Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Иванов, А. О. Сутулин, Различные типы $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в $N = (2, 2)$ суперпространстве, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 1, 66–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1881>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:07:17

© 2005 г.

Е. А. Иванов*, А. О. Сутулин*

РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ $N = (4, 4)$ МУЛЬТИПЛЕТОВ С ТВИСТОМ В $N = (2, 2)$ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Дано описание четырех различных типов $N = (4, 4)$ супермультиплетов с твистом в двумерном $N = (2, 2)$ суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$. Рассмотренные мультиплеты представляются парой суперполей – кирального суперполя и кирального суперполя с твистом – и отличаются законами преобразований относительно дополнительной скрытой $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Для каждого типа $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом рассмотрены сигма-модельные $N = (2, 2)$ суперполевые лагранжианы, которые суть действительные функции, подчиненные дифференциальным связям, следующим из неявной $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Показано, что общее сигма-модельное действие, включающее различные $N = (4, 4)$ мультиплеты с твистом и инвариантное относительно $N = (4, 4)$ суперсимметрии, распадается в сумму сигма-модельных действий для отдельных мультиплетов. Показано, что только мультиплеты, принадлежащие самодуальной паре, могут взаимодействовать через смешанные массовые члены.

Ключевые слова: суперсимметричные сигма-модели, супермультиплеты с твистом, гармоническое суперпространство.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важный класс двумерных суперсимметричных сигма-моделей образуют $N = (2, 2)$ и $N = (4, 4)$ суперсимметричные сигма-модели, бозонные многообразия которых обладают кручением и двумя независимыми взаимно коммутирующими левыми и правыми комплексными структурами [1]–[5]. Такие модели и их частные случаи ВЗНВ типа на групповых пространствах (модели Весса–Зумино–Новикова–Виттена) используются для описания нетривиальных фоновых многообразий в $4D$ -суперструнах [6]–[8], а также имеют приложения в теории двумерных черных дыр в струнном подходе [9], [10]. Явно суперсимметричные формулировки $N = (2, 2)$ моделей как в терминах $N = (2, 2)$ киральных суперполей и киральных суперполей с твистом, так и в терминах $N = (2, 2)$ “полукиральных” суперполей изучались в работах [2], [11]. Для $N = (4, 4)$ моделей с коммутирующими комплексными структурами существуют также явно суперсиммет-

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: eivanov@thsun1.jinr.ru, sutulin@thsun1.jinr.ru

ричные формулировки вне массовой оболочки в проективном [7], [9], [12] и обычном [13], [14] $N = (4, 4)$, $2D$ суперпространствах. Основным объектом в этих формулировках является $N = (4, 4)$ мультиплет с твистом. В двумерном $N = (2, 2)$ суперпространстве он представляется парой суперполей: киральным суперполем и киральным суперполем с твистом.

С другой стороны, наиболее адекватное описание теорий с расширенной суперсимметрией, в частности четырехмерных $N = 2$ теорий, достигается в подходе гармонического суперпространства [15]. Двумерные $N = (4, 4)$ суперсимметричные сигма-модели, которые получаются размерной редукцией из четырехмерных $N = 2$ сигма-моделей, образуют подкласс в классе общих $N = (4, 4)$, $2D$ сигма-моделей. Действительно, их бозонные многообразия являются гиперкэлеровыми, или кватернионными кэлеровыми, т.е. многообразиями без кручения и с одним набором комплексных структур. Для описания двумерных суперсимметричных теорий с кручением оказывается необходимым привлечь более общий тип гармонического суперпространства, чем тот, который был введен и с успехом использован в четырехмерном случае. Этим новым видом гармонического суперпространства является $SU(2) \times SU(2)$ гармоническое суперпространство (бигармоническое суперпространство), определенное в работе [16]. Его характерная черта – наличие двух наборов гармонических переменных, связанных с двумя взаимно коммутирующими группами автоморфизмов $SU(2)$ в левом и правом координатных секторах. В работе [16] было показано, как описать один тип $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом в $SU(2) \times SU(2)$ гармоническом суперпространстве, и было представлено наиболее общее действие вне массовой оболочки для этого мультиплета в виде интеграла по аналитическому подпространству полного суперпространства. Это действие отвечает общей $N = (4, 4)$ суперсимметричной сигма-модели с кручением и взаимно коммутирующими наборами левых и правых комплексных структур¹⁾. В подходе $SU(2) \times SU(2)$ гармонического суперпространства был впоследствии построен более общий класс сигма-модельных действий вне массовой оболочки, а именно действий с кручением и с некоммутирующими левыми и правыми комплексными структурами [18].

Во многих предыдущих случаях общие сигма-модельные действия с $N = (4, 4)$ суперсимметрией строились для фиксированного типа мультиплетов с твистом, а именно для мультиплетов, обладающих одинаковыми трансформационными свойствами по отношению к группе автоморфизмов $SO(4)_L \times SO(4)_R$ двумерной $N = (4, 4)$ супералгебры Пуанкаре. При описании в $N = (2, 2)$ суперпространстве это соответствует тому, что каждая пара кирального суперполя и кирального суперполя с твистом, образующая $N = (4, 4)$ мультиплет с твистом, обладает одними и теми же трансформационными свойствами относительно дополнительной (неявной) $N = (2, 2)$ суперсимметрии. С другой стороны, как будет показано в данной работе, дополнительная суперсимметрия может быть *по-разному* реализована на *различных* таких парах. Ранее было обнаружено [19]–[21], что имеется четыре существенно различных типа $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом (с точностью до дополнительного отражения, связанного с пространствен-

¹⁾Некоторые другие $N = (4, 4)$ мультиплеты вне массовой оболочки и конформная $N = (4, 4)$ супергравитация были описаны в $SU(2) \times SU(2)$ гармоническом суперпространстве в работах [17].

но-временной четностью [20]–[22]). Как отмечено выше, основное различие между ними при описании в $N = (4, 4)$ суперпространстве состоит в том, что группа внутренних автоморфизмов реализована на них по-разному [20], [21]. Одна из целей настоящей работы – показать, что существует свобода в определении преобразований дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии на паре $N = (2, 2)$ кирального суперполя и кирального суперполя с твистом. Именно она ответственна за существование нескольких неэквивалентных $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в рамках формулировки в двумерном $N = (2, 2)$ суперпространстве.

В нашей предыдущей работе [21] было дано описание четырех типов $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в $SU(2) \times SU(2)$ гармоническом суперпространстве вне массовой оболочки и были построены общие сигма-модельные суперполевые действия для них. В качестве примера был рассмотрен специальный случай сигма-моделей ВЗНВ-типа на групповом многообразии $SU(2) \times U(1)$ для мультиплетов одного сорта. Было также показано, что общее сигма-модельное действие для любой пары разных мультиплетов с твистом распадается в сумму сигма-модельных действий для отдельных мультиплетов.

Во многих случаях формулировки $N = (4, 4)$ суперсимметричных моделей в $N = (2, 2)$ суперпространстве оказываются более наглядными, чем $N = (4, 4)$ формулировки. В настоящей работе дано описание различных типов мультиплетов с твистом в двумерном $N = (2, 2)$ суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$. Подход $N = (2, 2)$ суперпространства позволяет существенно прояснить ряд утверждений и заключений, сделанных в работе [21].

Во втором разделе приведено описание $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в обычном $N = (4, 4)$, $2D$ суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$. В разделе 3 условия неприводимости для этих мультиплетов сформулированы в $N = (2, 2)$, $2D$ суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$. Показано, что во всех случаях эти условия приводят к тому, что данный $N = (4, 4)$ мультиплет с твистом представляется парой $N = (2, 2)$ кирального суперполя и кирального суперполя с твистом. На $N = (2, 2)$ языке неэквивалентные $N = (4, 4)$ мультиплеты с твистом отличаются друг от друга трансформационными свойствами этих пар относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Действия для мультиплетов с твистом строятся в виде интегралов по $N = (2, 2)$ суперпространству от вещественных функций, зависящих от соответствующих $N = (2, 2)$ суперполей. Эти функции удовлетворяют определенным дифференциальным связям, возникающим как условия скрытой суперсимметрии. В четвертом разделе рассматриваются $N = (2, 2)$ суперполевые действия двух типов. Лагранжевы плотности в этих действиях строятся либо из $N = (4, 4)$ мультиплетов, принадлежащих самодуальной паре таких мультиплетов, либо из мультиплетов, относящихся к несамодуальным парам²⁾. Мы показываем, что в обоих случаях сигма-модельные действия редуцируются к сумме действий для отдельных $N = (4, 4)$ мультиплетов, и это свойство сохраняется при включении в действие большего числа неэквивалентных мультиплетов. Мы также показываем, что единственная возможность получить взаимодействие различных $N = (4, 4)$ мультиплетов состо-

²⁾Определение “самодуальных” мультиплетов с твистом было дано в работах [14], [20], [21] (см. также раздел 2).

ит в добавлении к сигма-модельному действию $N = (4, 4)$ суперсимметричных потенциальных (или массовых) членов, которые строятся из мультиплетов, принадлежащих самодуальной паре. Мультиплеты, принадлежащие несамодуальным парам, не могут взаимодействовать друг с другом ни через потенциальные, ни через сигма-модельные члены. Проведенный анализ полностью подтверждает аналогичные результаты, полученные в рамках $N = (4, 4)$ гармонического суперпространства [21]. Результаты работы суммированы в заключительном разделе 5.

