши различных размерностей. В результате поля, ассоциированные с различными типами $Sp(2M)$ -инвариантных уравнений, визуализируют $\mathcal{M}_M$ как различные экземпляры пространства-времени Минковского различных размерностей, которые могут интерпретироваться как различные браны, вложенные в одно и тоже обобщенное пространство-время $\mathcal{M}_M$. Целью настоящей работы является построение примеров $Sp(2M)$ -инвариантных уравнений и анализ их свойств. Будет показано, что элементарные решения полученных уравнений дают теоретико-полевую реализацию составных “преонных” состояний Богомолова–Прасада–Зоммерфельда (БПЗ), предложенных в работах [19]. Одно из наблюдений настоящей работы состоит в том, что динамические уравнения для некоторых полей ранга 2 имеют точно такой же вид, как и полученные в работе [20] условия сохранения, налагаемые на “сохраняющиеся” формы, из которых получается полный список сохраняющихся зарядов в конформной теории высших спинов ранга 1. Кроме того, будет показано, что система ранга 2 по отношению к $Sp(2M)$ эквивалентна системе ранга 1 по отношению к $Sp(4M)$. Этот факт находится в согласии с идеей обобщенного AdS/CFT-соответствия [4]. В частности, это гарантирует существование сохраняющихся токов ранга 2^{p+1} , построенных из исходных полей ранга 1 в $\mathcal{M}_M$, являющихся дифференциальными формами ранга 2^p , которые, будучи проинтегрированы по $2^p M$ -мерным бранам, дают сохраняющиеся заряды, не зависящие от локальных вариаций бран (напомним, что размерность пространства $\mathcal{M}_M$ равна $M(M+1)/2$).

В разделе 2 суммируются некоторые основные свойства развернутой формы динамических уравнений. Здесь подчеркивается важный общий факт, состоящий в том, что пространство решений различных уравнений в частных производных, инвариантных относительно некоторой алгебры симметрий g , допускает естественную структуру ассоциативной алгебры, индуцированную тензорной алгеброй полубесконечных модулей над g . В разделе 3 рассматриваются динамические уравнения для полей ранга r в пространстве $\mathcal{M}_M$. Приведен полный список динамических уравнений в двукратном тензорном произведении. Показано, что сохраняющиеся токи, построенные в работе [20] из билинейных выражений от полей ранга 1 в $\mathcal{M}_M$, удовлетворяют уравнениям полей ранга 2 в $\mathcal{M}_M$. В разделе 4 показано, что поля ранга 2 в $\mathcal{M}_M$ эквивалентны полям ранга 1 в $\mathcal{M}_{2M}$. В разделе 5 приведены общие решения полевых уравнений для полей ранга 2. Приведены аргументы в пользу того, что нормируемые решения в $\mathcal{M}_M$ распадаются в сумму положительно- и отрицательно-частотных решений и допускают расширение до нормируемых решений ранга 1 в $\mathcal{M}_{2M}$. Раздел 6 содержит некоторые выводы. Технические детали анализа σ_- -когомологий, связанных в рамках формализма “развернутой динамики” с динамическими полями рангов 1 и 2 и их полевыми уравнениями, рассмотрены в приложении.

2. РАЗВЕРНУТАЯ ДИНАМИКА

Естественный подход к динамическим уравнениям движения в контексте теории высших спинов, который мы называем “развернутой динамикой”, состоит в формулировке уравнений движения в форме некоторых условий ковариантного постоянства [21]. С помощью этого метода в работах [12], [13] были получены совместные калибровочно-инвариантные нелинейные уравнения движения для полей высших спинов для $3d$ - и $4d$ -теорий. Этот подход удобен как для выявления симметрий динамических уравнений движения, так и для анализа их динамического смысла (постановка задачи Коши и т. д.). Так как в настоящей работе он играет ключевую роль, мы опишем его более подробно.

Пусть некоторая динамическая система представлена в виде

$$(d + \omega)C(X) = 0, \quad d = dX^A \frac{\partial}{\partial X^A}, \quad (2.1)$$

где $C(X)$ – некоторое множество полей (обычно бесконечное), принимающих значения в линейном пространстве $\mathcal{V} = V \times \Lambda$, где V образует модуль над некоторой алгеброй Ли g и Λ – внешняя (гассманова) алгебра дифференциалов dX^A . Другими словами, $C(X)$ – сечение тривиального векторного расслоения $\mathcal{B} = R^d \times \mathcal{V}$, база которого – пространство-время R^d с локальными координатами X^A :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & & \downarrow \\ & & R^d. \end{array}$$

1-форма $\omega(X) = dX^A \omega_A(X)$ – некоторая фиксированная плоская g^- связность, удовлетворяющая условию

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \wedge \omega] = 0 \quad (2.2)$$

(как обычно, скобки $[\cdot, \cdot]$ означают произведение Ли в g).

Уравнение (2.1) инвариантно относительно действия глобальной симметрии g . Действительно, (2.1) и (2.2) инвариантны относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \delta\omega(X) &= d\epsilon(X) + [\omega(X), \epsilon(X)], \\ \delta C(X) &= -\epsilon(X)C(X), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\epsilon(X)$ – произвольный параметр симметрии, принимающий значения в g . Для фиксированной $\omega(X)$ существует остаточная симметрия с параметром $\epsilon(X)$, удовлетворяющим уравнению

$$d\epsilon(X) + [\omega(X), \epsilon(X)] = 0. \quad (2.4)$$

Совместность этого уравнения вытекает из условия (2.2). Зависимость $\epsilon(X)$ от X восстанавливается, согласно (2.4), по фиксированному значению $\epsilon(X_0)$ в некоторой точке

X_0 пространства-времени. Получившаяся глобальная алгебра симметрии с параметром $\epsilon(X_0)$ образует алгебру g . Таким образом, если некоторая динамическая система представлена в виде (2.1) с плоской связностью $\omega(X)$, принимающей значения в некоторой алгебре g , действующей на $\mathcal{V}$, то отсюда следует, что система (2.1) обладает глобальной симметрией g (2.3). Этот подход является достаточно общим, так как любая свободная динамическая система может быть представлена в виде (2.1) с помощью добавления достаточного количества вспомогательных переменных (нелинейные системы описываются в терминах подходящего обобщения, связанного со свободными дифференциальными алгебрами; подробнее см., например, [14], [21], [22]).

В данной работе нас будет интересовать частный случай уравнения (2.1) вида

$$(\mathcal{D} + \sigma_-)C(X) = 0, \quad (2.5)$$

где операторы $\mathcal{D}$ и σ_- обладают свойствами

$$(\sigma_-)^2 = 0, \quad \mathcal{D}^2 = 0, \quad \{\mathcal{D}, \sigma_-\} = 0, \quad (2.6)$$

гарантирующими плоскую связность. Здесь $\mathcal{D}$ – ковариантная производная для некоторой алгебры $g' \subset g$, а σ_- – вертикальный оператор, действующий изоморфно в различных слоях. Также предполагается существование оператора градуировки G , диагонализующего в слое V , спектр которого в V ограничен снизу:

$$[G, \mathcal{D}] = 0, \quad [G, \sigma_-] = -\sigma_-. \quad (2.7)$$

Внешняя алгебра Λ градуируется оператором F , считающим число внешних дифференциалов dX^A и удовлетворяющим условиям

$$[F, \mathcal{D}] = \mathcal{D}, \quad [F, \sigma_-] = \sigma_-. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.5) распадаются в прямую сумму независимых подсистем для p -форм $C(X)$ с различными p .

Напомним стандартную терминологию теории поля. Поле $A(x)$ называется вспомогательным, если с помощью уравнений движения оно может быть представлено в виде алгебраической функции конечного числа полей и их производных в некоторой точке x . Например, уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x} B(x) + A(x) = 0 \quad (2.9)$$

означает, что $A(x)$ может выбрано в качестве вспомогательного поля. Все оставшиеся поля, которые не могут быть выбраны в качестве вспомогательных, называются динамическими. Уравнения, выражающие вспомогательные поля через динамические и их производные и/или другие вспомогательные поля, называются уравнениями связи. По определению после исключения из системы вспомогательных полей с помощью уравнений связи динамические поля удовлетворяют оставшимся уравнениям, называемым

динамическими. Динамические уравнения могут быть как тривиальными (отсутствовать), так и нетривиальными.

Другими словами, вспомогательные поля – это те, которые могут быть исключены из динамической системы без использования нелокальных операторов. Отметим, что разделение полей на динамические и вспомогательные не обязательно однозначно. Например, в системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x}B(x) + A(x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}A(x) + \alpha B(x) = 0,$$

где α – размерный параметр, A может интерпретироваться как вспомогательное, а B – как динамическое, и наоборот. Получившиеся в результате две системы эквивалентны (дуальны) друг другу. Еще одна неоднозначность в определении вспомогательных полей может получиться при “треугольном” переопределении полей:

$$A \rightarrow A' = A + D(A, \phi), \quad \phi' = \phi. \quad (2.10)$$

Здесь через A и ϕ обозначены соответственно вспомогательные и динамические поля, D – некоторый дифференциальный оператор и обратное преобразование тоже локально, т.е. $A' \rightarrow A = A' + D'(A', \phi)$, где D' – некоторый другой дифференциальный оператор. Эта неоднозначность не влияет на динамическое содержание системы, т.е. не меняет вида динамических уравнений. В задачах, изучающихся в данной работе, уравнения (2.5) имеют определенные градуировки относительно G (2.7), и класс вспомогательных полей определен однозначно по модулю треугольных преобразований (2.10), так как вспомогательные поля выражаются через производные динамических посредством уравнений связи и, следовательно, имеют более высокие, чем динамические поля, градуировки относительно G .

Полезное наблюдение [4], [23] состоит в следующем: нетривиальная динамика, скрытая в уравнениях (2.5), характеризуется нетривиальными классами когомологий дифференциального оператора σ_- в $\mathcal{V}$. Классы когомологий определяются стандартно: $H^p(\sigma_-) = \text{Ker}(\sigma_-) / \text{Im}(\sigma_-)|_p$, где $|_p$ означает сужение на подпространство p -форм в $\mathcal{V}$. Отметим, что $H^0(\sigma_-) = \text{Ker}(\sigma_-)|_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Независимые динамические поля C , являющиеся 0-формами, принимают значения в $H^0(\sigma_-)$.*

Действительно, все вспомогательные поля из $V/H^0(\sigma_-)$ (т.е. такие, что $\sigma_- C(X) \neq 0$) могут быть выражены через производные по пространственно-временным переменным от динамических полей в силу уравнений (2.5). Здесь существенно предположение о том, что оператор σ_- алгебраичен по пространственно-временным переменным, т.е. не содержит производных по ним (вертикален). Заметим, что $H^0(\sigma_-)$ всегда не пусто, так как содержит нетривиальное подпространство пространства V минимальной градуировки по G . Неоднозначность определения вспомогательных полей как элементов V , представляющих $V/H^0(\sigma_-)$, несущественна, так как устраняется переопределениями полей типа (2.10).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Число независимых дифференциальных уравнений на содержащиеся в (2.5) динамические 0-формы совпадает с числом базисных элементов группы когомологий $H^1(\sigma_-)$. Дифференциальные уравнения на динамические поля градуировки l , связанные с элементами группы $H^1(\sigma_-)$ градуировки k , имеют порядок $k + 1 - l$.

