Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Адамян, Н. В. Антоненко, Э. Каноков, В. В. Саргсян, Квантовые немарковские стохастические уравнения, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 1, 87–101

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1882>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:32:39

© 2005 г.

Г. Г. Адамян^{*,†}, Н. В. Антоненко^{*},
З. Каноков^{*,†}, В. В. Саргсян^{*}

КВАНТОВЫЕ НЕМАРКОВСКИЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Из обобщенных немарковских уравнений Ланжевена выведены квантовые диффузионные уравнения с транспортными коэффициентами, зависящими явно от времени. Получены обобщенные флуктуационно-диссипационные соотношения. В рамках микроскопической модели обоснован аксиоматический подход Линдблада. В случае немарковской динамики найдены наборы диффузионных коэффициентов, обеспечивающих чистоту состояния в любой момент времени.

Ключевые слова: открытые квантовые системы, коэффициенты трения и диффузии, немарковская динамика.

1. ВВЕДЕНИЕ

С проблемой описания открытых квантовых систем мы сталкиваемся во многих областях физики. Для получения уравнений движения затухающего квантового осциллятора в квантово-механическом термостате разработаны различные методы [1]–[5]. Однако рассмотрение релаксации системы в основном ограничивалось марковским пределом (мгновенная диссипация, гауссовские дельта-коррелированные флуктуации) и пределами слабой связи между осциллятором и термостатом или высоких температур. Если же изменения в системе происходят достаточно быстро, то необходимо принять во внимание еще и нелокальность диссипации. Существует много примеров, когда марковское приближение неприменимо, например, туннелирование через потенциальный барьер при низкой температуре термостата. Изучение поведения диссипативной квантовой системы без перехода к пределам слабой связи или высоких температур вызвало большой интерес к простым и точно решаемым моделям [6]–[8]. В этих моделях термостат представляется набором гармонических осцилляторов, взаимодействие которых с коллективной подсистемой гармонического осциллятора описывается линейной связью между координатами. Плотность осцилляторов и константы связи между термостатом

^{*}Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия. E-mail: adamian@thsun1.jinr.ru

[†]Национальный университет, Ташкент, Узбекистан. E-mail: zokirjon@yandex.ru

[‡]Институт ядерной физики, Ташкент, Узбекистан

и подсистемой выбираются такими, чтобы уравнения движения для средних принимали классический вид.

Целью данной статьи является разработка метода определения нестационарных коэффициентов трения и диффузии для коллективной подсистемы в случае произвольной температуры и затухания. Эти транспортные коэффициенты также включают в себя немарковские эффекты. В качестве отправной точки используется ланжевеновское приближение, которое широко применяется для описания флуктуационных и диссипативных эффектов в макроскопических системах [2], [3]. В кинетической теории метод Ланжевена значительно упрощает вычисление неравновесных квантовых и тепловых флуктуаций и обеспечивает ясную картину динамики процесса. Полученные уравнения движения проверяются с точки зрения их соответствия квантовой флуктуационно-диссипационной теореме. Из сравнения уравнений движения для средних и дисперсий с их классическими аналогами выводятся выражения для зависящих от времени коэффициентов трения и диффузии. Микроскопически обосновывается аксиоматический подход Линдблада [9]–[12] к описанию открытых квантовых систем. Отдельно рассматриваются наборы диффузионных коэффициентов, при которых чистое состояние остается чистым в любой момент времени.

2. КВАНТОВАЯ НЕМАРКОВСКАЯ ДИНАМИКА

2.1. Обобщенные немарковские уравнения Ланжевена. Определим микроскопический гамильтониан H полной системы (термостат + коллективная подсистема), который будем использовать для получения квантовых немарковских уравнений Ланжевена и зависящих от времени транспортных коэффициентов для коллективной подсистемы. В работах [13] построен квантовый гамильтониан, зависящий явно от коллективной координаты q , канонически сопряженного коллективного импульса p и внутренних степеней свободы:

$$\begin{aligned} H &= H_c + H_b + H_{cb}, \\ H_c &= p \frac{1}{2\mu(q)} p + U(q), \quad H_b = \sum_{\nu} \hbar \omega_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu}, \\ H_{cb} &= \sum_{\nu} V_{\nu}(q) (b_{\nu}^{\dagger} + b_{\nu}) + i \sum_{\nu} G_{\nu}(q, p) (b_{\nu}^{\dagger} - b_{\nu}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $b_{\nu}^{\dagger}$ и b_{ν} – фоновые операторы рождения и уничтожения, соответственно, описывающие внутренние возбуждения системы с энергией $\hbar \omega_{\nu}$. Операторы H_c и H_b являются гамильтонианами коллективной и внутренней подсистем, соответственно. Третий член H_{cb} в (1) описывает связь коллективного движения с внутренними возбуждениями и является источником появления диссипативных членов в уравнениях для операторов коллективных переменных. При условии $G_{\nu}(q, p) = \{\tilde{G}_{\nu}(q), p\}_{+} = \tilde{G}_{\nu}(q)p + p\tilde{G}_{\nu}(q)$ гамильтониан H является обратимым по времени, т. е. в простейшем случае связь с термостатом линейна по p . Наша цель – вывести и аналитически решить уравнения Ланжевена для операторов p и q .