2. МУЛЬТИПЛЕТЫ С ТВИСТОМ В $N = (4, 4)$, $2D$ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

Вначале, следуя работам [16], [21], напомним основные факты об $N = (4, 4)$, $2D$ суперсимметрии.

Стандартное вещественное $N = (4, 4)$, $2D$ суперпространство в параметризации светового конуса задается следующим набором координат:

$$\mathbb{R}^{(1,1|4,4)} = (Z_L, Z_R) = (z^{++}, \theta^{+i\bar{k}}, z^{--}, \theta^{-a\bar{b}}). \quad (2.1)$$

Здесь “+”, “−” – индексы координат светового конуса, $i, \bar{k}, a, \bar{b}$ – дублетные индексы четырех коммутирующих групп $SU(2)$, составляющих полную группу автоморфизмов $SO(4)_L \times SO(4)_R$ двумерной $N = (4, 4)$ супералгебры Пуанкаре. Спинорные ковариантные производные удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{D_{i\bar{k}}, D_{j\bar{l}}\} = 2i\varepsilon_{ij}\varepsilon_{\bar{k}\bar{l}}\partial_{++}, \quad \{D_{a\bar{b}}, D_{c\bar{d}}\} = 2i\varepsilon_{ac}\varepsilon_{\bar{b}\bar{d}}\partial_{--}, \quad (2.2)$$

где

$$D_{i\bar{k}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{i\bar{k}}} + i\theta_{i\bar{k}}\partial_{++}, \quad D_{a\bar{b}} = \frac{\partial}{\partial\theta^{a\bar{b}}} + i\theta_{a\bar{b}}\partial_{--}. \quad (2.3)$$

Далее для спинорных производных и грассмановых координат будут использоваться как квартетные, так и дублетные обозначения. Для компактности записи индексы световых координат в квартетном представлении будем опускать. Эти два представления связаны между собой следующим образом:

$$\begin{aligned} (\theta^{+i}, \bar{\theta}^{+i}) &\equiv \theta^{i\bar{k}}, & (\theta^{i\bar{k}})^\dagger &= \varepsilon_{il}\varepsilon_{\bar{k}\bar{n}}\theta^{l\bar{n}}, \\ (\theta^{-a}, \bar{\theta}^{-a}) &\equiv \theta^{a\bar{b}}, & (\theta^{a\bar{b}})^\dagger &= \varepsilon_{ac}\varepsilon_{\bar{b}\bar{d}}\theta^{c\bar{d}}, \\ (D_{+i}, \bar{D}_{+i}) &\equiv D_{i\bar{k}}, & (D_{i\bar{k}})^\dagger &= -\varepsilon^{il}\varepsilon_{\bar{k}\bar{n}}D_{l\bar{n}}, \\ (D_{-a}, \bar{D}_{-a}) &\equiv D_{a\bar{b}}, & (D_{a\bar{b}})^\dagger &= -\varepsilon^{ac}\varepsilon_{\bar{b}\bar{d}}D_{c\bar{d}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Символ $\dagger$ в этих формулах обозначает комплексное сопряжение.

Суперсимметричные $N = (4, 4)$ сигма-модели с кручением могут быть сформулированы либо в терминах $N = (2, 2)$ суперполевых пар, состоящих из кирального суперполя и кирального суперполя с твистом, либо в терминах $N = (4, 4)$ суперполей, подчиненных определенным связям. Каждый из этих суперполевых наборов дает эквивалентное описание $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом вне массовой оболочки.

В двумерном $N = (2, 2)$ суперпространстве эти модели описываются действием, которое представляется в виде интеграла от вещественного потенциала [2], [7], [9], зависящего от нескольких копий кирального суперполя и кирального суперполя с твистом. Вещественный потенциал удовлетворяет набору дифференциальных связей, обеспечивающих инвариантность действия вне массовой оболочки относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Преобразования этой дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии переводят киральные суперполя в киральные суперполя с твистом, и наоборот. Вместе с явной $N = (2, 2)$ суперсимметрией они образуют полную $N = (4, 4)$ суперсимметрию.

С другой стороны, $N = (4, 4)$ супермультиплет с твистом в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ описывается вещественным квартетным суперполем, подчиненным соответствующим условиям неприводимости [1], [2], [4], [23]. Эти условия оставляют $(8 + 8)$ независимых компонент в полном наборе полей вещественного квартетного суперполя, что как раз отвечает неприводимому составу $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом вне массовой оболочки.

Общие сигма-модельные действия с $N = (4, 4)$ суперсимметрией, которые изучались ранее как в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ [2], так и в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ [16], включали зависимость лишь от *одного* типа $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом. Однако в действительности существует несколько типов таких мультиплетов, компонентные поля которых различаются трансформационными свойствами по отношению к полной группе R -симметрии (группе автоморфизмов) $SO(4)_L \times SO(4)_R$ двумерной $N = (4, 4)$ супералгебры Пуанкаре. Существование таких неэквивалентных мультиплетов было впервые замечено в работах [13], [19], [20].

Рассмотрим, следуя работам [19], [21], четыре типа мультиплетов с твистом в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ [16] в соответствии с четырьмя возможностями объединения дублетных индексов $SU(2)$ -факторов левой и правой подгрупп $SO(4)$ в полной группе автоморфизмов $SO(4)_L \times SO(4)_R$:

$$\hat{q}^{i a}, \quad \hat{q}^{i \underline{a}}, \quad \hat{q}^{\underline{i} a}, \quad \hat{q}^{\underline{i} \underline{a}}. \quad (2.5)$$

Эти мультиплеты являются вещественными относительно комплексного сопряжения в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$:

$$\begin{aligned} (\hat{q}^{i a})^\dagger &= \varepsilon_{i k} \varepsilon_{a b} \hat{q}^{k b}, & (\hat{q}^{i \underline{a}})^\dagger &= \varepsilon_{i k} \varepsilon_{\underline{a} \underline{b}} \hat{q}^{k \underline{b}}, \\ (\hat{q}^{\underline{i} a})^\dagger &= \varepsilon_{\underline{i} \underline{k}} \varepsilon_{a b} \hat{q}^{\underline{k} b}, & (\hat{q}^{\underline{i} \underline{a}})^\dagger &= \varepsilon_{\underline{i} \underline{k}} \varepsilon_{\underline{a} \underline{b}} \hat{q}^{\underline{k} \underline{b}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Условия неприводимости, оставляющие $(8 + 8)$ независимых компонент в каждом из суперполей, имеют вид

$$D^{(k \underline{k}} \hat{q}^{i) a} = 0, \quad D^{(b \underline{b}} \hat{q}^{i a)} = 0, \quad (2.7)$$

$$D^{(k \underline{k}} \hat{q}^{i) \underline{a}} = 0, \quad D^{(b \underline{b}} \hat{q}^{i \underline{a})} = 0, \quad (2.8)$$

$$D^k (\underline{k} \hat{q}^{\underline{i} a}) = 0, \quad D^{(b \underline{b}} \hat{q}^{\underline{i} a)} = 0, \quad (2.9)$$

$$D^k (\underline{k} \hat{q}^{\underline{i} \underline{a}}) = 0, \quad D^{(b \underline{b}} \hat{q}^{\underline{i} \underline{a}}) = 0. \quad (2.10)$$

Символ $(\)$ в этих формулах обозначает симметризацию по соответствующим индексам.

Для описания этих мультиплетов наиболее подходящим является $N = (4, 4)$, $SU(2) \times SU(2)$ гармоническое суперпространство, содержащее два набора независимых гармонических переменных [16], [21]. Для каждого типа $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом общее сигма-модельное действие вне массовой оболочки записывается как интеграл по *аналитическому* бигармоническому суперпространству [16], [21], которое образует подпространство в общем $SU(2) \times SU(2)$ гармоническом суперпространстве.

В работе [21] было показано, что в аналитическом суперпространстве существует возможность обобщения сигма-модельных действий, зависящих от одного типа мультиплетов с твистом, на случай зависимости от двух и большего числа мультиплетов разного типа. Основной целью данной работы является формулировка этих результатов на более прозрачном $N = (2, 2)$ суперполе языке.

В заключение этого раздела напомним определение самодуальной пары мультиплетов с твистом из набора (2.5). Пара мультиплетов называется самодуальной, если входящие в нее суперполя не имеют общих $SU(2)$ дублетных индексов. Так, $(\hat{q}^{i a}, \hat{q}^{\dot{i} \underline{a}})$ и $(\hat{q}^{i \underline{a}}, \hat{q}^{\dot{i} a})$ – самодуальные пары. Их отличительная особенность состоит в том, что физические бозонные поля одного из суперполей, входящих в пару, имеют тот же самый $SU(2)$ состав, что и вспомогательные поля другого суперполя из той же пары. Все остальные пары мультиплетов будем называть несамодуальными.