Действительно, разложим пространство 0-форм C в прямую сумму собственных подпространств оператора G . Обозначим поле с собственным значением s_k оператора G через C_k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Уравнение (2.5) распадается в бесконечную систему уравнений

$$\sigma_-(C_{k+1}) + \mathcal{D}(C_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Предположим, что динамическое содержание уравнений (2.11) с собственными значениями s_k для $k \leq k_q$ найдено. Применяя оператор $\mathcal{D}$ к левой части уравнений (2.11) при $k \leq k_q$ и принимая во внимание (2.6), получаем

$$\sigma_-(\mathcal{D}(C_{k_q+1})) = 0. \quad (2.12)$$

Следовательно, форма $\mathcal{D}(C_{k_q+1})$ σ_- -замкнута. Если группа $H^1(\sigma_-)$ тривиальна в секторе $k_q + 1$, то любое решение (2.12) может быть записано в виде $\mathcal{D}(C_{k_q+1}) = \sigma_- \tilde{C}_{k_q+2}$ для некоторого поля $\tilde{C}_{k_q+2}$. Это, в свою очередь, эквивалентно утверждению, что можно так подобрать C_{k_q+2} , что $\tilde{C}_{k_q+2} = 0$ или, другими словами, что некоторые из уравнений (2.11) в секторе $k_q + 1$ являются уравнениями связи, выражающими C_{k_q+2} через производные C_{k_q+1} (здесь снова использовано предположение, что оператор σ_- алгебраичен в пространстве-времени, т.е. не содержит пространственно-временных производных). Если группа $H^1(\sigma_-)$ нетривиальна в секторе $k_q + 1$, то общее решение (2.12) может быть записано в виде

$$\mathcal{D}(C_{k_q+1}) = \sigma_-(\tilde{C}_{k_q+2}) + h_{k_q+1}, \quad (2.13)$$

где h_{k_q+1} — некоторый σ_- -замкнутый элемент, принадлежащий $H^1(\sigma_-)$, который, являясь представителем $H^1(\sigma_-)$, не может быть устранен посредством переопределения вспомогательных полей. Таким образом, уравнение (2.13) выражает h_{k_q+1} (по модулю σ_- -точной формы) через производные поля C_{k_q+1} , которое само выражается через производные динамических полей в силу предыдущих уравнений связи. Уравнение (2.5) налагает условие $h_{k_q+1} = 0$, которое, таким образом, эквивалентно некоторому дифференциальному уравнению для динамических полей. Следовательно, если группа $H^1(\sigma_-)$ нетривиальна в секторе $k_q + 1$, то уравнения (2.5) не только выражают поле C_{k_q+2} через производные C_{k_q+1} , но и налагают дополнительные дифференциальные условия на динамические поля.

Отметим, что если группа $H^1(\sigma_-)$ тривиальна, то уравнения (2.5) эквивалентны некоторому бесконечному множеству уравнений связи, выражающих все поля из $C(X)$ через производные динамических полей.

Здесь уместны следующие замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Динамические поля $C(X)$, являющиеся p -формами, принимают значения в $H^p(\sigma_-)$, тогда как нетривиальные динамические уравнения описываются $H^{p+1}(\sigma_-)$. Предыдущее рассуждение переносится на этот случай почти дословно.

Выводы сохраняют силу, если $\mathcal{D} ((\mathcal{D} + \sigma_-)^2 = 0)$ содержит также и отрицательно градуированные операторы, поскольку в этом случае они не влияют на индукционный анализ.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поменяем ролями $\mathcal{D}$ и σ_- . Пусть при этом $\mathcal{D}$ имеет тривиальные группы когомологий $H^n(\mathcal{D})$ при $n > 0$ и существует некоторый оператор G' , задающий градуировку с ограниченным снизу спектром, такой, что $[G', \mathcal{D}] = -\mathcal{D}$, $[G', \sigma_-] = 0$. Аналогично тому, как это делалось для оператора σ_- , можно заключить, что в силу тривиальности $H^n(\mathcal{D})$ при $n > 0$ уравнения (2.5) не налагают дополнительных нетривиальных дифференциальных условий 0-формы C . Это справедливо, например, в случае, когда $\mathcal{D} = d$ – дифференциал де Рама, действующий на пространстве V' рядов Тейлора от степеней $X - X_0$, а оператор G' считает степени полиномов. Если при этом задано $C(X_0) \in V'$ в некоторой точке X_0 , то уравнения (2.5) однозначно восстанавливают $C(X)$ в окрестности X_0 , по крайней мере, в виде формального ряда. Модуль V' – линейное пространство всех тех пространственно-временных производных $C(X)$ в точке X_0 , которые не проектируются в нуль динамическими уравнениями. Такая интерпретация полезна во многих отношениях. В частности, отсюда следует, что если V' натянуто на неограниченные функции на p -мерных многообразиях M^p , то и задача Коши в X -пространстве формулируется в терминах p -мерных поверхностей Коши, так как решения должны быть функциями того же типа. С другой стороны, если бы глобальное рассмотрение меняло структуру групп когомологий $H^n(\mathcal{D})$, то не каждый элемент V' порождал бы глобальные решения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Предположим, что g допускает тройное Z -градуированное разложение $g = g_0 + g_- + g_+$, где $g_{\pm}$ – абелевы подалгебры. Пусть $\sigma_- = dX^A P_A$, где P_A – некоторый базис в g_- . Тогда динамические поля, удовлетворяющие уравнениям $\sigma_-(C) = 0$, отождествляются с примарными полями $C(X)$, удовлетворяющими уравнениям $P_A C(X) = 0$ ²⁾. Другими словами, $H^0(\sigma_-)$ состоит из сингулярных векторов (т.е. вакуумов) неприводимых g -подмодулей в V . Очевидно, каждый инвариантный подмодуль V порождает подсистему системы (2.5). $H_0(\sigma_-)$ образует модуль над g_0 . В наиболее интересных физических приложениях $H_0(\sigma_-)$ разлагается в (быть может, бесконечную) прямую сумму конечномерных представлений g_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Предположим, что $V_{1,2} = V_1 \otimes V_2$. Пусть $C_1(X) \in V_1$ и $C_2(X) \in V_2$ – решения уравнений (2.5) с некоторыми операторами σ_{1-} и σ_{2-} , соответственно. Тогда

$$C_{1,2}(X) = C_1(X) \otimes C_2(X) \quad (2.14)$$

²⁾Заметим, что в развернутом формализме роль “сдвигов” P_A и “специальных конформных” генераторов K^A алгебры g_+ , действующих в слое, изменена по сравнению со стандартной, индуцированной подходом теории представлений [24], в котором примарные поля определяются непосредственно на базе расслоения.

является решением (2.5) с

$$\sigma_{1,2-} = \sigma_{1-} \otimes \text{Id} + \text{Id} \otimes \sigma_{2-}. \quad (2.15)$$

Независимые уравнения, содержащиеся в (2.5) для $V_{1,2}$ с σ_- -оператором (2.15), характеризуются группой $H^1(\sigma_{1,2-})$ (быть может, тривиальной). Таким образом, развернутая формулировка динамических уравнений снабжает множество решений квазиинвариантных относительно алгебры симметрий g уравнений в частных производных естественной структурой ассоциативного умножения, изоморфной тензорной алгебре полубесконечных модулей над g . Заметим, что эта ассоциативная структура отличается от структуры кольца решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка, сопоставляя решениям некоторого множества квазиинвариантных относительно g уравнений в частных производных (не обязательно первого порядка) некоторые решения других квазиинвариантных относительно g уравнений в частных производных.

Можно рассмотреть составные поля фиксированного типа симметрии, ассоциированного с некоторым неприводимым представлением симметрической группы S_n , действующей на n -кратном тензорном произведении некоторого модуля V . В частности, $C_{1,2}(X) = C(X) \otimes C(X)$ удовлетворяет уравнению (2.5) в симметричном тензорном квадрате V . Например, для рассматриваемой в данной статье модели ниже будет показано, что формула (2.14) порождает сохраняющиеся токи, билинейные по исходным динамическим полям, а полученные динамические уравнения совпадают с условием сохранения [20]. Нахождение примарных полей в $C_{1,2}(X)$ (2.14) оказывается эквивалентным построению сохраняющихся токов из $C_1(X)$ и $C_2(X)$. Как показано в разделе 5, формула (2.14) дает основу для обобщенного AdS/CFT-соответствия с составными динамическими полями, содержащимися в $C_{1,2}(X)$ и интерпретирующимися как элементарные поля в бóльшем пространстве (“*bulk*” space).

В данной статье описанный общий подход используется для изучения $Sp(2M)$ -инвариантной динамики. Уравнения (1.1) и (1.2) были получены в работе [4] из развернутой системы уравнений

$$\left(dX^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} + dX^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \right) C(y|X) = 0, \quad (2.16)$$

где y^α – некоторые вспомогательные коммутирующие переменные. Для установления связи с (2.5)–(2.7) положим

$$\mathcal{D} = dX^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}}, \quad \sigma_- = dX^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta}, \quad G = \frac{1}{2} y^\alpha \frac{\partial}{\partial y^\alpha}.$$

Операторы $\mathcal{D}$ и σ_- действуют в сечениях тривиального векторного расслоения $\mathcal{B} = \mathcal{M}_M \times \mathcal{V}$ над $\mathcal{M}_M$ с локальными координатами $X^{\alpha\beta}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ & & \downarrow \\ & & \mathcal{M}_M \end{array}$$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{\gamma_1 \dots \gamma_n}(X) y^{\gamma_1} \dots y^{\gamma_n}$$
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} C_1(y | X) &= -\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} C_0(y | X), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} C_{3/2}(y | X) &= -\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} C_{1/2}(y | X), \\ \dots, \\ \frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} C_{1+k/2}(y | X) &= -\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} C_{k/2}(y | X), \\ \dots \end{aligned} \tag{2.17}$$
$$C_0(y | X) = b(X), \quad C_{1/2}(y | X) = y^\alpha f_\alpha(X),$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} - \frac{\partial^2}{\partial y^\gamma \partial y^\beta} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \equiv 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} C_{k/2}(y|X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\gamma}} \frac{\partial}{\partial y^\beta} C_{k/2}(y|X) = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} \frac{\partial}{\partial X^{\gamma\delta}} C_{k/2}(y | X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\gamma}} \frac{\partial}{\partial X^{\beta\delta}} C_{k/2}(y | X) = 0.$$

³⁾ Отметим, что аналогичные (2.16) уравнения вида $(dX^{\alpha\beta} \partial/\partial X^{\alpha\beta} + dX^{\alpha\beta} y_{\alpha} y_{\beta}) C(y|X) = 0$ были получены как некоторые уравнения связи в мировой модели частицы [3]. Эти уравнения эквивалентны уравнениям (2.16) для класса задач, допускающих преобразования Фурье в твисторных переменных y_{α} , но не связаны с σ_- -когомологическим анализом вида различных $sp(2M)$ -инвариантных уравнений в частных производных, обсуждающихся в данной работе. Это связано с тем, что оператор $dX^{\alpha\beta} y_{\alpha} y_{\beta}$ повышает степени полиномов по y_{α} , а не понижает их. Поэтому аналог бесконечной системы уравнений (2.17), получающейся из уравнений [3] разложением по степеням y_{α} , не допускает разумной интерпретации в терминах нетривиальной системы дифференциальных уравнений для конечной совокупности динамических полей, дополненных некоторыми уравнениями связи для бесконечной совокупности вспомогательных полей.