Используя гамильтониан (1), получаем систему квантовых уравнений Гейзенберга для операторов, относящихся к коллективному и внутреннему движениям:

$$\dot{q} = \frac{i}{\hbar}[H, q] = \frac{1}{2}\{\mu^{-1}(q), p\}_+ + i \sum_{\nu} G'_{\nu,p}(b_{\nu}^+ - b_{\nu}), \quad (2)$$

$$\dot{p} = \frac{i}{\hbar}[H, p] = -H'_{c,q}(q, p) - \sum_{\nu} V'_{\nu,q}(b_{\nu}^+ + b_{\nu}) - i \sum_{\nu} G'_{\nu,q}(b_{\nu}^+ - b_{\nu}),$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_{\nu}^+ &= \frac{i}{\hbar}[H, b_{\nu}^+] = i\omega_{\nu}b_{\nu}^+ + \frac{1}{\hbar}(iV_{\nu}(q) + G_{\nu}(q, p)), \\ \dot{b}_{\nu} &= \frac{i}{\hbar}[H, b_{\nu}] = -i\omega_{\nu}b_{\nu} + \frac{1}{\hbar}(-iV_{\nu}(q) + G_{\nu}(q, p)). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} H'_{c,q}(q, p) &= \frac{\partial H_c(q, p)}{\partial q}, & V'_{\nu,q} &= \frac{\partial V_{\nu}(q(t))}{\partial q}, \\ G'_{\nu,p} &= \frac{\partial G_{\nu}(q(t), p(t))}{\partial p}, & G'_{\nu,q} &= \frac{\partial G_{\nu}(q(t), p(t))}{\partial q}. \end{aligned}$$

Подставляя решения уравнений (3) вида

$$\begin{aligned} b_{\nu}^+(t) + b_{\nu}(t) &= f_{\nu}^+(t) + f_{\nu}(t) - \frac{2V_{\nu}(q)}{\hbar\omega_{\nu}} - \\ &\quad - \frac{i}{\omega_{\nu}} \int_0^t d\tau [\dot{\Phi}^+(\tau)e^{i\omega_{\nu}(t-\tau)} - \dot{\Phi}(\tau)e^{-i\omega_{\nu}(t-\tau)}], \\ b_{\nu}^+(t) - b_{\nu}(t) &= f_{\nu}^+(t) - f_{\nu}(t) + \frac{2iG_{\nu}(q, p)}{\hbar\omega_{\nu}} - \\ &\quad - \frac{i}{\omega_{\nu}} \int_0^t d\tau [\dot{\Phi}^+(\tau)e^{i\omega_{\nu}(t-\tau)} + \dot{\Phi}(\tau)e^{-i\omega_{\nu}(t-\tau)}], \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} f_{\nu}(t) &= \left[b_{\nu}(0) + \frac{i}{\omega_{\nu}} \Phi(0) \right] e^{-i\omega_{\nu}t}, \\ \Phi(t) &= \frac{-iV_{\nu}(q(t)) + G_{\nu}(q(t), p(t))}{\hbar}, \end{aligned}$$

в уравнения (2), получаем систему нелинейных интегродифференциальных стохастических уравнений

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{2}\{\tilde{\mu}^{-1}(q), p\}_+ - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{K_{GV}(t, \tau), \dot{q}(\tau)\}_+ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{K_{GG}(t, \tau), \dot{p}(\tau)\}_+ + F_q(t), \\ \dot{p} &= -\tilde{H}'_{c,q}(q, p) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{K_{VV}(t, \tau), \dot{q}(\tau)\}_+ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{K_{VG}(t, \tau), \dot{p}(\tau)\}_+ + F_p(t). \end{aligned} \quad (5)$$

При получении данных уравнений мы пренебрегли следующими членами второго порядка по $\hbar$:

$$\begin{aligned} & [[G'_{\nu,p}(t), \dot{q}(t')], V'_{\nu,q}(t')], \quad [[G'_{\nu,q}(t), \dot{q}(t')], V'_{\nu,q}(t')], \quad [[G'_{\nu,q}(t), \dot{q}(t')], G'_{\nu,q}(t')], \\ & [[G'_{\nu,p}(t), \dot{q}(t')], G'_{\nu,q}(t')], \quad [[G'_{\nu,p}(t), \dot{p}(t')], G'_{\nu,p}(t')], \quad [[G'_{\nu,q}(t), \dot{p}(t')], G'_{\nu,p}(t')]. \end{aligned}$$

В случае линейной связи по импульсу (G_ν – линейная функция p) и общего вида связи по координате (V_ν – произвольная функция q) уравнения движения (5) являются точными. Поскольку в течение короткого интервала времени связь в системе можно линеаризовать, случай линейной связи по q и p представляет большой интерес для точных аналитических вычислений транспортных коэффициентов на этом интервале времени.