3. МУЛЬТИПЛЕТЫ С ТВИСТОМ В $N = (2, 2)$, $2D$ СУПЕРПРОСТРАНСТВЕ

В этом разделе будет дано описание разных типов $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в двумерном $N = (2, 2)$ суперпространстве и показано, в чем состоит различие между ними. Каждый из таких мультиплетов задается парой $N = (2, 2)$ кирального суперполя и кирального суперполя с твистом, которые, однако, имеют разные трансформационные свойства относительно преобразований дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Затем будут построены общие $N = (4, 4)$ суперсимметричные сигма-модельные действия для каждого типа мультиплетов с твистом. Эти действия записываются в виде интегралов по $N = (2, 2)$ суперпространству от действительных функций, зависящих от $N = (2, 2)$ кирального суперполя и кирального суперполя с твистом. Эти суперполевые лагранжевы плотности подчинены определенным дифференциальными связям.

3.1. Преобразования суперсимметрии и связи. Перейдем к эквивалентной записи для $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ грассмановых координат и спинорных производных (2.1), (2.4):

$$\theta^{+i} = (\theta^+, \eta^+), \quad \bar{\theta}_i^+ = (\bar{\theta}^+, \bar{\eta}^+), \quad \theta^{-a} = (\theta^-, \xi^-), \quad \bar{\theta}_a^- = (\bar{\theta}^-, \bar{\xi}^-), \quad (3.1)$$

$$D_{+i} = (D_+, d_+), \quad \bar{D}_+^i = (\bar{D}_+, \bar{d}_+), \quad D_{-a} = (D_-, d_-), \quad \bar{D}_-^a = (\bar{D}_-, \bar{d}_-). \quad (3.2)$$

Координаты θ и спинорные производные D соответствуют явной $N = (2, 2)$ суперсимметрии, а координаты η , ξ и спинорные производные d – скрытой $N = (2, 2)$ суперсимметрии (соотношения, связывающие $N = (4, 4)$ ковариантные производные в квартетных обозначениях (2.4) с их $N = (2, 2)$ аналогами, приведены в приложении А).

Вещественное $N = (2, 2)$, $2D$ суперпространство $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ параметризуется следующим набором координат:

$$\mathbb{R}^{(1,1|2,2)} = (z^{++}, \theta^+, \bar{\theta}^+, z^{--}, \theta^-, \bar{\theta}^-). \quad (3.3)$$

Перепишем условия неприводимости для $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом (2.7)–(2.10) в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$. Для этого с учетом условий вещественности (2.6) введем комплексные $N = (4, 4)$ суперполя

$$\hat{q}^{11} = \mathbf{A}, \quad \hat{q}^{12} = \mathbf{B}, \quad \hat{q}^{21} = -\bar{\mathbf{B}}, \quad \hat{q}^{22} = \bar{\mathbf{A}}, \quad (3.4)$$

$$\hat{q}^{1\bar{1}} = \mathbf{a}, \quad \hat{q}^{1\bar{2}} = \mathbf{b}, \quad \hat{q}^{2\bar{1}} = -\bar{\mathbf{b}}, \quad \hat{q}^{2\bar{2}} = \bar{\mathbf{a}}, \quad (3.5)$$

$$\hat{q}^{\perp 1} = \mathcal{A}, \quad \hat{q}^{\perp 2} = \mathcal{B}, \quad \hat{q}^{\perp 1} = -\bar{\mathcal{B}}, \quad \hat{q}^{\perp 2} = \bar{\mathcal{A}}, \quad (3.6)$$

$$\hat{q}^{\perp\bar{1}} = \mathbf{A}, \quad \hat{q}^{\perp\bar{2}} = \mathbf{B}, \quad \hat{q}^{\perp\bar{1}} = -\bar{\mathbf{B}}, \quad \hat{q}^{\perp\bar{2}} = \bar{\mathbf{A}}. \quad (3.7)$$

После разложения этих суперполей по дополнительным грассмановым координатам $\eta^\pm$, $\xi^\pm$ (и комплексно-сопряженным координатам) и использования связей (2.7)–(2.10) замечаем, что только первые компоненты в каждом из $N = (4, 4)$ суперполей являются независимыми $N = (2, 2)$ суперполями. Все остальные $N = (2, 2)$ суперполевые компоненты в разложениях по дополнительным грассмановым координатам выражаются через спинорные производные D соответствующих первых компонент. Низшие компоненты, как следует из связей (2.7)–(2.10), являются киральными $N = (2, 2)$ суперполями и киральными $N = (2, 2)$ суперполями с твистом.

Так, для мультиплета $\hat{q}^{i a}$ имеем (для остальных мультиплетов аналогичные условия приведены в приложении А)

$$\begin{aligned} \bar{D}_+ A = 0, \quad \bar{D}_- A = 0, \quad \bar{D}_+ B = 0, \quad D_- B = 0, \\ D_+ \bar{A} = 0, \quad D_- \bar{A} = 0, \quad D_+ \bar{B} = 0, \quad \bar{D}_- \bar{B} = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где

$$A = \mathbf{A}|_{\eta=\xi=0}, \quad \bar{A} = \bar{\mathbf{A}}|_{\eta=\xi=0}, \quad B = \mathbf{B}|_{\eta=\xi=0}, \quad \bar{B} = \bar{\mathbf{B}}|_{\eta=\xi=0}. \quad (3.9)$$

Чтобы увидеть различия между неэквивалентными $N = (4, 4)$ мультиплетами с твистом в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$, приведем явный вид разложения по дополнительным грассмановым координатам тех $N = (4, 4)$ суперполей, чьи первые компоненты являются киральными $N = (2, 2)$ суперполями:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = A - \bar{\eta}^+ \bar{D}_+ \bar{B} + \bar{\xi}^- \bar{D}_- B + \dots, \quad \mathbf{A} = \mathbf{a} + \eta^+ \bar{D}_+ \bar{\mathbf{b}} - \xi^- \bar{D}_- \mathbf{b} + \dots, \\ \mathbf{a} = a - \bar{\eta}^+ \bar{D}_+ \bar{\mathbf{b}} - \xi^- \bar{D}_- \mathbf{b} + \dots, \quad \mathcal{A} = \alpha + \eta^+ \bar{D}_+ \bar{\beta} + \bar{\xi}^- \bar{D}_- \beta + \dots, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$A = \mathbf{A}|_{\eta=\xi=0}, \quad a = \mathbf{a}|_{\eta=\xi=0}, \quad \alpha = \mathcal{A}|_{\eta=\xi=0}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{A}|_{\eta=\xi=0}.$$

В суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ преобразования суперсимметрии $N = (4, 4)$ суперполя Φ выглядят следующим образом (явный вид соответствующих генераторов Q приведен в приложении А):

$$\delta \Phi = i(\varepsilon^{+k} Q_{+k} - \bar{\varepsilon}_k^+ \bar{Q}_+^k + \varepsilon^{-a} Q_{-a} - \bar{\varepsilon}_a^- \bar{Q}_-^a) \Phi. \quad (3.11)$$

При редукции суперпространства $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ к подпространству $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ половина суперсимметрий становится неявной, и их преобразования включают спинорные производные D . Эти дополнительные суперсимметрии смешивают между собой независимые $N = (2, 2)$ суперполевые компоненты $N = (4, 4)$ суперполей, определенные формулами (3.9), (A.10)–(A.12).

Подставляя разложение по дополнительным грассмановым переменным для каждого $N = (4, 4)$ суперполя в закон преобразования (3.11) и выбирая значения индексов $k = a = 2$ (которые отвечают генераторам и инфинитезимальным параметрам скрытой $N = (2, 2)$ суперсимметрии), находим законы преобразований независимых компонент этих суперполей относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии:

$$\begin{aligned} \delta A &= \varepsilon^+ \overline{D}_+ \overline{B} - \varepsilon^- \overline{D}_- B, & \delta a &= -\varepsilon^+ \overline{D}_+ \bar{b} + \varepsilon^- \overline{D}_- b, \\ \delta \bar{A} &= -\varepsilon^+ D_+ B + \varepsilon^- D_- \overline{B}, & \delta \bar{a} &= \varepsilon^+ D_+ b - \varepsilon^- D_- \bar{b}, \\ \delta B &= -\varepsilon^+ \overline{D}_+ \bar{A} - \varepsilon^- D_- A, & \delta b &= \varepsilon^+ \overline{D}_+ \bar{a} + \varepsilon^- D_- a, \\ \delta \overline{B} &= \varepsilon^+ D_+ A + \varepsilon^- \overline{D}_- \bar{A}, & \delta \bar{b} &= -\varepsilon^+ D_+ a - \varepsilon^- \overline{D}_- \bar{a}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \delta a &= \varepsilon^+ \overline{D}_+ \bar{b} + \varepsilon^- \overline{D}_- b, & \delta \alpha &= -\varepsilon^+ \overline{D}_+ \bar{\beta} - \varepsilon^- \overline{D}_- \beta, \\ \delta \bar{a} &= -\varepsilon^+ D_+ b - \varepsilon^- D_- \bar{b}, & \delta \bar{\alpha} &= \varepsilon^+ D_+ \beta + \varepsilon^- D_- \bar{\beta}, \\ \delta b &= -\varepsilon^+ \overline{D}_+ \bar{a} + \varepsilon^- D_- a, & \delta \beta &= \varepsilon^+ \overline{D}_+ \bar{\alpha} - \varepsilon^- D_- \alpha, \\ \delta \bar{b} &= \varepsilon^+ D_+ a - \varepsilon^- \overline{D}_- \bar{a}, & \delta \bar{\beta} &= -\varepsilon^+ D_+ \alpha + \varepsilon^- \overline{D}_- \bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь выписаны законы преобразований независимых $N = (2, 2)$ суперполей, представляющих $N = (4, 4)$ мультиплеты из самодуальных пар $(\hat{q}^{i a}, \hat{q}^{\bar{i} \bar{a}})$ и $(\hat{q}^{i \bar{a}}, \hat{q}^{\bar{i} a})$, соответственно.