Положив здесь $y = 0$, получим уравнения (1.1) и (1.2), соответственно. Чтобы убедиться, что эти уравнения исчерпывают динамическое содержание системы (2.16), необходимо найти группу $H^1(\sigma_-)$. В работе [4] было показано, что в качестве образующих группы $H^1(\sigma_-)$ можно выбрать

$$e_{\gamma\delta,\beta} y^\beta dX^{\gamma\delta}, \quad e_{\gamma\delta,\beta\alpha} y^\beta y^\alpha dX^{\gamma\delta}, \quad (2.18)$$

где $e_{\gamma\delta,\beta}$ и $e_{\gamma\delta,\beta\alpha}$ – произвольные тензоры, имеющие свойства симметрии схем Юнга $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ и $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$, соответственно⁴⁾ (т.е. $e_{\gamma\delta,\beta} = e_{\delta\gamma,\beta}$, $e_{\gamma\delta,\beta\alpha} = e_{\delta\gamma,\beta\alpha} = e_{\gamma\delta,\alpha\beta}$ и симметризация по любым трем индексам дает нуль). Подробный вывод приведен в приложении. Левые части уравнений (1.1) и (1.2) – тензоры с теми же свойствами симметрии, что и базисные элементы (2.18) группы $H^1(\sigma_-)$. Таким образом, системы уравнений (1.1), (1.2) образуют полную систему уравнений движения. Все остальные уравнения системы (2.16) либо выражают вспомогательные поля через производные $b(X)$ и $f_\alpha(X)$, либо являются следствиями уравнений движения.

Система (2.16) дает пример системы уравнений (2.1) с алгеброй симметрий $g = sp(2M)$. Поле $C(y | X)$ может быть интерпретировано как поле, принимающее значения в модуле Фока, образованном операторами рождения y^α :

$$|C(y, X)\rangle = C(y, X)|0\rangle, \quad \bar{y}_\alpha|0\rangle = 0, \quad (2.19)$$

где

$$[\bar{y}_\alpha, y^\beta] = \delta_\alpha^\beta, \quad [y^\alpha, y^\beta] = 0, \quad [\bar{y}_\alpha, \bar{y}_\beta] = 0.$$

Генераторы $sp(2M)$ реализуются как различные билинейные формы, построенные из y^α и $\bar{y}_\alpha$:

$$P_{\alpha\beta} = \bar{y}_\alpha \bar{y}_\beta, \quad K^{\alpha\beta} = y^\alpha y^\beta, \quad L_\alpha{}^\beta = \frac{1}{2} \{\bar{y}_\alpha, y^\beta\}.$$

Очевидно также, что бесконечномерная алгебра полиномов от осцилляторов y^α и $\bar{y}_\alpha$ действует на модуле Фока F . Отсюда следует, что алгебра Вейля, генерируемая осцилляторами y^α и $\bar{y}_\alpha$, является глобальной симметрией системы уравнений (2.16). Это конформная алгебра высших спинов, обсуждавшаяся в работах [4], [25], [26].

Оператор $\sigma_- = dX^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}$ представляет собой частную плоскую связность алгебры $sp(2M)$, ненулевая часть которой целиком находится в секторе обобщенных сдвигов в $sp(2M)$. Таким образом, в соответствии с замечанием 3 динамические поля отождествляются с примарными полями $C(X)$ относительно $P_{\alpha\beta}$.

⁴⁾ Отметим, что здесь тензоры (мультисекторы) классифицируются в соответствии с представлениями группы GL_M , действующей на однородных полиномах от y^α . Градуирующий оператор G – ее центральный элемент, который служит аналогом дилатации в обычной конформной алгебре. Приводимые в статье схемы Юнга характеризуют неприводимые представления GL_M .

Как показано в работе [4], $sp(2M)$ -преобразования глобальной симметрии (2.3), (2.4) динамических полей имеют вид

$$\delta b(X) = \left(\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha}{}_{\alpha} + 2\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta} X^{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\gamma}} - \varepsilon_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} X^{\alpha\beta} + X^{\alpha\gamma} X^{\beta\eta} \frac{\partial}{\partial X^{\gamma\eta}} \right] \right) b(X), \quad (2.20)$$

$$\delta f_{\gamma}(X) = \left(\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} + \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha}{}_{\alpha} + 2\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta} X^{\beta\eta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\eta}} - \varepsilon_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} X^{\alpha\beta} + X^{\alpha\delta} X^{\beta\eta} \frac{\partial}{\partial X^{\delta\eta}} \right] \right) f_{\gamma}(X) + (\varepsilon^{\beta}{}_{\gamma} - \varepsilon_{\eta\gamma} X^{\eta\beta}) f_{\beta}, \quad (2.21)$$

где $\varepsilon^{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha}{}_{\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — не зависящие от X параметры обобщенных сдвигов, преобразований Лоренца и дилатаций и специальных конформных преобразований, соответственно. Эти преобразования могут быть расширены до $OSp(1, 2M)$, действующей на супермультиплеты, образованные скалярами $b(X)$ и векторами $f_{\alpha}(X)$, и до расширенной конформной суперсимметрии $OSp(L, 2M)$, действующей в подходящих системах скаляров и векторов [4] (см. также [17]).

Отметим, что модуль Фока (2.19), используемый для описания классической динамики, не унитарен. Этот модуль двойствен посредством подходящего неунитарного преобразования Боголюбова [4], [26] унитарному модулю Фока, описывающему пространство квантовых состояний с положительно-определенной нормой.

3. ТЕНЗОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Аналогичная конструкция может быть использована для r -кратных тензорных произведений фоковских представлений алгебры $sp(2M)$. Генераторы $sp(2M)$ представлены в виде сумм билинейных форм от r экземпляров взаимно коммутирующих осцилляторов

$$[\bar{y}_{i\alpha}, y_j^{\beta}] = \delta_{ij} \delta_{\alpha}^{\beta}, \quad [y_i^{\alpha}, y_j^{\beta}] = 0, \quad [\bar{y}_{i\alpha}, \bar{y}_{j\beta}] = 0, \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Такая конструкция типична для осцилляторных реализаций представлений симплектических алгебр [27].

Динамика ранга r в $\mathcal{M}_M$ описывается полями $C(y | X)$, полиномиальными по действительным переменным $y_{ij}^{\alpha_j}$:

$$C(y | X) = \sum_n a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{i_1, \dots, i_n}(X) y_{i_1}^{\alpha_1} \dots y_{i_n}^{\alpha_n},$$

где $\alpha_j = 1, \dots, M$, $i_j = 1, \dots, r$ и $X^{\gamma\beta} = X^{\beta\gamma}$ — вещественные матричные координаты пространства $\mathcal{M}_M$. Можно считать, что поля $C(y | X)$ принимают значения в тензорном произведении модулей Фока $\underbrace{F \otimes \dots \otimes F}_r$ ранга r . Оператор σ_- имеет вид

$$\sigma_- = \sum_{i=1}^r dX^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i^{\alpha} \partial y_i^{\beta}}. \quad (3.1)$$

Поэтому уравнения (2.5) принимают вид

$$\left(dX^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} + \sum_{i=1}^r dX^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i^\alpha \partial y_i^\beta} \right) C(y | X) = 0. \quad (3.2)$$

Согласно общему рассмотрению раздела 2 эти уравнения инвариантны относительно $sp(2M)$ -глобальной симметрии.

Отметим, что следующие уравнения являются следствиями (3.2):

$$\frac{\partial}{\partial X^{[\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_{r+1} \beta_{r+1}]} C(y | X) = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial X^{[\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_r \beta_r}} \frac{\partial}{\partial y_i^{\alpha_{r+1} \beta_{r+1}]} C(y | X) = 0, \quad (3.4)$$

где квадратные скобки обозначают полную антисимметризацию по индексам α_i . Роль уравнения (3.3), справедливого для любого поля ранга r в $\mathcal{M}_M$, аналогична роли уравнения Клейна–Гордона для обычных безмассовых полей. Уравнение (3.4) – аналог уравнения Дирака.

Согласно замечанию 2, решения уравнений ранга r в $\mathcal{M}_M$ образуют модуль, состоящий из функций от rM переменных y_i^α . Поэтому размерность “локального расслоения Коши” [17], на котором должны задаваться начальные условия, фиксирующие форму решения во всем пространстве $\mathcal{M}_M$, равна rM .

Рассмотрим случай действительных полей $C(y_1, y_2 | X)$ ранга 2. Вместо действительных переменных y_1^γ, y_2^δ и полей $C(y_1, y_2 | X)$ удобно ввести комплексные переменные

$$\sqrt{2} z^\alpha = y_1^\alpha + i y_2^\alpha, \quad \sqrt{2} \bar{z}^\alpha = y_1^\alpha - i y_2^\alpha \quad (3.5)$$

и полевые переменные

$$\mathcal{C}(z, \bar{z} | X) = \sum c_{\gamma_1 \dots \gamma_k; \delta_1 \dots \delta_n}(X) z^{\gamma_1} \dots z^{\gamma_k} \bar{z}^{\delta_1} \dots \bar{z}^{\delta_n}.$$

В этих обозначениях

$$\sigma_- = 2dX^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}, \quad G = \frac{1}{2} \left(z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \bar{z}^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right).$$

Уравнения (3.2) переписываются в виде

$$dX^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} + 2dX^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} C(z, \bar{z} | X) = 0. \quad (3.6)$$

Справедливы следующие простые следствия уравнений (3.6):

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3 \beta_3}} \mathcal{C}(z, \bar{z} | X) = 0, \quad (3.7)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha_3}} \mathcal{C}(z, \bar{z} | X) = 0, \quad (3.8)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha_3}} \mathcal{C}(z, \bar{z} | X) = 0, \quad (3.9)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha_3}} \mathcal{C}(z, \bar{z} | X) = 0, \quad (3.10)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2} \varepsilon^{\beta_1, \beta_2} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta_2}} \mathcal{C}(z, \bar{z} | X) = 0, \quad (3.11)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2} \varepsilon^{\beta_1, \beta_2} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\alpha_2}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta_2}} \mathcal{C}(z, \bar{z} | X) = 0, \quad (3.12)$$

где $\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ и $\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2}$ — произвольные полностью антисимметричные тензоры, введенные для обеспечения необходимых антисимметризаций. Система (3.6) распадается в бесконечную совокупность подсистем, связанных с различными целочисленными собственными значениями оператора $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = h_z - h_{\bar{z}}, \quad h_z = z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \quad h_{\bar{z}} = \bar{z}^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha},$$

коммутирующего с σ_- . Введя обозначения $\mathcal{C}_{n,m}(z, \bar{z} | X)$ для полей, принимающих значения в собственных подпространствах операторов h_z и $h_{\bar{z}}$:

$$h_z \mathcal{C}_{n,m} = n \mathcal{C}_{n,m}, \quad h_{\bar{z}} \mathcal{C}_{n,m} = m \mathcal{C}_{n,m}, \quad n, m \geq 0,$$

перепишем уравнения (3.6) в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} \right) \mathcal{C}_{n+1, m+1}(z, \bar{z} | X) = - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} \mathcal{C}_{n,m}(z, \bar{z} | X).$$

Чтобы найти динамические поля среди всех полей $\mathcal{C}(z, \bar{z} | X)$, необходимо рассмотреть группу когомологий $H^0(\sigma_-)$. Замкнутая 0-форма удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^\alpha \partial z^\beta} + \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} \right) \mathcal{C} = 0. \quad (3.13)$$

Будучи 0-формой, $\mathcal{C}$ не может быть точной, т.е. $H^0(\sigma_-)$ состоит из всех решений уравнений (3.13). Как показано в приложении, $H^0(\sigma_-)$ состоит из следующих 0-форм: константа $c(X)$, антисимметричный тензор $c_{\alpha, \beta}(X) z^\alpha \bar{z}^\beta$, аналитические полиномы $c_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(X) z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_n}$ ($n > 0$) и антианалитические полиномы $\bar{c}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(X) \bar{z}^{\alpha_1} \dots \bar{z}^{\alpha_n}$ ($n > 0$):

Динамическая 0-форма	схема Юнга	$\mathcal{H}$ -собств. знач.
$c(X)$	•	0
$c_{\alpha, \beta}(X) z^\alpha \bar{z}^\beta; \quad c_{\alpha, \beta} = -c_{\beta, \alpha}$	□	0
$c_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(X) z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_n}$	$\overbrace{\square \square \square \square}^n$	$n > 0$
$\bar{c}_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(X) \bar{z}^{\alpha_1} \dots \bar{z}^{\alpha_n}$	$\overbrace{\square \square \square \square}^n$	$-n < 0$

(3.14)

В соответствии с общим анализом раздела 2 все остальные компоненты поля $\mathcal{C}(z, \bar{z} | X)$ выражаются через старшие производные динамических полей в силу (3.6).