Коллективный гамильтониан

$$\tilde{H}_c(q, p) = p \frac{1}{2\tilde{\mu}(q)} p + \tilde{U}(q, p),$$

производная которого присутствует во втором уравнении системы (5), содержит перенормированные массу

$$\tilde{\mu}^{-1}(q(t)) = \mu^{-1}(q(t)) - 2 \sum_{\nu} \frac{[G'_{\nu,p}(t)]^2}{\hbar\omega_{\nu}}$$

и потенциальную энергию

$$\tilde{U}(q(t)) = U(q(t)) - \sum_{\nu} \frac{[V_{\nu}(q(t))]^2}{\hbar\omega_{\nu}}.$$

В правых частях уравнений движения (5) в членах, пропорциональных $\dot{q}$ и $\dot{p}$ [6], выделены диссипативные ядра,

$$\begin{aligned} K_{GV}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} \left[\{G'_{\nu,p}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+ \sin(\omega_{\nu}[t - \tau]) - \right. \\ &\quad \left. - \{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]) \right], \\ K_{VG}(t, \tau) &= - \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} \left[\{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]) + \right. \\ &\quad \left. + \{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \sin(\omega_{\nu}[t - \tau]) \right], \\ K_{VV}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} \left[(\{V'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+ + \{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+) \times \right. \\ &\quad \times \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]) + \\ &\quad \left. + (\{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+ - \{G'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+) \sin(\omega_{\nu}[t - \tau]) \right], \\ K_{GG}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} \{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]). \end{aligned} \tag{6}$$

Эти ядра не зависят от числа фононов, и следовательно, от температуры T термостата. Температура и флуктуации входят в рассмотрение через начальные условия для операторов термостата. Операторы

$$\begin{aligned} F_q(t) &= \sum_{\nu} F_q^{\nu}(t) = i \sum_{\nu} G'_{\nu,p}(t) [f_{\nu}^{+}(t) - f_{\nu}(t)], \\ F_p(t) &= \sum_{\nu} F_p^{\nu}(t) = - \sum_{\nu} V'_{\nu,q}(t) [f_{\nu}^{+}(t) + f_{\nu}(t)] - i \sum_{\nu} G'_{\nu,q}(t) [f_{\nu}^{+}(t) - f_{\nu}(t)] \end{aligned} \quad (7)$$

в (5) играют роль случайных сил по координате и импульсу и зависят от $q(t)$, $p(t)$ и начальных условий внутренней подсистемы. В статистической физике операторы $F_q^{\nu}(t)$ и $F_p^{\nu}(t)$ обычно отождествляются с флуктуациями из-за неопределенности начальных условий для операторов термостата. Для определения статистических свойств этих флуктуаций рассмотрим ансамбль начальных состояний, в котором заданы $q(0)$ и $p(0)$, а начальные операторы термостата выбираются из канонического ансамбля [6]. В этом ансамбле флуктуации $F_q^{\nu}(t)$ и $F_p^{\nu}(t)$ распределены по Гауссу, имеют нулевые средние значения

$$\langle \langle F_q^{\nu}(t) \rangle \rangle = \langle \langle F_p^{\nu}(t) \rangle \rangle = 0 \quad (8)$$

и ненулевые вторые моменты. Символ $\langle \langle \dots \rangle \rangle$ обозначает среднее по переменным термостата. Гауссово распределение случайных сил соответствует случаю, когда термостат представляется набором гармонических осцилляторов [2], [3], [5]. В данной работе для расчета корреляционных функций флуктуаций используется термостат со статистикой Бозе–Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \langle \langle f_{\nu}^{+}(t) f_{\nu'}^{+}(t') \rangle \rangle &= \langle \langle f_{\nu}(t) f_{\nu'}(t') \rangle \rangle = 0, \\ \langle \langle f_{\nu}^{+}(t) f_{\nu'}(t') \rangle \rangle &= \delta_{\nu,\nu'} n_{\nu} e^{i\omega_{\nu}(t-t')}, \\ \langle \langle f_{\nu}(t) f_{\nu'}^{+}(t') \rangle \rangle &= \delta_{\nu,\nu'} (n_{\nu} + 1) e^{-i\omega_{\nu}(t-t')}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $n_{\nu} = [\exp(\hbar\omega_{\nu}/T) - 1]^{-1}$ – температурные числа заполнения для фононов.