Из (3.12), (3.13) следует, что разные типы $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ отличаются друг от друга законами преобразования соответствующих киральных суперполей и киральных суперполей с твистом по отношению к дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Эти законы преобразования специфичны для каждого мультиплета.

Таким образом, каждый тип $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ описывается парой суперполей: кирального $N = (2, 2)$ суперполя и кирального $N = (2, 2)$ суперполя с твистом. В то же время дополнительная $N = (2, 2)$ суперсимметрия реализована по-разному на $N = (2, 2)$ суперполях из неэквивалентных $N = (4, 4)$ мультиплетов. Более того, для $N = (2, 2)$ суперполей одного сорта (киральных или киральных с твистом), но принадлежащих разным $N = (4, 4)$ мультиплетам, никакими переопределениями параметров преобразований и/или суперполей нельзя *одновременно* привести преобразования неявной $N = (2, 2)$ суперсимметрии к одному и тому же виду.

Таким образом, основная отличительная черта неэквивалентных мультиплетов с твистом в $N = (2, 2)$ суперполеом описании заключается в различии реализаций дополнительной неявной $N = (2, 2)$ суперсимметрии.

Возвращаясь к полной группе автоморфизмов $SO(4)_L \times SO(4)_R$ двумерной $N = (4, 4)$ супералгебры Пуанкаре, следует отметить, что она имеет различные реализации на неэквивалентных $N = (4, 4)$ мультиплетах с твистом как в $N = (2, 2)$, $2D$, так и $N = (4, 4)$, $2D$ суперпространствах. При описании в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ непосредственно наблюдаема только симметрия относительно подгруппы $U(1)_L \times U(1)_R$ полной группы автоморфизмов $SO(4)_L \times SO(4)_R$.

3.2. Действие для мультиплета $\hat{q}^{ia}$. Общее действие для k киральных суперполей C^k и n киральных суперполей с твистом T^n записывается в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ как интеграл от некоторой вещественной функции K :

$$S_{(2,2)} = \int \mu K(C^k, \bar{C}^k, T^n, \bar{T}^n), \quad (3.14)$$

где

$$\mu = d^2 x d^2 \theta^+ d^2 \theta^- = d^2 x d\theta^+ d\bar{\theta}^+ d\theta^- d\bar{\theta}^- \quad (3.15)$$

—мера интегрирования. Суперпотенциал K инвариантен относительно обобщенного кэлерова преобразования:

$$\delta K = f(C^k, T^n) + g(C^k, \bar{T}^n) + \bar{f}(\bar{C}^k, \bar{T}^n) + \bar{g}(\bar{C}^k, T^n). \quad (3.16)$$

Если это действие описывает теорию, обладающую только $N = (2, 2)$ суперсимметрией, то число киральных суперполей и киральных суперполей с твистом может быть произвольным, $k \neq n$. К действию (3.14) без введения центральных зарядов можно добавить скалярный потенциал, который включает в себя две голоморфные функции $P_1(C^k)$, $P_2(T^n)$:

$$S_{(2,2)}^{\text{pot}} = im \int \mu \{ (\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-) P_1(C^k) + (\theta^+ \theta^-) \bar{P}_1(\bar{C}^k) + (\bar{\theta}^+ \theta^-) P_2(T^n) + (\theta^+ \bar{\theta}^-) \bar{P}_2(\bar{T}^n) \}. \quad (3.17)$$

Несмотря на присутствие грассмановых координат θ , скалярный потенциал (3.17) инвариантен относительно преобразований явной $N = (2, 2)$ суперсимметрии как следствие того, что входящие в него суперполя являются киральными и киральными с твистом, т.е. удовлетворяют известным связям. После исключения вспомогательных полей из суммы двух действий (3.14) и (3.17) в компонентном действии возникают скалярные потенциальные члены физических бозонных полей.

Предположим, что киральные суперполя C (или антикиральные $\bar{C}$) и киральные суперполя с твистом T (или антикиральные с твистом $\bar{T}$) объединяются в один и тот же фиксированный тип $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом. Тогда инвариантность действия (3.14) относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии требует, во-первых, равенства числа киральных суперполей и киральных суперполей с твистом, $k = n$, и, во-вторых, приводит к дифференциальным связям для функции K . Эти связи выглядят следующим образом [2]:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial C^i \partial \bar{C}^k} - \frac{\partial^2 K}{\partial C^k \partial \bar{C}^i} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial T^i \partial \bar{T}^k} - \frac{\partial^2 K}{\partial T^k \partial \bar{T}^i} = 0, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial C^{(k} \partial \bar{C}^{l)}} + \frac{\partial^2 K}{\partial T^{(l} \partial \bar{T}^{k)}} = 0. \quad (3.19)$$

В частном случае, когда потенциал K зависит только от одной пары суперполей – кирального суперполя и кирального суперполя с твистом ($m = 1$) – связи (3.18), (3.19) сводятся к единственному четырехмерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 K}{\partial C \partial \bar{C}} + \frac{\partial^2 K}{\partial T \partial \bar{T}} = 0. \quad (3.20)$$

Таким образом, для вещественного потенциала K , удовлетворяющего условиям (3.18), (3.19) и включающего равное число киральных и киральных с твистом суперполей, действие

$$S_{(4,4)} = \int \mu K(C^m, \bar{C}^m, T^m, \bar{T}^m) \quad (3.21)$$

инвариантно относительно полной $N = (4, 4)$ суперсимметрии.

Можно показать, что инвариантность потенциальных (массовых) членов в действии (3.17) относительно $N = (4, 4)$ суперсимметрии требует линейной зависимости функций P_1, P_2 от соответствующих суперполей:

$$S_{(4,4)}^m = im \int \mu \{ (\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-) C + (\theta^+ \theta^-) \bar{C} + (\bar{\theta}^+ \theta^-) T + (\theta^+ \bar{\theta}^-) \bar{T} \}. \quad (3.22)$$

Хотя в компонентном действии (3.22) присутствуют только члены, линейные по вспомогательным полям, после исключения последних в полном действии, содержащем также сигма-модельную часть, возникает скалярный потенциал для физических бозонных полей (в случае нетривиальной метрики на пространстве физических бозонов) [1], [4], [13], [16].

Проведенный анализ можно распространить на любой другой тип $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом. Если действие зависит от пар $N = (2, 2)$ киральных и киральных с твистом суперполей, образующих один и тот же тип $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом, то дифференциальные условия для соответствующего потенциала K , вытекающие из требования дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии, имеют такой же вид, как и (3.18), (3.19), независимо от типа мультиплета. Структура потенциальных членов вне массовой оболочки в этих случаях также однозначно фиксируется требованием инвариантности относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Они представляются суммой действий типа (3.22).

4. ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ ПАРЫ МУЛЬТИПЛЕТОВ С ТВИСТОМ

4.1. Введение: свободное действие. В предыдущем разделе было показано, что киральные суперполя и киральные суперполя с твистом, образующие $N = (4, 4)$ мультиплет с твистом, могут иметь разные трансформационные свойства относительно преобразований скрытой $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Как результат, соответствующие $N = (4, 4)$ мультиплеты не эквивалентны друг другу.

Рассмотрим в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ сигма-модельные действия для двух случаев, когда суперпотенциал K содержит зависимость только от самодуальной или только от несамодуальной пары $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом. Как будет показано ниже, в обоих вариантах соответствующие сигма-модельные действия сводятся к сумме

сигма-модельных действий для отдельных мультиплетов с твистом. Представленные в этом разделе результаты полностью согласуются с полученными в работе [21] в подходе бигармонического суперпространства.

Прежде чем перейти к общему рассмотрению, напомним, как в бигармоническом подходе выглядят действия, билинейные по $N = (4, 4)$ суперполям с твистом [21]. Следует различать два случая. В первом случае общие квадратичные действия зависят только от одного типа мультиплета с твистом и априори содержат произвольные гармонические константы. Требование, чтобы эти действия были $N = (4, 4)$ суперсимметричными, приводит к условиям для гармонических констант, и в результате соответствующие действия сводятся к свободным. Во втором случае билинейные действия зависят от разных типов $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом. Изучение таких действий в работе [21] привело к заключению, что требование инвариантности относительно $N = (4, 4)$ суперсимметрии сводит их к нулю.

Эти результаты могут быть воспроизведены в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ в терминах киральных суперполей и киральных суперполей с твистом. Так, билинейное сигма-модельное действие, зависящее от кирального и кирального с твистом суперполей, которые принадлежат одному типу $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом,

$$S_{(4,4)}^{\text{free}} = \int \mu (C^m \bar{C}^m - T^m \bar{T}^m), \quad (4.1)$$

эквивалентно свободному $N = (4, 4)$ суперсимметричному действию соответствующего мультиплета с твистом. В то же время действия, билинейные по таким парам киральных суперполей и киральных суперполей с твистом, которые относятся к разным типам $N = (4, 4)$ мультиплетов, оказываются равными нулю в силу требования дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии. Заметим, что относительный знак между двумя членами в (4.1) фиксируется этой дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрией единственным образом (компонентный лагранжиан, несмотря на знак минус в (4.1), положительно определен).