Заметим, что полученный список полностью совпадает со списком неприводимых представлений $sp(2M)$ в тензорном произведении синглетонов [28]. Этот факт не случаен и следует из замечания 3. Точное соответствие между разложением тензорного произведения унитарных синглетонов и тензорного произведения неунитарных модулей, описывающих классические поля в развернутой формулировке, есть следствие двойственности квантового и классического описания [29], связанных неунитарным преобразованием Боголюбова, первоначально найденного для случая $M = 2$ в работе [23] и затем обобщенного на случай $M = 4$ и произвольного четного $M > 4$ в работе [4].

Положив $z^\alpha = \bar{z}^\alpha = 0$ в (3.7)–(3.10), $\bar{z}^\alpha = 0$ в (3.11) и $z^\alpha = 0$ в (3.12), получим полный список уравнений для динамических полей (3.14):

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_3 \beta_3}} c(X) = 0 \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (3.15)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta}} c_{\alpha_2, \alpha_3}(X) = 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (3.16)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} c_{\alpha_3}(X) = 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \bar{c}_{\alpha_3}(X) = 0 \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} c_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_1}} c_{\alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) + \\ & + \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} c_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_2}} c_{\alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) = 0 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^n, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_1}} \bar{c}_{\alpha_2 \beta_2 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_1}} \bar{c}_{\alpha_1 \beta_2 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) + \\ & + \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_2 \beta_2}} \bar{c}_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha_1 \beta_2}} \bar{c}_{\alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \dots \gamma_{n-2}}(X) = 0 \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}^n. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь диаграмма Юнга характеризует тип симметрии левой части соответствующего полевого уравнения и $\varepsilon^{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3}$ — произвольный абсолютно антисимметричный тензор. Заметим, что, аналогично тому факту, что безмассовые поля всех спинов в пространстве-времени Минковского удовлетворяют безмассовому уравнению Клейна–Гордона, любое решение уравнений (3.16)–(3.20) удовлетворяет (3.15).

Чтобы убедиться в полноте списка уравнений, необходимо найти группу $H^1(\sigma_-)$. Анализ группы $H^1(\sigma_-)$ аналогичен анализу $H^0(\sigma_-)$, хотя и несколько более сложен. Подробности приведены в приложении. Оказывается, что существует два GL_M -неприводимых представителя в $H^1(\sigma_-)$ с $\mathcal{H}$ -собственным значением $h = 0$ и ровно по одному

GL_M -неприводимому представителю с каждым ненулевым собственным значением $\mathcal{H}$:

1-форма	Диаграмма Юнга	$\mathcal{H}$ -собств. знач.
$dX^{\gamma_1\gamma_2} z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} \bar{z}^{\beta_1} \bar{z}^{\beta_2} c_{\gamma_1\gamma_2,\beta_1\beta_2,\alpha_1\alpha_2}(X)$		0
$dX^{\gamma_1\gamma_2} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta} c_{\gamma_1\gamma_2,\alpha,\beta}(X)$		0
$dX^{\gamma_1\gamma_2} \bar{z}^{\alpha} z^{\beta_1} z^{\beta_2} c_{\gamma_1\gamma_2,\beta_1\beta_2,\alpha}(X)$		1
$dX^{\gamma_1\gamma_2} z^{\alpha} \bar{z}^{\beta_1} \bar{z}^{\beta_2} \bar{c}_{\gamma_1\gamma_2,\beta_1\beta_2,\alpha}(X)$		-1
$dX^{\gamma_1\gamma_2} z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_n} c_{\alpha_1\dots\alpha_n,\gamma_1\gamma_2}(X)$		$n \geq 2$
$dX^{\gamma_1\gamma_2} \bar{z}^{\alpha_1} \dots \bar{z}^{\alpha_n} \bar{c}_{\alpha_1\dots\alpha_n,\gamma_1\gamma_2}(X)$		$-n \leq -2$

Элементарный анализ показывает, что нетривиальные динамические уравнения (3.15)–(3.20) имеют необходимые свойства симметрии и могут быть получены с помощью процедуры, описанной в разделе 2, примененной к уравнениям (3.6). Таким образом, список уравнений (3.15)–(3.20) полон. Все остальные уравнения в (3.6) суть или следствия этих уравнений, или уравнения связи, наложенные на вспомогательные поля.

Отметим, что собственные для оператора $\mathcal{H}$ элементы из $H^1(\sigma_-)$ с собственными значениями h соответствуют нетривиальным динамическим уравнениям для динамических полей с теми же самыми собственными значениями h .

4. СООТВЕТСТВИЕ РАНГ 2 – РАНГ 1

Имеется два основных аспекта соответствия систем рангов 1 и 2. Первый заключается в том, что, как уже упоминалось в замечании 4, билинейные формы, построенные из полей ранга 1 в $\mathcal{M}_M$, удовлетворяют уравнениям ранга 2 в $\mathcal{M}_M$. Второй заключается в том, что системы ранга 2 в $\mathcal{M}_M$ эквивалентны системам ранга 1 в $\mathcal{M}_{2M}$.

Первое свойство проявляется в том, что уравнения (3.19) и (3.20) имеют вид условий сохранения для обобщенного тензора энергии-импульса, построенного в работе [20], где он был выведен из требования, чтобы обобщенные тензоры энергии-импульса допускали построение сохраняющихся зарядов, связанных с конформными симметриями высших спинов, в виде интегралов от некоторых замкнутых M -форм по M -мерным поверхностям в $\mathcal{M}_M$. Точнее, в работе [20] было показано, что M -форма

$$\begin{aligned} \Omega(\eta) = & \epsilon_{\gamma_1 \dots \gamma_M} dX^{\gamma_1 \alpha_1} \wedge \dots \wedge dX^{\gamma_M \alpha_M} \times \\ & \times \eta_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\alpha_{M+1} \dots \alpha_{M+s}} X^{\alpha_{M+s+1} \beta_1} \dots X^{\alpha_{M+s+t} \beta_t} T_{\alpha_1 \dots \alpha_{M+s+t}} \end{aligned}$$

замкнута, если обобщенный тензор энергии-импульса $T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ удовлетворяет уравнениям (3.19) и (3.20). Здесь $\eta_{\beta_1 \dots \beta_t}^{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ – некоторые константы, отождествляемые с параметрами глобальной конформной симметрии высших спинов, генерируемой сохраняющимися зарядами

$$Q(\eta) = \int_S \Omega(\eta), \quad (4.1)$$

где S – некоторая M -мерная поверхность в $\mathcal{M}_M$. Точное выражение для $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_n}$ в терминах билинейных форм от полей ранга 1, также полученное в работе [20], имеет вид

$$T^{kl}(z | X) = \mathcal{C}^k(z | X) \mathcal{C}^l(\pm iz | X). \quad (4.2)$$

Здесь k и l – цветные индексы, принимающие произвольное число значений. Смысл этого выражения легко восстановить в контексте замечания 4. Действительно, если поле $C(y | X)$ удовлетворяет уравнениям (2.5) с оператором σ_- ранга 1, то поле ранга 2 вида

$$C(y_1, y_2 | X) = C(y_1 | X) C(y_2 | X) \quad (4.3)$$

удовлетворяет уравнениям (2.5) с оператором σ_- ранга 2. Примарные поля в $C(y_1 | X) C(y_2 | X)$, соответствующие однорядным диаграммам Юнга, являются обобщенными тензорами энергии-импульса, найденными в работе [20]. Подставляя выражения для $y_{1,2}$ в терминах комплексных переменных (3.5) в (4.3) и выделяя аналитическую и антианалитическую части, связанные с соответствующими примарными полями, получаем формулу (4.2). Отметим, что, как известно [30], обычные конформные токи высших спинов [31], [32] являются примарными полями конформной группы в рамках двойственной конструкции индуцированных представлений.

В контексте построения AdS/CFT-соответствия тот факт, что условия сохранения токов, построенных из полей ранга 1, являются некоторыми уравнениями движения в системе ранга 2, позволяет предположить, что, как и в случае обычной конформной группы [32], должно иметь место соответствие между билинейными формами от граничных полей ранга 2 и калибровочными полями высших спинов в $\mathcal{M}_M$. Заметим, что поля ранга 2 c , $c_{\alpha\beta}$, и $c_{\alpha(n)}$, $\bar{c}_{\alpha(n)}$ (3.14) при $n < M$ не порождают сохраняющихся токов. Возможно, это означает, что они соответствуют некоторым некалибровочным членам мультиплетов теорий высших спинов ранга 2, аналогичным скалярным и спинорным полям в $4d$ -теориях высших спинов [14].

Расширим теперь уравнения (3.2) для $r = 2$ до более широкой системы

$$dX^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial X^{\alpha\beta}} C + dX^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^\alpha \partial y_1^\beta} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^\alpha \partial y_2^\beta} \right) C = 0, \quad (4.4)$$

$$dW^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial W^{\alpha\beta}} C + dW^{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^\alpha \partial y_1^\beta} - \frac{\partial^2}{\partial y_2^\alpha \partial y_2^\beta} \right) C = 0, \quad (4.5)$$

$$dZ^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial Z^{\alpha\beta}} C + 2dZ^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_1^\alpha \partial y_2^\beta} C = 0. \quad (4.6)$$

Это расширение совместно (т.е. соответствующая связность — плоская) и содержит исходную систему ранга 2 (3.2) как составную часть (4.4). С другой стороны, это не что иное, как система (2.16) для $r = 1$ с удвоенным числом дополнительных переменных $y^\Omega = (y_1^\alpha, y_2^\beta)$. Совместность системы (4.4)–(4.6) означает, что каждое решение уравнения (4.4) можно расширить в силу (4.5) и (4.6) до некоторого решения полной системы, так как уравнения (4.5), (4.6) просто восстанавливают зависимость от координат W и Z для данного значения $C(y_{1,2} | X, W, Z)|_{W=Z=0}$. Таким образом, система ранга 2 в $\mathcal{M}_M$ достроена до системы ранга 1 в $\mathcal{M}_{2M}$ так, что каждое решение исходной системы ранга 2 достраивается до решения системы ранга 1 в $\mathcal{M}_{2M}$, и наоборот.