Таким образом, получена система обобщенных нелинейных уравнений Ланжевена (5). Присутствие интегральных членов в уравнениях движения означает, что немарковская система обладает памятью о движении по траектории, предшествующей моменту времени t . Второе из уравнений (5) содержит также случайную силу, что приводит к ряду математических трудностей при решении системы [2]. Аналитическое решение возможно, если заменить в уравнениях (5) функционалы $\tilde{\mu}$, $V'_{\nu,q}$, $G'_{\nu,q}$ и $G'_{\nu,p}$ их средними значениями, считая эти функционалы слабо меняющимися в течение интервала времени t , и аппроксимировать перенормированный потенциал гармоническим (или перевернутым) осциллятором $\tilde{U} = \tilde{\delta}q^2/2$. В этом случае получаем систему обобщенных уравнений Ланжевена с диссипативными ядрами, обладающими памятью. Для их решения применим к функциям $q(t)$ и $p(t)$ преобразование Лапласа $\mathcal{L}$, чтобы получить линейные

уравнения для их образов:

$$\begin{aligned}
q(s) [s(1 + K_{GV}(s))] - p(s) \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} + sK_{GG}(s) \right] &= \\
= q(0) [1 + K_{GV}(s)] - p(0) K_{GG}(s) + F_q(s), \\
q(s) [\tilde{\delta} + sK_{VV}(s)] + p(s) s [1 - K_{VG}(s)] &= \\
= q(0) K_{VV}(s) + p(0) [1 - K_{VG}(s)] + F_p(s).
\end{aligned} \tag{10}$$

Для решения данной системы уравнений мы должны найти корни s_i ее детерминанта

$$d(s) = s^2(1 + K_{GV}(s))(1 - K_{VG}(s)) + (\tilde{\delta} + sK_{VV}(s)) \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} + sK_{GG}(s) \right).$$

Зная выражения для образов, получаем явные выражения для оригиналов

$$\begin{aligned}
q(t) &= A_t q(0) + B_t p(0) + \int_0^t d\tau [C_\tau F_q(t - \tau) + \tilde{C}_\tau F_p(t - \tau)], \\
p(t) &= M_t q(0) + N_t p(0) + \int_0^t d\tau [L_\tau F_p(t - \tau) + \tilde{L}_\tau F_q(t - \tau)],
\end{aligned} \tag{11}$$

где коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned}
A_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 + K_{GV}(s))(1 - K_{VG}(s)) + (1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s))K_{VV}(s)}{d(s)} \right], \\
N_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 - K_{VG}(s))(1 + K_{GV}(s)) + (\tilde{\delta} + sK_{VV}(s))K_{GG}(s)}{d(s)} \right], \\
B_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{\mu}^{-1}(1 - K_{VG}(s))}{d(s)} \right], \quad M_t = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{\delta}(1 + K_{GV}(s))}{d(s)} \right], \\
C_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 - K_{VG}(s))}{d(s)} \right], \quad L_t = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(1 + K_{GV}(s))}{d(s)} \right], \\
\tilde{C}_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s)}{d(s)} \right], \quad \tilde{L}_t = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\tilde{\delta} + sK_{VV}(s)}{d(s)} \right].
\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{L}^{-1}$ обозначает обратное преобразование Лапласа, $K_{VV}(s)$, $K_{GG}(s)$, $K_{GV}(s)$, $K_{VG}(s)$ – образы Лапласа диссипативных ядер. Символы t и τ указывают на временную зависимость. С помощью теоремы о вычетах решения $q(t)$ и $p(t)$ могут быть выражены через корни s_i детерминанта $d(s)$.

2.2. Флуктуационно-диссипационные соотношения. Флуктуационно-диссипационное соотношение связывает макроскопическую величину, описывающую диссипацию энергии коллективной подсистемы, с микроскопической характеристикой внутренней подсистемы, выражающей флуктуации случайных сил. Таким образом, данное соотношение связывает равновесную и неравновесную (квазиравновесную) характеристики системы. Используя статистические свойства (8) и (9) случайных сил (7) и