Ниже мы повторим в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ общий анализ сигма-модельных действий для обоих случаев, т.е. как для несамодуальной, так и для самодуальной пары мультиплетов с твистом [21]. Единственность формы свободного действия (4.1) и несуществование $N = (4, 4)$ суперсимметричных билинейных действий для $N = (2, 2)$ суперполевых пар, представляющих разные $N = (4, 4)$ мультиплеты с твистом, следуют из этого общего анализа.

4.2. Действие для несамодуальных мультиплетов с твистом. Рассмотрим действие для мультиплетов, принадлежащих разным самодуальным парам, $\hat{q}^{i a}$ и $\hat{q}^{i \bar{a}}$. Оно записывается как интеграл от вещественной функции K по суперпространству $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$:

$$S_{(4,4)} = \int \mu K(A, \bar{A}, B, \bar{B}, a, \bar{a}, b, \bar{b}). \quad (4.2)$$

Действие (4.2) инвариантно относительно явной $N = (2, 2)$ суперсимметрии, поскольку функция K зависит только от $N = (2, 2)$ суперполей. Оно также инвариантно относи-

тельно обобщенных калибровочных кэлеровых преобразований:

$$\delta K = f(A, B, a, b) + g(A, \bar{B}, a, \bar{b}) + \bar{f}(\bar{A}, \bar{B}, \bar{a}, \bar{b}) + \bar{g}(\bar{A}, B, \bar{a}, b). \quad (4.3)$$

Используя тот факт, что входящие в правую часть (4.3) суперполя являются киральными и киральными с твистом, а также определение меры интегрирования на суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$, легко показать, что калибровочные функции в (4.3) не дают вклада в $N = (2, 2)$ суперполевое действие. Требование, чтобы это действие было инвариантным относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии, которая реализуется на суперполях преобразованиями (3.12), (3.13), оказывается равносильным дополнительным условиям для K .

Общее условие инвариантности действия (4.2) относительно преобразований скрытой суперсимметрии может быть записано в виде

$$\delta S_{(4,4)} = \int \mu \{ \varepsilon^+ D_+ F - \bar{\varepsilon}^+ \bar{D}_+ \bar{F} + \varepsilon^+ \bar{D}_+ G - \bar{\varepsilon}^+ D_+ \bar{G} + \\ + \varepsilon^- D_- H - \bar{\varepsilon}^- \bar{D}_- \bar{H} + \varepsilon^- \bar{D}_- P - \bar{\varepsilon}^- D_- \bar{P} \}, \quad (4.4)$$

причем функции от $N = (2, 2)$ суперполей в правой части изначально являются произвольными. Вычисляя явно вариацию $\delta S_{(4,4)}$ относительно скрытой суперсимметрии и сравнивая коэффициенты при независимых инфинитезимальных параметрах в обеих частях равенства (4.4), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^+ &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \bar{B}} = \frac{\partial F}{\partial A}, \quad \frac{\partial K}{\partial A} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{B}}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{b}} = \frac{\partial F}{\partial a}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{a}} = -\frac{\partial F}{\partial b}, \\ \bar{\varepsilon}^+ &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial B} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{A}}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{A}} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial B}, \quad \frac{\partial K}{\partial b} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{a}}, \quad \frac{\partial K}{\partial a} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{b}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^- &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial B} = -\frac{\partial H}{\partial A}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{A}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{B}}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{b}} = -\frac{\partial P}{\partial \bar{a}}, \quad \frac{\partial K}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial b}, \\ \bar{\varepsilon}^- &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \bar{B}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{A}}, \quad \frac{\partial K}{\partial A} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial B}, \quad \frac{\partial K}{\partial b} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial a}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{b}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Кроме этих связей, функции в правой части (4.4) подчиняются дополнительным условиям аналитичности:

$$\varepsilon^+ \Rightarrow G = 0, \quad \bar{\varepsilon}^+ \Rightarrow \bar{G} = 0, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^- &\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial B} = 0, \\ \bar{\varepsilon}^- &\Rightarrow \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{a}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{b}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{A}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{B}} = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Условия интегрируемости для потенциала K , следующие из уравнений (4.5), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial A \partial \bar{A}} + \frac{\partial^2 K}{\partial B \partial \bar{B}} &= 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{a}} + \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{b}} = 0, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{B}} - \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{b} \partial A} &= 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a} \partial B} - \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{A}} = 0, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{A}} + \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{b} \partial B} &= 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a} \partial A} + \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{B}} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Аналогично из уравнений (4.6), (4.8) находим дальнейшие ограничения для K :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{B}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{b} \partial \bar{B}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{A}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{b} \partial \bar{A}} = 0, \\ \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a} \partial \bar{B}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{B}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a} \partial A} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial A} = 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

и, кроме них, такие же два уравнения Лапласа, как в первой строке в (4.9).

Для того чтобы найти решение условий интегрируемости для K , удобно ввести следующие дублеты $N = (2, 2)$ суперполей:

$$a^\alpha = (a, \bar{b}), \quad A^\alpha = (\bar{A}, B), \quad \bar{a}^\alpha = (\bar{a}, b), \quad \bar{A}^\alpha = (A, \bar{B}), \quad (4.11)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2$. В этих новых переменных система уравнений (4.9), (4.10) становится более компактной:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial A \partial \bar{A}} + \frac{\partial^2 K}{\partial B \partial \bar{B}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{a}} + \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{b}} = 0, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial a^\alpha \partial A^\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a}^\alpha \partial \bar{A}^\beta} = 0, \quad (4.13)$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 K}{\partial a^\alpha \partial \bar{A}^\beta} = 0, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a}^\alpha \partial A^\beta} = 0. \quad (4.14)$$

Решение уравнений (4.13), (4.14) имеет вид (детали приведены в приложении Б)

$$K(A^\alpha, \bar{A}^\alpha, a^\alpha, \bar{a}^\alpha) = T(A^\alpha, \bar{A}^\alpha) + h(a^\alpha, \bar{a}^\alpha). \quad (4.15)$$

Дополнительно каждый член в правой части (4.15) подчиняется своему четырехмерному уравнению Лапласа и, таким образом, связи (4.12) также удовлетворяются.

4.3. Действие для самодуальных мультиплетов с твистом. Для самодуальной пары мультиплетов с твистом $\hat{q}^{\dot{z}a}$ и $\hat{q}^{\dot{z}\bar{a}}$ общее $N = (2, 2)$ суперсимметричное действие записывается в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ в виде

$$S_{(4,4)} = \int \mu K(a, \bar{a}, b, \bar{b}, \alpha, \bar{\alpha}, \beta, \bar{\beta}). \quad (4.16)$$

Действие (4.16) инвариантно относительно обобщенных кэлеровых преобразований:

$$\delta K = f(a, b, \alpha, \beta) + g(a, \bar{b}, \alpha, \bar{\beta}) + \bar{f}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}) + \bar{g}(\bar{a}, b, \bar{\alpha}, \beta). \quad (4.17)$$

Как и в случае несамодуальных мультиплетов, требование, чтобы действие обладало инвариантностью относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии, приводит

к дифференциальным условиям для потенциала K . Чтобы их найти, воспользуемся общим условием инвариантности (4.4) (обозначая функции в правой части теми же буквами) и законами преобразований суперполей (3.13). В результате получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^+ &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial b} = \frac{\partial F}{\partial a}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{a}} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{b}}, \quad \frac{\partial K}{\partial \beta} = \frac{\partial G}{\partial \bar{\alpha}}, \quad \frac{\partial K}{\partial \alpha} = -\frac{\partial G}{\partial \bar{\beta}}, \\
\bar{\varepsilon}^+ &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial b} = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{a}}, \quad \frac{\partial K}{\partial a} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{b}}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{\beta}} = \frac{\partial \bar{G}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{\alpha}} = -\frac{\partial \bar{G}}{\partial \beta}, \\
\varepsilon^- &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \bar{b}} = -\frac{\partial P}{\partial \bar{a}}, \quad \frac{\partial K}{\partial a} = \frac{\partial P}{\partial b}, \quad \frac{\partial K}{\partial \beta} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{\alpha}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\beta}}, \\
\bar{\varepsilon}^- &\Rightarrow \frac{\partial K}{\partial \bar{b}} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{a}}, \quad \frac{\partial K}{\partial a} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial b}, \quad \frac{\partial K}{\partial \bar{\beta}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial K}{\partial \alpha} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{\beta}}.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Кроме того, возникают условия аналитичности для функций в правой части уравнения (4.4):

$$\begin{aligned}
\varepsilon^+ &\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial \bar{a}} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial \bar{b}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \beta} = 0, \\
\bar{\varepsilon}^+ &\Rightarrow \frac{\partial \bar{G}}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \bar{G}}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\beta}} = 0, \\
\varepsilon^- &\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \bar{b}} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \bar{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = 0, \\
\bar{\varepsilon}^- &\Rightarrow \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{a}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\beta}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Из уравнений (4.18), (4.19) находим условия интегрируемости для потенциала K :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a} \partial \beta} &= 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{b} \partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a} \partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{b} \partial \alpha} = 0, \\
\frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{\beta}} &= 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{\beta}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{\alpha}} = 0, \\
\frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \beta} &= 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{b} \partial \bar{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a} \partial \bar{\beta}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \alpha} = 0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Кроме того, потенциал K удовлетворяет двум независимым четырехмерным уравнениям Лапласа:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial a \partial \bar{a}} + \frac{\partial^2 K}{\partial b \partial \bar{b}} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} + \frac{\partial^2 K}{\partial \beta \partial \bar{\beta}} = 0. \tag{4.21}$$