Кроме всего прочего это означает, что существуют сохраняющиеся токи, построенные из исходных полей ранга 2 в $\mathcal{M}_M$, которые, будучи проинтегрированы по $2M$ -мерным поверхностям в $\mathcal{M}_{2M}$, образуют сохраняющиеся заряды. Выбирая поверхность интегрирования принадлежащей $\mathcal{M}_M$ (напомним, что размерность $\mathcal{M}_M$ равна $M(M+1)/2$), получим обобщенные тензоры энергии-импульса, построенные из полей ранга 2. Подставляя сохраняющиеся токи, построенные из билинейных форм от полей ранга 1 из $\mathcal{M}_M$, вместо полей ранга 2, получим сохраняющиеся заряды, имеющие четвертую степень по исходным полям ранга 1 в $\mathcal{M}_M$ и соответствующие подходящим замкнутым на массовой оболочке $2M$ -формам. То, что этот процесс может быть продолжен, означает, что существует цепочка дуальностей между различными теориями ранга 2^p , получаемая путем удвоения ранга при последовательных умножениях, аналогичных (4.3). Этот вывод согласуется с гипотезой [4] о существовании бесконечной цепочки дуальностей типа AdS/CFT-соответствия в теориях высших спинов⁵⁾. Нелинейные комбинации полей ранга 1 старших порядков должны соответствовать калибровочным полям старших рангов в $\mathcal{M}_M$.

5. РЕШЕНИЯ

Рассмотрим решения уравнений (3.15)–(3.20). Для $c(X) = c' \exp(ik_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta})$ из уравнений (3.15) следует, что

$$\varepsilon^{\alpha\beta\delta} k_{\gamma\alpha} k_{\nu\beta} k_{\mu\delta} = 0 \quad (5.1)$$

для любого полностью антисимметричного тензора $\varepsilon^{\alpha\beta\delta}$. Решением является любая матрица $k_{\alpha\beta}$ ранга $r \leq 2$. Действительно, любую симметричную матрицу $k_{\alpha\beta}$ можно привести к диагональному виду GL_M -преобразованиями. Из (5.1) следует, что произведения любых трех собственных значений $k_{\alpha\beta}$ равны нулю, т.е. ненулевыми могут быть не более чем два из них. Очевидно, что общее решение (5.1) можно представить в виде

$$k_{\alpha\beta} = a_{ij} \xi_\alpha^i \xi_\beta^j, \quad (5.2)$$

⁵⁾ Чтобы избежать недоразумений, поясним, что тип дуальностей, предположенных в работе [4] для бесконечной цепочки теорий, содержащих все безмассовые поля высших спинов, отличается от случая частично редуцированных моделей, ассоциированных с теорией $N = 4$ SYM, для которых бесконечная цепочка дуальностей не имеет места.

где ξ_α^i — два произвольных вектора и a_{ij} — некоторая симметрическая форма.

Поскольку каждое решение любой из систем уравнений (3.15)–(3.20) удовлетворяет системе (3.15), соответствующие гармонические решения имеют вид

$$c(X) = c'_{\dots}(\xi) \exp(ia_{ij}\xi_\alpha^i \xi_\beta^j X^{\alpha\beta}). \quad (5.3)$$

Точнее, из уравнений (3.16)–(3.20) получаем

$$\begin{aligned} c_{\gamma,\delta}(X) &= A'(\xi)(\xi_\delta^1 \xi_\gamma^2 - \xi_\gamma^1 \xi_\delta^2) \exp(ia_{ij}\xi_\alpha^i \xi_\beta^j X^{\alpha\beta}) \quad \forall A', \\ c_{\gamma_1 \dots \gamma_n}(X) &= A_{i_1 \dots i_n}(\xi) \xi_{\gamma_1}^{i_1} \dots \xi_{\gamma_n}^{i_n} \exp(ia_{ij}\xi_\alpha^i \xi_\beta^j X^{\alpha\beta}) \quad \forall n \geq 0, \\ \bar{c}_{\gamma_1 \dots \gamma_n}(X) &= A_{i_1 \dots i_n}(\xi) \xi_{\gamma_1}^{i_1} \dots \xi_{\gamma_n}^{i_n} \exp(ia_{ij}\xi_\alpha^i \xi_\beta^j X^{\alpha\beta}) \quad \forall n \geq 0, \end{aligned}$$

где $A_{i_1 \dots i_n}$ — произвольный бесследовый тензор по отношению к форме $a^{ij} = \varepsilon^{im} \varepsilon^{jk} a_{mk}$ ($\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$, $\varepsilon^{12} = 1$):

$$a^{ik} A_{ikj_3 \dots j_n} = 0. \quad (5.4)$$

Действительно, индексы $i, j, k, \dots$ принимают два значения, что позволяет заменить антисимметризацию сверткой с ε_{ij} , и тогда легко видеть, что условия $a_{ik} A_{j_1 j_2 \dots j_n} - a_{j_1 k} A_{ij_2 \dots j_n} - a_{ij_2} A_{j_1 k j_3 \dots j_n} + a_{j_1 j_2} A_{ik j_3 \dots j_n} = 0$, вытекающие из уравнения (3.20), эквивалентны (5.4).

Рассмотрим случай системы произвольного ранга. Как было показано в разделе 3, любое решение удовлетворяет скалярному уравнению (3.3). Это фиксирует спектральное условие ранга r для каждой гармоники в виде

$$\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{r+1}} k_{\gamma_1 \alpha_1} \dots k_{\gamma_{r+1} \alpha_{r+1}} = 0$$

для любого полностью антисимметричного тензора $\varepsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_{r+1}}$. Эти условия означают, что волновой “вектор” $k_{\alpha\beta}$ может иметь ранг не больше r , т.е. $k_{\alpha\beta}$ описывается той же самой формулой (5.2), в которой индексы i, j принимают r значений. Отметим, что эта формула имеет тот же вид, что и формула r преонного представления [19] для импульса в модели бран с частично нарушенными суперсимметриями в обобщенном пространстве-времени с координатами центральных зарядов. Таким образом, гармонические решения в моделях высших спинов, рассматривающиеся в данной работе, дают теоретико-полевою реализацию БПЗ-состояний с частичной суперсимметрией в теории высших спинов.

Общее решение уравнения (3.3) для скалярного поля можно представить в виде (5.3) с $i, j = 1 \dots r$. Линейным преобразованием из GL_M $\xi_\alpha^i \rightarrow A^i_j \xi_\alpha^j$ метрика a_{ij} может быть приведена к одной из канонических форм $a_{ij}^{(pq)}$:

$$a^{(pq)} = \begin{pmatrix} p & q \\ I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

при $p + q \leq r$ (предполагается, что лишние элементы a_{ij}^{pq} отсутствуют, если $p + q < r$). В результате

$$C(X) = \sum_{p+q=r} C^{(pq)}(X), \quad (5.5)$$

где

$$C^{(pq)}(X) = \int d^M \xi f^{(pq)}(\xi) \exp(ia_{ij}^{pq} \xi_\alpha^i \xi_\beta^j X^{\alpha\beta}). \quad (5.6)$$

Заметим, что вырожденные случаи при $p + q < r$, описываются той же самой формулой (5.6) с $p + q = r$ и с подходящей δ -функциональной мерой, включенной в $f^{(pq)}(\xi)$, которая зануляет компоненты ξ_α^i , являющиеся нуль-векторами матрицы a_{ij}^{pq} .

Аргумент в экспоненте в формуле (5.6) инвариантен относительно вращений $O(p, q)$, действующих на индексы i, j и оставляющих метрику a_{ij}^{pq} инвариантной. Это означает, что “фурье-компоненты” $f^{(pq)}(\xi_\alpha^i)$ определены на $R^{rM}/O(p, q)$. Заметим, что аналогичное явление имеет место в системе ранга 1 [17] с группой $O(1) = Z_2$ вместо $O(p, q)$. Новой чертой случая ранга $r > 1$ является существование некомпактных орбит $O(p, q)$ с $pq \neq 0$. В этом случае в выражение (5.6) требуется вставлять подходящую δ -функцию:

$$f^{(pq)}(\xi) = \delta(\chi(\xi)) \tilde{f}^{(pq)}(\xi), \quad (5.7)$$

где $\chi(\xi)$ – калибровочная функция, которая фиксирует выбор представителя орбиты $O(p, q)$.

Так же, как и для систем ранга 1 [17], решения $C^{(r0)}$ и $C^{(0r)}$ представляют собой положительно- и отрицательно-частотные моды, которые можно трактовать как операторы рождения и уничтожения. Решения типа $C^{(pq)}$ с $pq \neq 0$ не допускают разложения на положительно- и отрицательно-частотные части; это означает, что они не допускают последовательного квантования. Теоретико-групповой смысл разложения (5.5) вполне понятен. Для простоты рассмотрим случай ранга 2. Решения уравнений (3.15)–(3.20), изучаемые в этой работе, связаны с тензорным произведением решений уравнений, рассмотренных в работе [17]. Разобьем формально решение в сумму $b(X) = b^+(X) + b^-(X)$, где b^+ и b^- – взаимно сопряженные положительно- и отрицательно-частотные части. Квантово-механически $b^+(X)$ отождествляется с унитарным левым модулем U одночастичных квантовых состояний. Тогда $b^-(X)$ ассоциируется с сопряженным правым модулем $\bar{U}$. Таким образом, пространства решений $C^{(20)}$, $C^{(02)}$ и $C^{(11)}$ ассоциируются с $U \otimes U$, $\bar{U} \otimes \bar{U}$ и $U \otimes \bar{U}$, соответственно. Если бы мы рассматривали только квантовую картину, тензорное произведение пространств одночастичных квантовых состояний дало бы только $U \otimes U$ и ему сопряженное. Это указывает на то, что моды с $pq \neq 0$ должны быть несущественными. Действительно, покажем, что такие моды неустойчивы и их можно отбросить, если потребовать нормируемости решений с помощью подходящей нормы.

Из уравнений (4.4)–(4.6) следует, что каждое решение системы ранга 2 может быть расширено до решения некоторой системы ранга 1 в большем пространстве $\mathcal{M}_{2M}$. При этом, однако, не гарантируется, что осциллирующее решение системы в $\mathcal{M}_M$ перейдет в

осциллирующее решение расширенной системы в $\mathcal{M}_{2M}$. Продолжение гармонического решения системы ранга 2 в $\mathcal{M}_{2M}$ имеет вид

$$C^{(20)} = \int d^{2M} \xi f^{(20)}(\xi) \exp i((\xi_\alpha^1 \xi_\beta^1 + \xi_\alpha^2 \xi_\beta^2) X^{\alpha\beta} + (\xi_\alpha^1 \xi_\beta^1 - \xi_\alpha^2 \xi_\beta^2) W^{\alpha\beta} + 2\xi_\alpha^1 \xi_\beta^2 Z^{\alpha\beta}), \quad (5.8)$$

$$C^{(11)} = \int d^{2M} \xi f^{(11)}(\xi) \exp i((\xi_\alpha^1 \xi_\beta^1 - \xi_\alpha^2 \xi_\beta^2) X^{\alpha\beta} + (\xi_\alpha^1 \xi_\beta^1 + \xi_\alpha^2 \xi_\beta^2) W^{\alpha\beta} + 2i\xi_\alpha^1 \xi_\beta^2 Z^{\alpha\beta}), \quad (5.9)$$

$$C^{(02)} = \int d^{2M} \xi f^{(02)}(\xi) \exp i((-\xi_\alpha^1 \xi_\beta^1 - \xi_\alpha^2 \xi_\beta^2) X^{\alpha\beta} - (\xi_\alpha^1 \xi_\beta^1 - \xi_\alpha^2 \xi_\beta^2) W^{\alpha\beta} - 2\xi_\alpha^1 \xi_\beta^2 Z^{\alpha\beta}). \quad (5.10)$$