пренебрегая членами порядка $O(\hbar)$ (это соответствует тому, что мы пренебрегли двойными коммутаторами в (5)), получаем следующие соотношения для симметризованных корреляционных функций случайных сил $\phi_{kk'}^\nu(t, t') = \langle \langle F_k^\nu(t) F_{k'}^\nu(t') + F_{k'}^\nu(t') F_k^\nu(t) \rangle \rangle$, $k, k' = q, p$:

$$\begin{aligned} \phi_{qp}^\nu(t, t') &= [2n_\nu + 1](-\{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,q}(t')\}_+ \cos(\omega_\nu[t - t']) + \\ &\quad + \{G'_{\nu,p}(t), V'_{\nu,q}(t')\}_+ \sin(\omega_\nu[t - t'])), \\ \phi_{pq}^\nu(t, t') &= -[2n_\nu + 1]\left(\{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(t')\}_+ \cos(\omega_\nu[t - t']) + \right. \\ &\quad \left. + \{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(t')\}_+ \sin(\omega_\nu[t - t'])\right), \\ \phi_{pp}^\nu(t, t') &= [2n_\nu + 1]\left(\{V'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(t')\}_+ + \{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(t')\}_+ \right) \cos(\omega_\nu[t - t']) + \\ &\quad + (\{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(t')\}_+ - \{G'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(t')\}_+) \sin(\omega_\nu[t - t']), \\ \phi_{qq}^\nu(t, t') &= [2n_\nu + 1]\{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,p}(t')\}_+ \cos(\omega_\nu[t - t']). \end{aligned} \quad (12)$$

Сохранение отброшенных членов привело бы к дополнительным соотношениям. Используя уравнения (6) и (12) и учитывая, что $2n_\nu + 1 = \text{cth}[\hbar\omega_\nu/(2T)]$, получаем квантовые флуктуационно-диссипационные соотношения

$$\sum_\nu \phi_{qp}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{GV}(t, t'), \quad (13)$$

$$\sum_\nu \phi_{pq}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{VG}(t, t'), \quad (14)$$

$$\sum_\nu \phi_{pp}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{VV}(t, t'), \quad (15)$$

$$\sum_\nu \phi_{qq}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{GG}(t, t'). \quad (16)$$

Справедливость флуктуационно-диссипационных соотношений означает, что диссипативные ядра в немарковских динамических уравнениях движения (5) определены правильно. Квантовое флуктуационно-диссипационное соотношение подобного вида было получено в работе [6] и в цитируемых в ней работах для простых случаев ФС-осциллятора ($U(q) = \mu\omega_0^2 q^2/2$, $G_\nu = 0$, $V_\nu = \alpha_\nu q$) и RWA-осциллятора ($U(q) = \mu\omega_0^2 q^2/2$, $G_\nu = g_\nu p$, $V_\nu = \alpha_\nu q$, $|\alpha_\nu|^2/|g_\nu|^2 = (\mu\omega_0)^2$). В настоящей работе квантовая флуктуационно-диссипационная теорема обобщена на случай произвольного гамильтониана $H_{\text{сб}}$. Квантовые флуктуационно-диссипационные соотношения отличаются от классических и сводятся к ним в пределе большой температуры T (или $\hbar \rightarrow 0$), где $\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]/(\hbar\omega_\nu) \rightarrow 1/(2T)$. Классические соотношения содержат лишь температурные флуктуации. В (13)–(16) дополнительно учитываются еще и квантовые флуктуации. Поскольку уравнения движения (5) для коллективных координат и импульсов соответствуют флуктуационно-диссипационным соотношениям, наш формализм обеспечивает основу для описания квантовых статистических эффектов коллективного движения.

2.3. Транспортные коэффициенты. Используя явные зависимости p и q от времени, получаем их основные характеристики, т.е. средние значения (первые моменты):

$$\begin{aligned}\langle q(t) \rangle &= A_t \langle q(0) \rangle + B_t \langle p(0) \rangle, \\ \langle p(t) \rangle &= M_t \langle q(0) \rangle + N_t \langle p(0) \rangle,\end{aligned}\tag{17}$$

и корреляционные функции

$$\begin{aligned}\sigma_{q_t q_{t'}} &= \langle q(t) q(t') \rangle = A_t A_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + B_t B_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + A_t B_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + B_t A_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{q_t q_{t'}}, \\ \sigma_{p_t p_{t'}} &= \langle p(t) p(t') \rangle = M_t M_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + N_t N_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + M_t N_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + N_t M_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{p_t p_{t'}}, \\ \sigma_{q_t p_{t'}} &= \langle q(t) p(t') \rangle = A_t M_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + B_t N_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + A_t N_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + B_t M_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{q_t p_{t'}}, \\ \sigma_{p_t q_{t'}} &= \langle p(t) q(t') \rangle = M_t A_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + N_t B_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + N_t A_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + M_t B_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + J_{p_t q_{t'}},\end{aligned}\tag{18}$$