Введем, аналогично предыдущему случаю, дублетные суперполя

$$a^\alpha = (a, \bar{b}), \quad \Gamma^\alpha = (\bar{\alpha}, \beta), \quad \bar{a}^\alpha = (\bar{a}, b), \quad \bar{\Gamma}^\alpha = (\alpha, \bar{\beta}) \tag{4.22}$$

и перепишем систему уравнений (4.20) в эквивалентном виде:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial a^\alpha \partial \Gamma^\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a}^\alpha \partial \bar{\Gamma}^\beta} = 0, \tag{4.23}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 K}{\partial a^\alpha \partial \bar{\Gamma}^\beta} = 0, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a}^\alpha \partial \Gamma^\beta} = 0 \tag{4.24}$$

(здесь нет суммирования по повторяющимся индексам). Уравнения (4.21), (4.23), (4.24) составляют полную систему дифференциальных связей для функции K . Решение уравнений (4.23), (4.24), как и в случае пары несамодуальных $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом, представляется в виде суммы двух членов:

$$K(a^\alpha, \bar{a}^\alpha, \Gamma^\alpha, \bar{\Gamma}^\alpha) = T(\Gamma^\alpha, \bar{\Gamma}^\alpha) + h(a^\alpha, \bar{a}^\alpha). \quad (4.25)$$

Из уравнений (4.21) следует, что T и h удовлетворяют своим четырехмерным уравнениям Лапласа.

Таким образом, мы показали, что действия общей сигма-модели как в случае $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом, принадлежащих самодуальной паре, так и для несамодуальной пары редуцируются к определенным суммам $N = (4, 4)$ суперсимметричных действий отдельных мультиплетов. Другими словами, каждое действие в сумме включает в себя зависимость только от тех $N = (2, 2)$ киральных суперполей и киральных суперполей с твистом, которые отвечают определенному фиксированному типу $N = (4, 4)$ мультиплета с твистом. Из этих результатов следует, что $N = (2, 2)$ киральные суперполя и киральные суперполя с твистом, которые принадлежат разным $N = (4, 4)$ мультиплетам и имеют, следовательно, различные трансформационные свойства относительно преобразований скрытой $N = (2, 2)$ суперсимметрии, не могут взаимодействовать друг с другом посредством действий сигма-модельного типа.

Анализ, проведенный в $N = (2, 2)$ суперпространстве, подтверждает результаты, полученные для разных типов $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в подходе бигармонического суперпространства [21], где редукция общего действия к сумме отдельных действий была доказана для любого числа $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом независимо от типа мультиплета. Проведенный здесь анализ также может быть обобщен на случай произвольного числа мультиплетов с тем же окончательным выводом.

4.4. Потенциальные члены. В разделе 3 на примере мультиплета с твистом $\hat{q}^{i a}$ были построены $N = (4, 4)$ суперсимметричные потенциальные (массовые) члены в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$. В нашей предыдущей работе [21] было обнаружено, что для мультиплетов с твистом, принадлежащих самодуальной паре, существуют инвариантные смешанные массовые члены. Эти члены имеют такой же вид, как и аналогичные выражения, полученные в работах [1], [4], [13], [14].

Результаты работы [21] могут быть легко переведены на язык $N = (2, 2)$ киральных суперполей и киральных суперполей с твистом в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$. Так, например, для самодуальной пары мультиплетов с твистом $\hat{q}^{i \underline{a}}$ и $\hat{q}^{\dot{i} a}$ в качестве подходящего пробного потенциального члена можно выбрать следующую билинейную суперполевою комбинацию:

$$S_{(4,4)}^M = iM \int \mu \{ l(\theta^+ \theta^-) \bar{a} \bar{a} + k(\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-) a a + n(\theta^+ \bar{\theta}^-) \bar{\beta} \bar{b} + p(\bar{\theta}^+ \theta^-) \beta b \}, \quad (4.26)$$

а для случая несамодуальной пары $\hat{q}^{i a}$ и $\hat{q}^{\dot{i} \underline{a}}$ —

$$S_{(4,4)}^{\widetilde{M}} = i\widetilde{M} \int \mu \{ l'(\theta^+ \theta^-) \bar{a} \bar{A} + k'(\bar{\theta}^+ \bar{\theta}^-) a A + n'(\theta^+ \bar{\theta}^-) \bar{b} \bar{B} + p'(\bar{\theta}^+ \theta^-) b B \}. \quad (4.27)$$

В уравнениях (4.26), (4.27) l, l' и т. д. — некоторые коэффициенты, первоначально произвольные. Они являются аналогами гармонических констант $C^{p,q}$ с $U(1) \times U(1)$ -зарядами p и q , фигурирующих в работе [21]. Вычисляя вариацию действия (4.26) относительно преобразований дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии, находим, что действие (4.26) инвариантно при условии равенства констант:

$$l = k = n = p. \quad (4.28)$$

В то же время инвариантность потенциального действия (4.27) для несамодуальной пары мультимплетов возможна лишь в случае

$$l' = k' = n' = p' = 0, \quad (4.29)$$

т.е. инвариантные смешанные массовые члены для такой пары не существуют. Аналогичные результаты были получены в работе [21]: из условия $N = (4, 4)$ инвариантности пробных потенциальных действий для несамодуальных мультимплетов с твистом следовало равенство нулю гармонических констант, тогда как для самодуальных мультимплетов с твистом было показано, что гармонические константы отличны от нуля и имеют фиксированную зависимость от гармоник.

Отметим также, что наиболее общее $N = (4, 4)$ суперсимметричное потенциальное действие вне массовой оболочки представляет собой сумму смешанного массового члена (4.26) с условиями (4.28) и линейных выражений (3.22) для каждого мультимплета с твистом. После исключения вспомогательных полей в полном компонентном действии возникают потенциальные и массовые члены для физических бозонных полей [21], а также взаимодействия физических фермионов типа Юкавы.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе изучено описание четырех различных типов $N = (4, 4)$ мультимплетов с твистом в двумерном $N = (2, 2)$ суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$. Показано, что вне массовой оболочки каждый тип $N = (4, 4)$ мультимплета с твистом может быть эквивалентным образом представлен парой $N = (2, 2)$ кирального суперполя и кирального суперполя с твистом, которые имеют разные трансформационные свойства относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии (образующей вместе с явной $N = (2, 2)$ суперсимметрией полную $N = (4, 4)$ суперсимметрию). Общее сигма-модельное действие вне массовой оболочки для любого фиксированного типа $N = (4, 4)$ мультимплета с твистом записывается в виде интеграла по суперпространству $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ от вещественной функции K , которая зависит от соответствующих пар кирального суперполя и кирального суперполя с твистом и подчиняется определенным дифференциальным связям. Эти связи обеспечивают инвариантность сигма-модельных действий относительно $N = (4, 4)$ суперсимметрии и имеют одинаковый вид для всех потенциалов K независимо от того, для каких типов мультимплетов с твистом они определены. Также показано, что требование инвариантности относительно дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии однозначно фиксирует потенциальные (или массовые) члены P_1, P_2 .

Для более общего случая, когда суперпотенциал K зависит от $N = (2, 2)$ киральных суперполей и киральных суперполей с твистом, принадлежащих разным $N = (4, 4)$ мультиплетам, показано, что наличие дополнительной $N = (2, 2)$ суперсимметрии требует, чтобы общее сигма-модельное действие распадалось в сумму сигма-модельных действий отдельных мультиплетов. Существует единственная возможность устроить взаимодействие между различными типами $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом — за счет добавки инвариантных смешанных массовых членов. Эти члены билинейны по киральным суперполям и киральным суперполям с твистом, которые образуют самодуальные пары $N = (4, 4)$ мультиплетов. Мультиплеты с твистом, принадлежащие различным самодуальным парам, не могут взаимодействовать между собой ни через сигма-модельные действия, ни через массовые члены.