Видно, что продолжения решений $C^{(20)}$ и $C^{(02)}$ остались осциллирующими в расширенном пространстве $\mathcal{M}_{2M}$, а продолжения $C^{(11)}$ растут экспоненциально вдоль некоторых направлений в расширенном пространстве, т.е. неустойчивы. Как показано в работе [20], на пространстве решений уравнений ранга 1 (2.16) существует инвариантная форма $B(C, C)$, определенная в терминах сохраняющихся зарядов (4.1) как $B(C, C) = Q(\eta)|_{\eta=1}$. Это интеграл по произвольной пространственноподобной M -мерной поверхности E в $\mathcal{M}_M$, не зависящий от локальных вариаций E , если C удовлетворяет полевым уравнениям⁶⁾. Используя эту конструкцию для решения в $\mathcal{M}_{2M}$, полученного из решения ранга 2 в $\mathcal{M}_M$ в соответствии с (5.8)–(5.10), можно построить инвариантную форму на решениях ранга 2. Выбирая поверхность интегрирования в $\mathcal{M}_{2M}$ так, чтобы ей принадлежало некоторое направление, вдоль которого решение растет, получим, что норма такого решения бесконечна. Для полноты остается доказать, что такую поверхность интегрирования можно получить непрерывной деформацией данной. Однако более простое доказательство состоит в использовании представления Фурье для нормы в $\mathcal{M}_{2M}$, которое, как было показано в работе [20], имеет форму $B(C, C) = \int d^{2M} \xi f(\xi) f(\xi)$. Подставляя сюда (5.7), получим, что δ -функция дает квадрат бесконечного фактора $\delta(0)$, возникшего из-за некомпактности орбит $O(p, q)$. Этот фактор конечен только в случае компактных орбит $O(r, 0)$ и $O(0, r)$, ассоциированных с положительно- и отрицательно-частотными решениями, допускающими совместное квантование. Таким образом, моды $C^{(pq)}$ с $pq \neq 0$ исключаются как существенно ненормируемые. Заметим, что по аналогичной причине исключаются экспоненциально растущие моды с мнимыми $k_{\alpha\beta}$ в случае ранга 1, формально являющиеся допустимыми решениями полевых уравнений.

Нормируемые решения соответствуют только полностью положительным или полностью отрицательным модам, которые, аналогично анализу [17], должны быть ассоциированы с пространствами одночастичных квантовых состояний и им сопряженными в результате процедуры квантования. Фактически $B(C^{(0r)}, C^{(r0)})$ – обычная норма в пространстве Фока для этих квантовых состояний [17]. Таким образом, сектор нормируемых систем ранга 2 в $\mathcal{M}_M$ эквивалентен нормируемым системам в $\mathcal{M}_{2M}$.

⁶⁾ Напомним, что начальные данные задачи в пространстве $\mathcal{M}_M$ для уравнений (1.1) и (1.2) заданы на M -мерном “локальном расслоении Коши” [17], так как решения параметризованы функциями от M переменных ξ_α .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены новые $Sp(2M)$ -инвариантные уравнения движения, описывающие распространение в $M(M+1)/2$ -мерном пространстве-времени $\mathcal{M}_M$ с матричными координатами $X^{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, M$). Идея вывода этих уравнений основана на “развернутой формулировке” динамических уравнений в форме уравнений ковариантного постоянства полей, принимающих значения в некотором модуле V рассматриваемой алгебры симметрий g . В работах [4], [17] этот метод применялся для фокковского модуля $V = F$ осцилляторного представления $sp(2M)$. Показано, что получившиеся уравнения (1.1) и (1.2) описывают материю, локализованную на M -мерных локальных расслоениях Коши в $\mathcal{M}_M$, являющихся некоторыми предельными M -мерными поверхностями. Уравнения, выведенные в данной работе, получены для $V = F \otimes F$ и, в более общем смысле, для $\underbrace{F \otimes \dots \otimes F}_r$.

Показано, что список различных типов независимых полей, описываемых предложенными уравнениями, находится во взаимно однозначном соответствии со структурой разложения тензорного произведения унитарных $sp(2M)$ -модулей Фока U . Этот факт согласуется с двойственностью типа преобразования Боголюбова [4], [26] между унитарными модулями, описывающими пространство квантовых состояний, и неунитарными ковариантными модулями, появляющимися в развернутой формулировке классических полевых уравнений.

Пространство решений параметризовано функциями от rM переменных. Поэтому локальные расслоения Коши E в $\mathcal{M}_M$, связанные с полученными полевыми уравнениями, имеют размерность rM . Отметим, что согласно сделанным в работе [17] выводам размерность пространства σ , в котором возможна реальная локализация наблюдаемых и которое идентифицируется с базой локального расслоения Коши E , обычно меньше размерности E . Например, для низших значений $M = 2, 4, 8$ расслоения Коши E ранга 1 имеют структуру $E = \sigma \times S$ с базовыми многообразиями (локальной поверхности Коши E) $\sigma = R^2, R^3, R^5$ в качестве физических пространств и компактными многообразиями $S = Z_2, S^1, SU(2)$, соответственно. Это отвечает 3-, 4- и 6-мерному пространству-времени Минковского. Слои Z_2, S^1 и $SU(2)$ образуют некоторые спиновые степени свободы. В частности, в случае $M = 2$ модам Z_2 отвечают 3d-безмассовые скаляр и спинор. В случае $M = 4$ моды S^1 порождают бесконечную башню спинов в 4-мерном пространстве-времени Минковского [17]. Один из выводов данной работы состоит в том, что различные локальные уравнения в одном и том же пространстве $\mathcal{M}_M$ могут порождать различные его визуализации на подпространствах разных размерностей. Более того, показано, что пространство-время $\mathcal{M}_M$, которое визуализируется посредством системы уравнений ранга 2, физически неотличимо от пространства-времени $\mathcal{M}_{2M}$, визуализированного посредством систем ранга 1. Отсюда следует, что, возможно, достаточно изучать только системы ранга 1 в $\mathcal{M}_M$ с различными M .

Показано, что большинство из полученных уравнений движения ранга 2 имеют вид условий сохранения, которые [20] порождают сохраняющиеся заряды, определенные

как интегралы по M -мерным поверхностям в $\mathcal{M}_M$. Этот результат позволяет предположить существование обобщенного AdS/CFT-соответствия между полями в моделях ранга 2 и токами в моделях ранга 1. Цепочка соответствий может быть продолжена на все модели ранга 2^p таким образом, что поля в модели ранга 2^p соответствуют билинейным токам в модели ранга 2^{p-1} , токам четвертого порядка в модели ранга 2^{p-2} и т.д. Этот результат является аргументом в пользу предположения [4] о том, что полная модель высших спинов может представлять собой бесконечную цепочку AdS/CFT-дуальностей. Наиболее естественными представляются две возможности. Первая состоит в том, что фундаментальной теорией может служить теория с $M = 2$, являющаяся обычной $3d$ -конформной теорией, или даже с $M = 1$ ⁷⁾. Другая возможность состоит в том, что $M = \infty$. Обычная модель, например, $4d$ -теории высших спинов, может быть результатом подходящего нарушения $sp(\infty)$ до, скажем, $sp(8)$. Случай $sp(\infty)$ с большой вероятностью может быть связан с формулировкой теории суперструн на языке теории высших спинов. Может оказаться, однако, что эти две на первый взгляд противоположные возможности в самом деле неразличимы, так как связаны цепочкой дуальностей.

Полученные результаты приводят к новому динамическому механизму реализации бран различных размерностей, живущих в одном и том же обобщенном пространстве-времени $\mathcal{M}_M$. Уравнения, предложенные в данной работе, дают теоретико-полевую реализацию преонной конструкции для БПЗ-состояний, предложенной в работах [19]. Ожидается, что в нелинейном обобщении этой модели поля, ассоциированные с бранами различных размерностей, будут взаимодействовать. Можно надеяться, что развитый подход приведет в конечном счете к микроскопической теории бран.

ПРИЛОЖЕНИЕ

σ_- -КОГОМОЛОГИИ

Напомним сначала некоторые элементарные факты когомологического анализа. Пусть линейный оператор Ω действует в линейном пространстве V и удовлетворяет условию $\Omega^2 = 0$. По определению $H(\Omega) = \ker \Omega / \text{Im } \Omega$ – пространство когомологий. Пусть Ω^* – некоторый другой нильпотентный оператор, $(\Omega^*)^2 = 0$. Тогда оператор

$$\Delta = \{\Omega, \Omega^*\} \quad (\text{П.1})$$

удовлетворяет условию

$$[\Omega, \Delta] = [\Omega^*, \Delta] = 0. \quad (\text{П.2})$$

Из (П.1) следует, что $\Delta \ker \Omega \subset \text{Im } \Omega$. Таким образом, $H(\Omega) \subset \ker \Omega / \Delta(\ker \Omega)$. Предположим теперь, что V – гильбертово пространство, в котором Ω^* и Ω являются сопряженными и оператор Δ квазиконечномерен, т.е. $V = \sum \oplus V_\alpha$, где V_α – такие конечномерные подпространства, что $\Delta(V_\alpha) \subset V_\alpha$ и V_α ортогонально V_β для всех $\alpha \neq \beta$. Тогда

⁷⁾Этот случай сильно вырожден. Можно предположить, что он связан с конформными блоками $2d$ -конформной теории. Хотя в этом случае нет динамических уравнений для динамических полей, все основные соображения данной работы остаются формально применимыми.

Δ может быть диагонализирован, и легко видеть, что $\ker \Omega / \Delta(\ker \Omega) = \ker \Delta \cap \ker \Omega$. Следовательно,

$$H(\Omega) \subset \ker \Delta \cap \ker \Omega. \quad (\text{П.3})$$

Эта формула полезна для практического анализа, так как обычно легче найти $\ker \Delta$, чем непосредственно группу когомологий $H(\Omega)$.

Обозначим $dX^{\mu\nu}$ через $\xi^{\mu\nu}$. Тогда $\xi^{\mu\nu} = \xi^{\nu\mu}$, $\xi^{\mu\nu}\xi^{\alpha\gamma} = -\xi^{\alpha\gamma}\xi^{\mu\nu}$ и

$$\frac{d}{d\xi^{\alpha\gamma}}\xi^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu\delta_\gamma^\nu + \delta_\alpha^\nu\delta_\gamma^\mu) - \xi^{\mu\nu}\frac{d}{d\xi^{\alpha\gamma}}.$$

Пусть V_1 и V_2 – линейные пространства, натянутые на различные полиномы $P(z, \xi)$ и $P(z, \bar{z}, \xi)$, соответственно. Обозначим операторы σ_- рангов 1 и 2, действующие в V_1 и V_2 , через Ω_1 и Ω_2 , соответственно (для удобства мы изменили обозначения, заменив y^α на z^α в задаче ранга 1). Определив двойственные операторы $\Omega_{1,2}^*$ с помощью естественного фокковского скалярного произведения в $V_{1,2}$, получаем

$$\Omega_1 = \xi^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \frac{\partial}{\partial z^\gamma}, \quad \Omega_1^* = z^\alpha z^\gamma \frac{d}{d\xi^{\alpha\gamma}}$$

и

$$\Omega_2 = 2\xi^{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\gamma}, \quad \Omega_2^* = 2z^\alpha \bar{z}^\gamma \frac{d}{d\xi^{\alpha\gamma}}.$$

Тогда

$$\Delta_1 = 2\xi^{\mu\nu} \frac{d}{d\xi^{\mu\nu}} + 4\xi^{\mu\alpha} \frac{d}{d\xi^{\mu\beta}} z^\beta \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + z^\beta z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \frac{\partial}{\partial z^\beta}, \quad (\text{П.4})$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = & 4\xi^{\mu\nu} \frac{d}{d\xi^{\mu\nu}} + 4\xi^{\mu\alpha} \frac{d}{d\xi^{\mu\beta}} \left(z^\beta \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \bar{z}^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \right) + \\ & + 2z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \bar{z}^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} + 2z^\beta \bar{z}^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Пусть $V_i = \sum_p \oplus V_i^p$, где $V_i^p \subset V_i$ – подпространство однородных полиномов от ξ степени p , т.е. $\{P(z, \dots, \xi) \in V_i^p : P(z, \dots, \mu\xi) = \mu^p P(z, \dots, \xi)\}$. Группа когомологий $H^p(\sigma_-)$ для оператора σ_- ранга r принадлежит $\ker \Delta_r \cap V_r^p$.