где

$$\begin{aligned}J_{q_t q_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [C_\tau C_{\tau'} I_{qq}(t - \tau, t' - \tau') + C_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{qp}(t - \tau, t' - \tau') + \\ &\quad + \tilde{C}_\tau C_{\tau'} I_{pq}(t - \tau, t' - \tau') + \tilde{C}_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{pp}(t - \tau, t' - \tau')], \\ J_{p_t p_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [L_\tau L_{\tau'} I_{pp}(t - \tau, t' - \tau') + L_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{pq}(t - \tau, t' - \tau') + \\ &\quad + \tilde{L}_\tau L_{\tau'} I_{qp}(t - \tau, t' - \tau') + \tilde{L}_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{qq}(t - \tau, t' - \tau')], \\ J_{q_t p_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [C_\tau L_{\tau'} I_{qp}(t - \tau, t' - \tau') + \tilde{C}_\tau L_{\tau'} I_{pp}(t - \tau, t' - \tau') + \\ &\quad + \tilde{C}_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{pq}(t - \tau, t' - \tau') + C_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{qq}(t - \tau, t' - \tau')], \\ J_{p_t q_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [L_\tau C_{\tau'} I_{pq}(t - \tau, t' - \tau') + \tilde{L}_\tau C_{\tau'} I_{qq}(t - \tau, t' - \tau') + \\ &\quad + \tilde{L}_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{qp}(t - \tau, t' - \tau') + L_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{pp}(t - \tau, t' - \tau')].\end{aligned}\tag{19}$$

В последних соотношениях $I_{k,k'}(t, \tau) = \langle F_k(t) F_{k'}(\tau) \rangle$, $k, k' = p, q$, и $\langle \dots \rangle$ указывает на усреднение по всей системе.

Чтобы определить коэффициенты трения и диффузии, рассмотрим уравнения для первых и вторых моментов и корреляционных функций. Дифференцируя по времени уравнения (17) и (18), получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle q(t) \rangle &= -\lambda_q(t) \langle q(t) \rangle + \frac{1}{m(t)} \langle p(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt} \langle p(t) \rangle &= -\xi(t) \langle q(t) \rangle - \lambda_p(t) \langle p(t) \rangle,\end{aligned}\tag{20}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{q_t q_{t'}}}{dt} &= -\lambda_q(t)\sigma_{q_t q_{t'}} + \frac{1}{m(t)}\sigma_{p_t q_{t'}} + D_{q_t q_{t'}}, \\
\frac{d\sigma_{p_t p_{t'}}}{dt} &= -\lambda_p(t)\sigma_{p_t p_{t'}} - \xi(t)\sigma_{q_t p_{t'}} + D_{p_t p_{t'}}, \\
\frac{d\sigma_{q_t p_{t'}}}{dt} &= -\lambda_q(t)\sigma_{q_t p_{t'}} + \frac{1}{m(t)}\sigma_{p_t p_{t'}} + D_{q_t p_{t'}}, \\
\frac{d\sigma_{p_t q_{t'}}}{dt} &= -\lambda_p(t)\sigma_{p_t q_{t'}} - \xi(t)\sigma_{q_t q_{t'}} + D_{p_t q_{t'}},
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\lambda_q(t) = \frac{\dot{A}_t N_t - \dot{B}_t M_t}{B_t M_t - A_t N_t}, \tag{22}$$

$$\lambda_p(t) = \frac{A_t \dot{N}_t - B_t \dot{M}_t}{B_t M_t - A_t N_t}, \tag{23}$$

$$\frac{1}{m(t)} = \frac{\dot{A}_t B_t - \dot{B}_t A_t}{B_t M_t - A_t N_t}, \tag{24}$$

$$\xi(t) = \frac{\dot{M}_t N_t - \dot{N}_t M_t}{B_t M_t - A_t N_t}, \tag{25}$$

$$D_{q_t q_{t'}} = \lambda_q(t)J_{q_t q_{t'}} - \frac{J_{p_t q_{t'}}}{m(t)} + \frac{dJ_{q_t q_{t'}}}{dt}, \tag{26}$$

$$D_{p_t p_{t'}} = \lambda_p(t)J_{p_t p_{t'}} + \xi(t)J_{q_t p_{t'}} + \frac{dJ_{p_t p_{t'}}}{dt}, \tag{27}$$

$$D_{q_t p_{t'}} = \lambda_q(t)J_{q_t p_{t'}} - \frac{J_{p_t p_{t'}}}{m(t)} + \frac{dJ_{q_t p_{t'}}}{dt}, \tag{28}$$

$$D_{p_t q_{t'}} = \lambda_p(t)J_{p_t q_{t'}} + \xi(t)J_{q_t q_{t'}} + \frac{dJ_{p_t q_{t'}}}{dt}. \tag{29}$$

Здесь $m(t)$ зависит от $\tilde{m}$ посредством уравнения (24) и верхняя точка в (22)–(25) обозначает производную по времени.