Суммируя, подчеркнем, что проведенный анализ в рамках стандартного $N = (2, 2)$, $2D$ суперполевого формализма находится в полном соответствии с результатами, полученными в работе [21] для различных типов $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом в рамках $SU(2) \times SU(2)$ гармонического суперпространства. Развитое здесь $N = (2, 2)$, $2D$ суперполевоe описание для всех типов $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом может быть использовано во многих физических и геометрических проблемах, к которым имеют отношение такие мультиплеты.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

$N = (2, 2)$, $2D$ спинорные производные и связи

Приведем детали обозначений для спинорных производных. Используя квартетные обозначения, определим два различных вида ковариантных производных в левом и правом секторах светового конуса в $2D$. Эти производные преобразуются как дублеты относительно различных групп автоморфизмов $SU(2)$, объединенных соответственно в группы $SO(4)_L$ и $SO(4)_R$:

$$D_{i\bar{k}} = (D_{i\bar{1}}, D_{i\bar{2}}) \equiv (D_{+i}, \bar{D}_{+i}) = (D_{1\bar{k}}, D_{2\bar{k}}) \equiv (D_{+k}, \bar{D}_{+k}), \quad (\text{A.1})$$

$$D_{a\bar{b}} = (D_{a\bar{1}}, D_{a\bar{2}}) \equiv (D_{-a}, \bar{D}_{-a}) = (D_{1\bar{b}}, D_{2\bar{b}}) \equiv (D_{-b}, \bar{D}_{-b}). \quad (\text{A.2})$$

Ковариантные $N = (2, 2)$ спинорные производные D и d , соответствующие явной и скрытой суперсимметрии, определим следующим образом:

$$D_{+i} = (D_+, d_+) = D_{i\bar{1}}, \quad \bar{D}_+^i = (\bar{D}_+, \bar{d}_+) = \varepsilon^{i\bar{k}} \bar{D}_{+k} = \varepsilon^{i\bar{k}} D_{k\bar{2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$D_{-a} = (D_-, d_-) = D_{a\bar{1}}, \quad \bar{D}_-^a = (\bar{D}_-, \bar{d}_-) = \varepsilon^{a\bar{b}} \bar{D}_{-b} = \varepsilon^{a\bar{b}} D_{b\bar{2}}. \quad (\text{A.4})$$

Связь между $N = (2, 2)$ спинорными производными D , d и $SU(2)$ -дублетными производными с подчеркнутыми индексами, определенными во вторых строках уравнений (A.1), (A.2), дается соотношениями

$$D_{+\bar{k}} = D_{1\bar{k}} = (D_+, \bar{d}_+), \quad \bar{D}_+^i = \varepsilon^{i\bar{k}} \bar{D}_{\bar{k}} = (\bar{D}_+, d_+), \quad (\text{A.5})$$

$$D_{-\bar{b}} = D_{1\bar{b}} = (D_-, \bar{d}_-), \quad \bar{D}_-^a = \varepsilon^{a\bar{b}} \bar{D}_{\bar{b}} = (\bar{D}_-, d_-). \quad (\text{A.6})$$

Спинорные производные в левых координатных секторах суперпространств $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ и $\mathbb{R}^{(1,1|2,2)}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} D_{+i} &= \frac{\partial}{\partial \theta^{+i}} + i\bar{\theta}_i^+ \partial_{++}, & \bar{D}_+^i &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^+} - i\theta^{+i} \partial_{++}, \\ D_+ &= \frac{\partial}{\partial \theta^+} + i\bar{\theta}^+ \partial_{++}, & \bar{D}_+ &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^+} - i\theta^+ \partial_{++}, \\ d_+ &= \frac{\partial}{\partial \eta^+} + i\bar{\eta}^+ \partial_{++}, & \bar{d}_+ &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\eta}^+} - i\eta^+ \partial_{++}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Для аналогичных выражений в правых секторах имеем

$$\begin{aligned} D_{-a} &= \frac{\partial}{\partial \theta^{-a}} + i\bar{\theta}_a^- \partial_{--}, & \bar{D}_-^a &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_a^-} - i\theta^{-a} \partial_{--}, \\ D_- &= \frac{\partial}{\partial \theta^-} + i\bar{\theta}^- \partial_{--}, & \bar{D}_- &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^-} - i\theta^- \partial_{--}, \\ d_- &= \frac{\partial}{\partial \xi^-} + i\bar{\xi}^- \partial_{--}, & \bar{d}_- &= -\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^-} - i\xi^- \partial_{--}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Генераторы преобразований $N = (4, 4)$ суперсимметрии в суперпространстве $\mathbb{R}^{(1,1|4,4)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{+i} &= i \frac{\partial}{\partial \theta^{+i}} + \bar{\theta}_i^+ \partial_{++}, & \bar{Q}_+^i &= -i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_i^+} - \theta^{+i} \partial_{++}, \\ Q_{-a} &= i \frac{\partial}{\partial \theta^{-a}} + \bar{\theta}_a^- \partial_{--}, & \bar{Q}_-^a &= -i \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}_a^-} - \theta^{-a} \partial_{--}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Для первых компонент в разложении $N = (4, 4)$ суперполей по дополнительным грасмановым координатам η и ξ в (3.5)–(3.7) мы используем обозначения

$$\mathbf{a}|_{\eta=\xi=0} = a, \quad \bar{\mathbf{a}}|_{\eta=\xi=0} = \bar{a}, \quad \mathbf{b}|_{\eta=\xi=0} = b, \quad \bar{\mathbf{b}}|_{\eta=\xi=0} = \bar{b}, \quad (\text{A.10})$$

$$\mathcal{A}|_{\eta=\xi=0} = \alpha, \quad \bar{\mathcal{A}}|_{\eta=\xi=0} = \bar{\alpha}, \quad \mathcal{B}|_{\eta=\xi=0} = \beta, \quad \bar{\mathcal{B}}|_{\eta=\xi=0} = \bar{\beta}, \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{A}|_{\eta=\xi=0} = \mathbf{a}, \quad \bar{\mathbf{A}}|_{\eta=\xi=0} = \bar{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{B}|_{\eta=\xi=0} = \mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{B}}|_{\eta=\xi=0} = \bar{\mathbf{b}}. \quad (\text{A.12})$$

Эти $N = (2, 2)$ суперполя удовлетворяют определяющим условиям кирального суперполя и кирального суперполя с твистом:

$$\begin{aligned} \bar{D}_+ a &= 0, & \bar{D}_- a &= 0, & \bar{D}_+ b &= 0, & D_- b &= 0, \\ D_+ \bar{a} &= 0, & D_- \bar{a} &= 0, & D_+ \bar{b} &= 0, & \bar{D}_- \bar{b} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_+ \alpha &= 0, & \bar{D}_- \alpha &= 0, & \bar{D}_+ \beta &= 0, & D_- \beta &= 0, \\ D_+ \bar{\alpha} &= 0, & D_- \bar{\alpha} &= 0, & D_+ \bar{\beta} &= 0, & \bar{D}_- \bar{\beta} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_+ \mathbf{a} &= 0, & \bar{D}_- \mathbf{a} &= 0, & \bar{D}_+ \mathbf{b} &= 0, & D_- \mathbf{b} &= 0, \\ D_+ \bar{\mathbf{a}} &= 0, & D_- \bar{\mathbf{a}} &= 0, & D_+ \bar{\mathbf{b}} &= 0, & \bar{D}_- \bar{\mathbf{b}} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Эти условия следуют из $N = (4, 4)$ связей (2.7)–(2.10).

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Решение связей для K

Получим явное решение условий для суперпотенциала K , включающего различные типы $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом, принадлежащие к несамодуальной паре. Эти условия имеют вид (4.13), (4.14):

$$\frac{\partial^2 K}{\partial a^\alpha \partial A^\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2 K}{\partial \bar{a}^\alpha \partial \bar{A}^\beta} = 0. \quad (\text{Б.1})$$

Дублетные обозначения определены в (4.11).

В качестве первого шага частично разрешим (Б.1), вводя комплексные переменные

$$F_\beta(\bar{a}^\alpha, A^\alpha, \bar{A}^\alpha) \equiv \frac{\partial K}{\partial A^\beta}, \quad \bar{F}_\beta(a^\alpha, A^\alpha, \bar{A}^\alpha) \equiv \frac{\partial K}{\partial \bar{A}^\beta}. \quad (\text{Б.2})$$

Из определений F_α и $\bar{F}_\alpha$ следуют условия интегрируемости

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{A}^\beta} - \frac{\partial \bar{F}_\beta}{\partial A^\alpha} = 0. \quad (\text{Б.3})$$

Действуя на это уравнение оператором $\partial/\partial a^\rho$ и используя снова (Б.2), находим

$$\frac{\partial^2 \bar{F}_\beta}{\partial A^\alpha \partial a^\rho} = 0, \quad (\text{Б.4})$$

из чего следует, что

$$\frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial A^\beta} = G_{\alpha\beta}(A^\rho, \bar{A}^\rho). \quad (\text{Б.5})$$

Аналогично для F_α получим

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \bar{A}^\beta} = \bar{G}_{\alpha\beta}(A^\rho, \bar{A}^\rho). \quad (\text{Б.6})$$

Интегрируя уравнения (Б.5) и (Б.6), найдем общее решение для F_α и $\bar{F}_\alpha$:

$$\begin{aligned} F_\alpha(\bar{a}^\beta, A^\beta, \bar{A}^\beta) &= f_\alpha(A^\beta, \bar{A}^\beta) + \bar{G}_\alpha(A^\beta, \bar{a}^\beta), \\ \bar{F}_\alpha(a^\beta, A^\beta, \bar{A}^\beta) &= \bar{f}_\alpha(A^\beta, \bar{A}^\beta) + G_\alpha(\bar{A}^\beta, a^\beta). \end{aligned} \quad (\text{Б.7})$$

Подстановка этих решений в (Б.3) дает

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \bar{A}^\beta} - \frac{\partial \bar{f}_\beta}{\partial A^\alpha} = 0. \quad (\text{Б.8})$$