Введем вспомогательные пространства W_1 и W_2 полиномов $P(z, t)$ и $P(z, \bar{z}, t)$, соответственно, где t^α – вспомогательная коммутирующая переменная. Пусть $W_i = \sum_p \oplus W_i^p$, $\{P \in W_i^p : P(z, \dots, \mu t) = \mu^p P(z, \dots, t)\}$. В интересующих нас случаях $p = 0$ или 1 (связанных с группами когомологий H_r^0 и H_r^1) имеет место очевидный изоморфизм $V_i^0 = W_i^0$ и $V_i^1 = W_i^2$. На практике это позволяет заменить $\xi^{\alpha\beta}$ на $t^\alpha t^\beta$ и $d/d\xi^{\alpha\beta}$ на $(\partial/\partial t^\alpha)(\partial/\partial t^\beta)/2$ (для полиномов степени 0 или 1 по ξ не имеет значения

то, что ξ – антикоммутирующие переменные). В этих переменных операторы $\Delta_{1,2}$ принимают вид

$$\Delta_1 = \left(t^\mu \frac{\partial}{\partial t^\mu} - 1 \right) \left(2t^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} z^\beta \frac{\partial}{\partial t^\beta} - t^\beta \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) + \left(z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - 1 \right) z^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta}, \quad (\text{П.6})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_2 = & \left(t^\mu \frac{\partial}{\partial t^\mu} - 1 \right) \left(t^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} z^\beta \frac{\partial}{\partial t^\beta} + t^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} \bar{z}^\beta \frac{\partial}{\partial t^\beta} - t^\beta \frac{\partial}{\partial t^\beta} \right) + \\ & + \bar{z}^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} z^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta} + \left(z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - 1 \right) \bar{z}^\beta \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\beta}. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Ранг 1. Операторы

$$e_1 = t^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma}, \quad f_1 = z^\gamma \frac{\partial}{\partial t^\gamma}, \quad h_1 = t^\gamma \frac{\partial}{\partial t^\gamma} - z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} \quad (\text{П.8})$$

образуют алгебру Ли sl_2 . Оператор

$$n_1 = t^\gamma \frac{\partial}{\partial t^\gamma} + z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} \quad (\text{П.9})$$

расширяет ее до gl_2 , действующей в W_1 . Так как действие gl_2 , в W_1 не меняет степени полиномов, W_1 раскладывается в прямую сумму бесконечного числа конечномерных gl_2 -подмодулей. Неприводимые конечномерные подмодули характеризуются своими sl_2 -младшими (эквивалентно, старшими) весами и собственными значениями центрального элемента gl_2 (П.9). Покажем, что оператор Δ_1 диагонален в таком весовом базисе.

Действительно, пусть $p \in W_1$ – младший вектор с фиксированным весом и собственным значением центрального элемента gl_2 (П.9), т.е.

$$f_1 p = 0, \quad h_1 p = \mu p, \quad n_1 p = \nu p. \quad (\text{П.10})$$

Из (П.8), (П.9) следует, что p имеет вид

$$p_{(q,r)} = c_{\alpha_1 \dots \alpha_q, \beta_1 \dots \beta_r} z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_q} t^{\beta_1} \dots t^{\beta_r}, \quad \mu = r - q, \quad \nu = r + q, \quad (\text{П.11})$$

где $c_{\alpha_1 \dots \alpha_q, \beta_1 \dots \beta_r}$ – некоторый тензор со свойствами симметрии диаграммы Юнга . В результате каждый полином $P(z, t)$ есть линейная комбинация полиномов

$$P_{(qr)}^{(b)}(z, t) = (e_1)^b p_{(qr)}(z, t)$$

с различными b, q и r . Учитывая равенство $[f_1, (e_1)^b] = (e_1)^{b-1} b(-h_1 - b + 1)$, получаем

$$\Delta_1 P_{(qr)}^{(b)} = (2e_1 f_1 - (n_1 - 1)h_1)(e_1)^b p_{(qr)} = \lambda_1 P_{(qr)}^{(b)}, \quad (\text{П.12})$$

где

$$\lambda_1 = (2(q - b - r + 1)b + (q - b)(q - b - 1) - (b + r)(b + r - 1)). \quad (\text{П.13})$$

Заметим, что мы рассматриваем конечномерные представления, поэтому полиномы $P_{(qr)}^{(b)}$, у которых $b > q - r$, отсутствуют, т.е. справедливо неравенство

$$q - b - r \geq 0. \quad (\text{П.14})$$

Степень $P_{(qr)}^{(b)}(z, t)$ по t равна $r + b$. В результате $r + b = 0$ и $r + b = 2$ в подпространствах W_1^0 и W_1^2 (соответствующих группам когомологий первого ранга $H^0(\sigma_-)$ и $H^1(\sigma_-)$), соответственно.

Группа H^0 . Рассмотрим полиномы $P_{(qr)}^{(b)}$, соответствующие 0-формам ранга 1. В этом случае $b = r = 0$. Из (П.13) и из уравнения $\lambda_1 = 0$ следует, что $q(q - 1) = 0$. Таким образом, группа когомологий $H^0(\Omega_1)$ ранга 1 натянута на

$$c, \quad c_\alpha z^\alpha.$$

Группа H^1 . Рассмотрим полиномы $P_{(qr)}^{(b)}$, соответствующие 1-формам ранга 1. В этом случае $b + r = 2$. Используя (П.13), можно заключить, что из уравнения $\lambda_1 = 0$ следует

$$2(q - 1)b + (q - b)(q - b - 1) - 2 = 0.$$

Из (П.14) следует, что $q \geq 2$.

I. Пусть $b > 0$. Тогда $2(q - 1)b \geq 2$. В результате единственное допустимое решение $q = 2, b = 1$.

II. Пусть $b = 0$. Единственное допустимое решение $q = 2$.

Легко видеть, что $P_{(2,1)}^{(1)}$ и $P_{(2,2)}^{(0)}$ Ω_1 -замкнуты. Поскольку точные формы симметричны по всем переменным, полученные решения принадлежат нетривиальным классам когомологий. Таким образом, группа когомологий $H^1(\Omega_1)$ ранга 1 натянута на

$$c_{\alpha\beta_1, \beta_2} z^\alpha \xi^{\beta_1 \beta_2}, \quad c_{\alpha_1 \alpha_2, \beta_1 \beta_2} z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} \xi^{\beta_1 \beta_2}.$$

Ранг 2. Случай ранга 2 будем изучать в терминах алгебры gl_3 , порождаемой операторами

$$\begin{aligned} e_1 &= t^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma}, & f_1 &= z^\gamma \frac{\partial}{\partial t^\gamma}, & e_2 &= z^\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\gamma}, & f_2 &= \bar{z}^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma}, \\ h_1 &= t^\gamma \frac{\partial}{\partial t^\gamma} - z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma}, & h_2 &= z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} - \bar{z}^\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\gamma}, \\ n_2 &= t^\gamma \frac{\partial}{\partial t^\gamma} + z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} + \bar{z}^\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\gamma}. \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

Снова W_2 разлагается в прямую сумму бесконечного числа конечномерных gl_3 -подмодулей. Пусть $p \in W_2$ — младший вектор с фиксированным весом и собственным значением центрального элемента n_2 , т.е.

$$f_1 p = 0, \quad f_2 p = 0, \quad h_1 p = \mu_1 p, \quad h_2 p = \mu_2 p, \quad n_2 p = \nu p. \quad (\text{П.16})$$

Из (П.15) следует, что p имеет вид

$$P(s, q, r) = c_{\gamma_1 \dots \gamma_s, \alpha_1 \dots \alpha_q, \beta_1 \dots \beta_r} \bar{z}^{\gamma_1} \dots \bar{z}^{\gamma_s} z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_q} t^{\beta_1} \dots t^{\beta_r}, \quad (\text{П.17})$$

$$\mu_1 = q - s, \quad \mu_2 = r - q, \quad \nu = r + q + s,$$

где $c_{\gamma_1 \dots \gamma_s, \alpha_1 \dots \alpha_q, \beta_1 \dots \beta_r}$ — некоторый тензор со свойствами симметрии диаграммы Юнга

q . В результате каждый полином $P(z, \bar{z}, t)$ есть линейная комбинация полиномов вида

$$P_{(sqr)}^{(bak)} = (e_1)^b ([e_1, e_2])^a (e_2)^k p_{(sqr)}$$

с различными b, a, k . Элементарные вычисления приводят к

$$\frac{1}{2} \Delta_2 P_{(sqr)}^{(bak)} = \lambda_2 P_{(sqr)}^{(bak)}, \quad (\text{П.18})$$

где

$$\lambda_2 = (q + k - a - r)b - b(b - 1) + (s - k - r)a + k(s - k - q + 1) +$$

$$+ a(2 - a) + (s - k - a - 1)(q + k - b) - (a + b + r)(a + b + r - 1). \quad (\text{П.19})$$

Мы рассматриваем конечномерные представления sl_3 , поэтому справедливы следующие неравенства:

$$s - k - a \geq 0, \quad (\text{П.20})$$

$$q + k - b \geq 0, \quad (\text{П.21})$$

$$q \geq r, \quad (\text{П.22})$$

$$s - k - q \geq 0. \quad (\text{П.23})$$

Неравенства (П.20), (П.21) означают, что степени z и $\bar{z}$ неотрицательны. Неравенство (П.22) следует из свойств диаграмм Юнга. Неравенство (П.23) понимается аналогично, учитывая явную форму e_2 в (П.15).

Группа H^0 . Рассмотрим полиномы $P_{(sqr)}^{(bak)}$, соответствующие 0-формам ранга 2. Используя (П.19) и то, что $a = b = r = 0$ в случае 0-форм, приведем уравнение $\lambda_2 = 0$ к виду

$$k(s - k - q + 1) + (s - k - 1)(q + k) = 0. \quad (\text{П.24})$$

Из (П.23) вытекает $(s - q - k + 1) > 0$, или, что то же самое, $s - k - 1 \geq q - 1$.

I. Пусть $s - k = 0$. Тогда $-kq - q = 0$ и, следовательно, $q = 0$.

II. Пусть $(s - k - 1) \geq 0$. Тогда из (П.24) следует, что $(k + q)(s - k - 1) = 0$ и $k(s - q - k + 1) = 0$. Следовательно, $k = 0$ и $q(s - 1) = 0$.