Гипотеза Онзагера утверждает, что затухание флуктуаций подчиняется макроскопическим уравнениям, аналогичным уравнениям, описывающим приближение средних к равновесным значениям [3], [4]. Из (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\langle q(t) \rangle + \left[\lambda_p(t) + \lambda_q(t) + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \right] \frac{d}{dt}\langle q(t) \rangle + \\
&\quad + \left[\frac{\xi(t)}{m(t)} + \lambda_p(t)\lambda_q(t) + \dot{\lambda}_q(t) + \lambda_q(t)\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \right] \langle q(t) \rangle = 0, \\
&\frac{d^2}{dt^2}\sigma_{q_t q_{t'}} + \left[\lambda_p(t) + \lambda_q(t) + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \right] \frac{d}{dt}\sigma_{q_t q_{t'}} + \\
&\quad + \left[\frac{\xi(t)}{m(t)} + \lambda_p(t)\lambda_q(t) + \dot{\lambda}_q(t) + \lambda_q(t)\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \right] \sigma_{q_t q_{t'}} - \\
&\quad - \left[\frac{\dot{m}(t)}{m(t)} + \lambda_p(t) \right] D_{q_t q_{t'}} - \frac{D_{p_t q_{t'}}}{m(t)} - \frac{dD_{q_t q_{t'}}}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

Если $t' = 0$, то $D_{k_t l_{t'}=0} = 0$ ($k, l = q, p$) в (21), и гипотеза Онзагера справедлива при $t > 0$, поскольку уравнения для корреляций в этом случае идентичны уравнениям для средних. При $t' > 0$ зависимости от времени коэффициентов $D_{k_t l_{t'}}$ и корреляций $\sigma_{k_t l_{t'}}$ имеют тот же вид, уравнения для корреляций отличаются ненулевыми $D_{k_t l_{t'}}$ от уравнений для средних, и гипотеза Онзагера несправедлива. Следовательно, о справедливости гипотезы Онзагера в случае немарковского затухающего осциллятора можно говорить лишь при $t' = 0$ или $D_{k_t l_{t'}} = 0$.

При $t = t'$ получаем из (21) уравнения для дисперсий по координате, $\sigma_{qq}(t) = \langle q^2(t) \rangle - \langle q(t) \rangle^2 = \sigma_{q_t q_t} - \langle q(t) \rangle^2$, по импульсу, $\sigma_{pp}(t) = \langle p^2(t) \rangle - \langle p(t) \rangle^2 = \sigma_{p_t p_t} - \langle p(t) \rangle^2$, и по координате-импульсу, $\sigma_{qp}(t) = \langle p(t)q(t) + q(t)p(t) \rangle - \langle p(t) \rangle \langle q(t) \rangle / 2 = (\sigma_{q_t p_t} + \sigma_{p_t q_t}) / 2 - \langle p(t) \rangle \langle q(t) \rangle$:

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{qq}(t) &= -2\lambda_q(t)\sigma_{qq}(t) + \frac{2\sigma_{qp}(t)}{m(t)} + 2D_{qq}(t), \\ \dot{\sigma}_{pp}(t) &= -2\lambda_p(t)\sigma_{pp}(t) - 2\xi(t)\sigma_{qp}(t) + 2D_{pp}(t), \\ \dot{\sigma}_{qp}(t) &= -[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]\sigma_{qp}(t) - \xi(t)\sigma_{qq}(t) + \frac{\sigma_{pp}(t)}{m(t)} + 2D_{qp}(t).\end{aligned}\quad (30)$$

Уравнения (20) и (30) содержат коэффициенты трения по координате $\lambda_q(t)$ и по импульсу $\lambda_p(t)$, перенормированную обратную массу $1/m(t)$, перенормированный коэффициент жесткости $\xi(t)$ и коэффициенты диффузии по координате

$$D_{qq}(t) = \lambda_q(t)J_{q_t q_t} - \frac{J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}}{2m(t)} + \frac{\dot{J}_{q_t q_t}}{2}, \quad (31)$$

по импульсу

$$D_{pp}(t) = \lambda_p(t)J_{p_t p_t} + \frac{\xi(t)}{2}(J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \frac{\dot{J}_{p_t p_t}}{2}, \quad (32)$$

и по координате-импульсу

$$D_{qp}(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_p(t) + \lambda_q(t)}{2}(J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \xi(t)J_{q_t q_t} - \frac{J_{p_t p_t}}{m(t)} + \frac{\dot{J}_{q_t p_t} + \dot{J}_{p_t q_t}}{2} \right]. \quad (33)$$