Решение последних уравнений легко находится и имеет вид

$$f_\alpha = \frac{\partial}{\partial A^\alpha} T(A^\beta, \bar{A}^\beta), \quad \bar{f}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{A}^\alpha} T(A^\beta, \bar{A}^\beta). \quad (\text{Б.9})$$

Тогда из уравнений (Б.2), (Б.7), (Б.9) получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial A^\alpha} &= F_\alpha(\bar{a}^\beta, A^\beta, \bar{A}^\beta) = \bar{G}_\alpha(A^\beta, \bar{a}^\beta) + \frac{\partial}{\partial A^\alpha} T(A^\beta, \bar{A}^\beta), \\ \frac{\partial K}{\partial \bar{A}^\alpha} &= \bar{F}_\alpha(a^\beta, A^\beta, \bar{A}^\beta) = G_\alpha(\bar{A}^\beta, a^\beta) + \frac{\partial}{\partial \bar{A}^\alpha} T(A^\beta, \bar{A}^\beta),\end{aligned}\quad (\text{Б.10})$$

или

$$\bar{G}_\alpha(A^\beta, \bar{a}^\beta) = \frac{\partial}{\partial A^\alpha} \{K - T\}, \quad G_\alpha(\bar{A}^\beta, a^\beta) = \frac{\partial}{\partial \bar{A}^\alpha} \{K - T\}. \quad (\text{Б.11})$$

Эти соотношения предполагают условия интегрируемости

$$\frac{\partial \bar{G}_\alpha}{\partial A^\beta} - \frac{\partial \bar{G}_\beta}{\partial A^\alpha} = 0, \quad \frac{\partial G_\alpha}{\partial \bar{A}^\beta} - \frac{\partial G_\beta}{\partial \bar{A}^\alpha} = 0, \quad (\text{Б.12})$$

которые, в свою очередь, дают

$$\bar{G}_\alpha = \frac{\partial}{\partial A^\alpha} G(A^\beta, \bar{a}^\beta), \quad G_\alpha = \frac{\partial}{\partial \bar{A}^\alpha} \bar{G}(\bar{A}^\beta, a^\beta). \quad (\text{Б.13})$$

Подстановка (Б.13) в (Б.11) приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial A^\alpha} \{K - T - G(A^\beta, \bar{a}^\beta)\} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{A}^\alpha} \{K - T - \bar{G}(\bar{A}^\beta, a^\beta)\} = 0, \quad (\text{Б.14})$$

которая имеет простое решение в виде

$$\begin{aligned}K - T &= G(A^\alpha, \bar{a}^\alpha) + \Omega(\bar{A}^\alpha, a^\alpha, \bar{a}^\alpha), \\ K - T &= \bar{G}(\bar{A}^\alpha, a^\alpha) + \bar{\Omega}(A^\alpha, a^\alpha, \bar{a}^\alpha).\end{aligned}\quad (\text{Б.15})$$

Выражая $K - T$ из второго из уравнений (Б.15) и подставляя в первое из уравнений (Б.14), находим

$$\bar{\Omega} = G(A^\alpha, \bar{a}^\alpha) + h(a^\alpha, \bar{a}^\alpha). \quad (\text{Б.16})$$

Аналогично, подставляя $K - T$ из первого из уравнений (Б.15) во второе из уравнений (Б.14), получим

$$\Omega = \bar{G}(\bar{A}^\alpha, a^\alpha) + h(a^\alpha, \bar{a}^\alpha). \quad (\text{Б.17})$$

В итоге полное решение уравнений для суперпотенциала K представляется следующей суммой четырех слагаемых:

$$K(A^\alpha, \bar{A}^\alpha, a^\alpha, \bar{a}^\alpha) = T(A^\alpha, \bar{A}^\alpha) + h(a^\alpha, \bar{a}^\alpha) + G(A^\alpha, \bar{a}^\alpha) + \bar{G}(\bar{A}^\alpha, a^\alpha). \quad (\text{Б.18})$$

Учитывая определение дублетных величин A^α, a^α и их комплексно-сопряженных, а также уравнение Лапласа (4.12), приходим к заключению, что первые два члена в (Б.18) соответствуют потенциалам $N = (4, 4)$ суперсимметричных сигма-модельных действий для двух независимых мультиплетов с твистом $\hat{q}^{i\alpha}$ и $\hat{q}^{i\bar{\alpha}}$. Последние два члена могут быть устранены обобщенным кэлеровым калибровочным преобразованием в (4.3) с калибровочной функцией g . Таким образом, они не дают вклада в $N = (2, 2)$ суперполевое действие.

Итак, окончательный результат для потенциала K имеет вид

$$K(A^\alpha, \bar{A}^\alpha, a^\alpha, \bar{a}^\alpha) = T(A^\alpha, \bar{A}^\alpha) + h(a^\alpha, \bar{a}^\alpha). \quad (\text{Б.19})$$

В случае, когда $N = (2, 2)$ киральные суперполя и киральные суперполя с твистом группируются в самодуальную пару $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом, рассмотрение проводится аналогично. Полученный результат можно также обобщить на случай с произвольным числом разных $N = (4, 4)$ мультиплетов с твистом.

Благодарности. Авторы благодарны за частичную поддержку INTAS, грант № 00-00254, и РФФИ, грант № 03-02-17440. Работа Е.И. также поддержана РФФИ-ДФГ, грант № 02-02-04002, и программой “Гейзенберг–Ландау”.

Список литературы

- [1] *E. A. Ivanov, S. O. Krivonos.* J. Phys. A. 1984. V. 17. P. L671.
- [2] *S. J. Gates Jr., C. Hull, M. Roček.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 248. P. 157.
- [3] *P. S. Howe, G. Papadopoulos.* Nucl. Phys. B. 1987. V. 289. P. 264.
- [4] *E. A. Ivanov, S. O. Krivonos, V. M. Leviant.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 304. P. 601.
- [5] *A. Sevrin, W. Troost, A. Van Proeyen.* Phys. Lett. B. 1988. V. 208. P. 447; *U. Lindström.* Phys. Lett. B. 2004. V. 587. P. 216; hep-th/0401100.
- [6] *A. Sevrin, Ph. Spindel, W. Troost, A. Van Proeyen.* Phys. Lett. B. 1988. V. 206. P. 71; Nucl. Phys. B. 1988. V. 308. P. 662.
- [7] *C. Ahn, M. Roček, K. Schoutens, A. Sevrin.* Superspace WZW models and black holes. hep-th/9110035.
- [8] *E. Kiritsis, C. Kounas, D. Lüst.* Int. J. Mod. Phys. A. 1994. V. 9. P. 1361; hep-th/9308124.
- [9] *M. Roček, K. Schoutens, A. Sevrin.* Phys. Lett. B. 1991. V. 265. P. 303.
- [10] *C. Callan, J. Harvey, A. Strominger.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 359. P. 611.
- [11] *T. Buscher, U. Lindstrom, M. Roček.* Phys. Lett. B. 1988. V. 202. P. 94; *A. Sevrin, J. Troost.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 492. P. 623; hep-th/9610102; The geometry of supersymmetric sigma-models. hep-th/9610103; *M. Grisaru, M. Massar, A. Sevrin, J. Troost.* Fortsch. Phys. 1999. V. 47. P. 301; hep-th/9801080; *J. Bogaerts, A. Sevrin, S. van der Loo, S. van Gils.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 562. P. 277; hep-th/9905141.
- [12] *U. Lindstrom, I. T. Ivanov, M. Roček.* Phys. Lett. B. 1994. V. 328. P. 49; hep-th/9401091; *I. T. Ivanov, B. Kim, M. Roček.* Phys. Lett. B. 1995. V. 343. P. 133; hep-th/9406063.
- [13] *O. Gorovoy, E. Ivanov.* Nucl. Phys. B. 1992. V. 381. P. 394.
- [14] *S. J. Gates Jr.* Phys. Lett. B. 1994. V. 338. P. 31; hep-th/9410149.
- [15] *A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Class. Q. Grav. 1984. V. 1. P. 469; *A. Galperin, E. Ivanov, V. Ogievetsky, E. Sokatchev.* Harmonic Superspace. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
- [16] *E. Ivanov, A. Sutulin.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 432. P. 246; 1997. V. 483. P. 531 (Erratum); hep-th/9404098.
- [17] *E. Ivanov, A. Sutulin.* Class. Q. Grav. 1997. V. 14. P. 843; hep-th/9604186; *S. Bellucci, E. Ivanov.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 587. P. 445; hep-th/0003154.
- [18] *E. A. Ivanov.* Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 2201; hep-th/9502073; Phys. Lett. B. 1995. V. 356. P. 239; hep-th/9504070.
- [19] *E. A. Ivanov.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1997. V. 52A. P. 354.
- [20] *S. J. Gates Jr., S. V. Ketov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 418. P. 111; P. 119; hep-th/9504077.
- [21] *E. Ivanov, A. Sutulin.* Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 045022; hep-th/0403130.
- [22] *S. J. Gates Jr., L. Rana.* Phys. Lett. B. 1995. V. 345. P. 233; hep-th/9411091; *R. Dhanawitayapol, S. J. Gates Jr., L. Rana.* Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 264; hep-th/9606108.
- [23] *W. Siegel.* Class. Q. Grav. 1985. V. 2. P. L41.

Поступила в редакцию 2.XI.2004 г.