В результате (П.24) имеет 3 решения: $\{s = k \geq 0, q = 0\}$; $\{k = q = 0, s \geq 0\}$; $\{k = 0, q = s = 1\}$. Можно проверить, что 0-формы $P_{(s,0,0)}^{(0,0,s)}$, $P_{(s,0,0)}^{(0,0,0)}$ и $P_{(1,1,0)}^{(0,0,0)}$ Ω_2 -замкнуты, т.е. группа когомологий $H^0(\Omega_2)$ ранга 1 параметризуется следующими 0-формами:

$$c, \quad c_{\alpha, \beta} z^\alpha \bar{z}^\beta, \quad c_{\alpha_1 \dots \alpha_n} z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_n}, \quad \bar{c}_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \bar{z}^{\alpha_1} \dots \bar{z}^{\alpha_n}, \quad n > 0.$$

Группа H^1 . Рассмотрим полиномы $P_{(sqr)}^{(bak)}$, соответствующие 1-формам ранга 2. Используя (П.19), приведем уравнение $\lambda_2 = 0$ к виду

$$(q+k)(b-1) + (s-k+b)a + k(s-k-q+1) + (s-k-a)(q+k-b) = 2. \quad (\text{П.25})$$

Требуется решить (П.25) в неотрицательных целых числах, удовлетворяющих условиям (П.20)–(П.23) и неравенствам

$$a+b \leq 2, \quad (\text{П.26})$$

$$s \geq 2, \quad (\text{П.27})$$

справедливым для рассматриваемого случая 1-форм. (Поясним, что, поскольку 1-формам соответствуют билинейные по t^α полиномы, то первые строки соответствующих диаграмм Юнга содержат не менее двух клеток, что и выражается условием (П.27).)

Из (П.26) следует, что возможны следующие 6 вариантов: $\{a=0, b=0\}$, $\{a=1, b=1\}$, $\{a=0, b=1\}$, $\{a=0, b=2\}$, $\{a=1, b=0\}$ и $\{a=2, b=0\}$. Заметим, что можно ограничиться рассмотрением четырех из них, так как замена $z \leftrightarrow \bar{z}$ эквивалентна замене $a \leftrightarrow b$.

I. Пусть $a=b=0$. Тогда (П.25) имеет вид

$$k(s-k-q+1) + (s-k-1)(q+k) = 2. \quad (\text{П.28})$$

Из (П.22), (П.23) следует, что $s-k \geq q \geq 2$ и, следовательно, из (П.28) вытекает $q=2$, $s=2$, $k=0$.

II. Пусть $b=1$, $a=1$. Тогда (П.25) имеет вид

$$k(s-k-q+1) + (s-k-1)(q+k) = 0. \quad (\text{П.29})$$

Из (П.20) и (П.23) вытекает, что $k(s-k-q+1) \geq 0$ и $(s-k-1)(q+k) \geq 0$. Следовательно, (П.29) означает, что выполнены 2 равенства $k(s-k-q+1) = 0$ и $(s-k-1)(q+k) = 0$. Из первого следует, что $k=0$. Тогда из (П.21), (П.27) следует, что второе не имеет допустимых решений.

III. Пусть $b=1$, $a=0$. Тогда (П.25) имеет вид

$$k(s-k-q+1) + (s-k)(q+k-1) = 2. \quad (\text{П.30})$$

Так как $a+b+r=2$, то $r=1$. Из (П.22) следует, что $q \geq 1$. Из (П.23) мы имеем $s-k \geq q \geq 1$. Поэтому оба слагаемых в левой части (П.30) неотрицательны, т.е. возможны только 3 варианта:

1) $k(s-k-q+1) = 0$, $(s-k)(q+k-1) = 2$; единственное допустимое решение $k=0$, $s=2$, $q=2$;

2) $k(s-k-q+1) = 1$, $(s-k)(q+k-1) = 1$; единственное допустимое решение $k=1$, $s=2$, $q=1$;

3) $k(s - k - q + 1) = 2$, $(s - k)(q + k - 1) = 0$; легко видеть, что эти уравнения не имеют допустимых решений;

IV. Пусть $b = 2$, $a = 0$. Тогда (П.25) имеет вид

$$(q + k) + k(s - k - q + 1) + (s - k)(q + k - 2) = 2. \quad (\text{П.31})$$

Учитывая (П.21), получим $q + k = 2$, $k(s - k - q + 1) = 0$. Учитывая (П.23), получим $k = 0$, $q = 2$ для всех s .

Не рассматривая оставшиеся 2 случая $\{a = 1, b = 0\}$ и $\{a = 2, b = 0\}$, мы просто добавим сопряженные формы, получающиеся заменой $z \leftrightarrow \bar{z}$, и получим полный список Δ_2 -нулевых мод. Нетрудно проверить, что получившиеся формы Ω_2 -замкнуты, но не точны. Таким образом, группа когомологий $H^1(\Omega_2)$ натягивается на

$$\begin{aligned} c_{\gamma_1\gamma_2,\alpha,\beta} z^\alpha \bar{z}^\beta \xi^{\gamma_1\gamma_2}, \quad c_{\gamma_1\gamma_2,\beta_1\beta_2,\alpha} z^\alpha \bar{z}^{\beta_1} \bar{z}^{\beta_2} \xi^{\gamma_1\gamma_2}, \\ c_{\gamma_1\gamma_2,\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2} z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} \bar{z}^{\beta_1} \bar{z}^{\beta_2} \xi^{\gamma_1\gamma_2}, \quad c_{\gamma_1\gamma_2,\alpha_1\alpha_2,\beta} z^{\alpha_1} z^{\alpha_2} \bar{z}^\beta \xi^{\gamma_1\gamma_2}, \\ c_{\alpha_1\dots\alpha_n,\gamma_1\gamma_2} z^{\alpha_1} \dots z^{\alpha_n} \xi^{\gamma_1\gamma_2}, \quad \bar{c}_{\alpha_1\dots\alpha_n,\gamma_1\gamma_2} \bar{z}^{\alpha_1} \dots \bar{z}^{\alpha_n} \xi^{\gamma_1\gamma_2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Благодарности. Исследования были частично поддержаны INTAS (грант № 00-1-254) и РФФИ (гранты № 02-02-17067 и № 01-02-30024).

Список литературы

- [1] *C. Fronsdal*. Massless particles, ortosymplectic symmetry and another type of Kaluza–Klein theory. In: *Essays on Supersymmetry*. Mathematical Physics Studies. V. 8. Ed. C. Fronsdal. Dordrecht: Reidel, 1986. P. 164.
- [2] *I. Bandos, J. Lukierski*. *Mod. Phys. Lett. A*. 1999. V. 14. P. 1257; hep-th/9811022.
- [3] *I. Bandos, J. Lukierski, D. Sorokin*. *Phys. Rev. D*. 2000. V. 61. P. 045002; hep-th/9904109.
- [4] *M. A. Vasiliev*. *Phys. Rev. D*. 2002. V. 66. P. 066006; hep-th/0106149.
- [5] *J. Maldacena*. *Adv. Theor. Math. Phys.* 1998. V. 2. P. 231; hep-th/9711200.
- [6] *S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov*. *Phys. Lett. B*. 1998. V. 428. P. 105; hep-th/9802109.
- [7] *E. Witten*. *Adv. Theor. Math. Phys.* 1998. V. 2. P. 253; hep-th/9802150.
- [8] *B. Sundborg*. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* 2001. V. 102. P. 113; hep-th/0103247.
- [9] *E. Witten*. Spacetime reconstruction. Talk at JHS-60. Calif. Inst. of Technology, November 3–4, 2001; <http://theory.caltech.edu/jhs60/witten/1.html>.
- [10] *E. Sezgin, P. Sundell*. *Nucl. Phys. B*. 2002. V. 644. P. 303; Erratum. 2003. V. 660. P. 403; hep-th/0205131.
- [11] *I. R. Klebanov, A. M. Polyakov*. *Phys. Lett. B*. 2002. V. 550. P. 213; hep-th/0210114.
- [12] *M. A. Vasiliev*. *Mod. Phys. Lett. A*. 1992. V. 7. P. 3689; *S. F. Prokushkin, M. A. Vasiliev*. *Nucl. Phys. B*. 1999. V. 545. P. 385; hep-th/9806236.
- [13] *M. A. Vasiliev*. *Phys. Lett. B*. 1990. V. 243. P. 378; *Class. Q. Grav.* 1991. V. 8. P. 1387; *Phys. Lett. B*. 1992. V. 285. P. 225.
- [14] *M. A. Vasiliev*. Higher spin gauge theories: star-product and AdS space. In: *The Many Faces of the Superworld: Yuri Golfand Memorial Volume*. Ed. M. Shifman. Singapore: World Scientific, 2000. P. 533; hep-th/9910096.

- [15] *M. A. Vasiliev*. Nucl. Phys. B. 2001. V. 616. P. 106; Erratum. 2003. V. 652. P. 407; hep-th/0106200; *K. B. Alkalaev, M. A. Vasiliev*. Nucl. Phys. B. 2003. V. 655; hep-th/0206068.
- [16] *M. A. Vasiliev*. Phys. Lett. B. 2003. V. 567. P. 139; hep-th/0304049.
- [17] *M. A. Vasiliev*. Relativity, causality, locality, quantization and duality in the $Sp(2M)$ invariant generalized space-time. In: "Multiple Facets of Quantization and Supersymmetry": Michael Marinov Memorial Volume. Eds. M. Olshanetsky, A. Vainshtein. Singapore: World Scientific, 2002. P. 826; hep-th/0111119.
- [18] *P. K. Townsend*. p -Brane democracy. hep-th/9507048; M -theory from its superalgebra. hep-th/9712004.
- [19] *I. A. Bandos, J. A. de Azcárraga, J. M. Izquierdo, J. Lukierski*. Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 4451; hep-th/0101113; *I. A. Bandos*. Phys. Lett. B. 2003. V. 558. P. 197; hep-th/0208110.
- [20] *М. А. Васильев*. Изв. вузов. Физика. 2002. Т. 45. № 7. С. 23; hep-th/0204167.
- [21] *M. A. Vasiliev*. Ann. Phys. 1989. V. 190. P. 59.
- [22] *M. A. Vasiliev*. Higher spin theory and $Sp(2M)$ invariant space-time. In: Proc. of the 3rd International Sakharov Conference in Physics (Moscow, Russia, June 24–29, 2002). V. 2. Eds. A. Semikhatov, M. Vasiliev, V. Zaikin. Moscow: Scientific World, 2003. P. 605; hep-th/0301235.
- [23] *М. А. Васильев, О. В. Шейнкман*. ТМФ. 2000. Т. 123. С. 323; hep-th/0003123.
- [24] *G. Mack, A. Salam*. Ann. Phys. 1969. V. 53. P. 174.
- [25] *E. S. Fradkin, V. Ya. Linetsky*. Ann. Phys. 1990. V. 198. P. 252; 293.
- [26] *М. А. Васильев, О. В. Шейнкман*. ТМФ. 2001. Т. 128. С. 378; hep-th/0103208.
- [27] *I. Bars, M. Günaydin*. Commun. Math. Phys. 1983. V. 91. P. 31.
- [28] *M. Günaydin, S. J. Hyun*. J. Math. Phys. 1988. V. 29. P. 2367.
- [29] *M. Günaydin*. ADS/CFT dualities and the unitary representations of non-compact groups and supergroups: Wigner versus Dirac. hep-th/0005168.
- [30] *A. Mikhailov*. Notes On Higher Spin Symmetries. hep-th/0201019.
- [31] *D. Anselmi*. Class. Q. Grav. 2000. V. 17. P. 1383; hep-th/9906167.
- [32] *S. E. Konstein, M. A. Vasiliev, V. N. Zaikin*. JHEP. 2000. V. 0012. P. 018; hep-th/0010239.

Поступила в редакцию 31.I.2005 г.