Таким образом, мы получили уравнения для первых и вторых моментов с транспортными коэффициентами, зависящими явно от времени, коллективной координаты и импульса. Именно временная зависимость этих коэффициентов является следствием немарковости в системе. При $t \rightarrow \infty$ равновесные коэффициенты диффузии имеют следующий вид (в (30) $\dot{\sigma}_{pp} = \dot{\sigma}_{qq} = \dot{\sigma}_{qp} = 0$):

$$\begin{aligned}D_{qq}(\infty) &= \lambda_q(\infty)\sigma_{qq}(\infty) - \frac{\sigma_{qp}(\infty)}{m(\infty)}, \\ D_{pp}(\infty) &= \lambda_p(\infty)\sigma_{pp}(\infty) + \xi(\infty)\sigma_{qp}(\infty), \\ D_{qp}(\infty) &= \frac{1}{2} \left[(\lambda_p(\infty) + \lambda_q(\infty))\sigma_{qp}(\infty) + \xi(\infty)\sigma_{qq}(\infty) - \frac{\sigma_{pp}(\infty)}{m(\infty)} \right].\end{aligned}\quad (34)$$

Сравнивая (31)–(33) и (34), мы получаем $\sigma_{qq}(\infty) = J_{q\infty q\infty}$, $\sigma_{pp}(\infty) = J_{p\infty p\infty}$ и $\sigma_{qp}(\infty) = (J_{q\infty p\infty} + J_{p\infty q\infty})/2$. Если в (34) $\sigma_{qp}(\infty)=0$, то асимптотические коэффициенты диффузии и трения связаны флуктуационно-диссипационными соотношениями

$$D_{qq}(\infty) = \lambda_q(\infty)\sigma_{qq}(\infty), \quad D_{pp}(\infty) = \lambda_p(\infty)\sigma_{pp}(\infty).$$

Если в (1) $G_\nu = 0$, то $\lambda_q(\infty) = 0$ и $D_{qq}(\infty) = 0$. Таким образом, за появление в стохастических уравнениях λ_q и $D_{qq}(\infty)$ ответственна связь по импульсу p .

Нестационарные транспортные коэффициенты для квантового ФС-осциллятора ($G_\nu = 0$ и $V_\nu = \alpha_\nu q$) были получены в рамках микроскопического подхода в работах [7] с использованием представления функционального интеграла и отличной от нашей спектральной плотности возбуждений термостата.

В качестве иллюстрации проведем численный расчет для перевернутого осциллятора. Положим в (1) $G_\nu = 0$ и $V_\nu = \alpha_\nu q$ и заменим суммы интегралами по частоте термостата с плотностью состояний $\rho(\omega')$ так, что

$$\int_0^\infty d\omega' \rho(\omega') \frac{(\alpha(\omega'))^2}{\hbar\omega'} (\cdot) = \frac{\alpha^2 \gamma^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\gamma^2 + \omega'^2} (\cdot).$$

Значение γ должно быть много больше ω . Параметры ω и α выбираются так, чтобы получились определенные асимптотические значения $\xi(\infty) = -\mu\tilde{\omega}^2$ и $\lambda_p(\infty) = \lambda_p$. Рассмотрим случай $\mu = 50m_0$ (m_0 – масса нуклона) и $\hbar\tilde{\omega} = 4.5$ МэВ, положив $\hbar\gamma = 20$ МэВ и $T = 1.5$ МэВ. Временные зависимости $\lambda_p(t)$, $D_{pp}(t)$ и $D_{qp}(t)$ приведены на рисунке. Транспортные коэффициенты равны нулю при $t = 0$ и через короткое время достигают асимптотических значений. Функции $\lambda_p(t)$ и $D_{pp}(t)$ положительны при $t > 0$. Функция $D_{qp}(t)$ вначале положительна, затем становится отрицательной. Рассчитанные значения $D_{pp}(\infty)$ при $\hbar\lambda_p(\infty) = 1$ МэВ не более, чем в 1.3 раза, больше известных классических значений $D_{pp}^c = 0.5\hbar\lambda_p\mu\tilde{\omega} \cot[\hbar\tilde{\omega}/(2T)]$, что подтверждает правильность расчета и реалистичность параметров.

2.4. Связь с диффузионными уравнениями. Уравнения (17) и (30) для средних значений и дисперсий коллективной координаты и импульса могут быть получены из следующего мастер-уравнения для матрицы плотности $\rho(t)$ коллективной подсистемы:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar}[\tilde{H}_c, \rho] + \frac{i\lambda_q(t)}{2\hbar}[p, \{q, \rho\}_+] - \frac{i\lambda_p(t)}{2\hbar}[q, \{p, \rho\}_+] - \\ & - \frac{D_{qq}(t)}{\hbar^2}[p, [p, \rho]] - \frac{D_{pp}(t)}{\hbar^2}[q, [q, \rho]] + \frac{D_{qp}(t)}{\hbar^2}([p, [q, \rho]] + [q, [p, \rho]]) \end{aligned} \quad (35)$$

или из уравнения типа Фоккера–Планка для соответствующей функции Вигнера $W(q, p, t)$:

$$\begin{aligned} \dot{W} = & -\frac{p}{m(t)} \frac{\partial W}{\partial q} + \xi(t)q \frac{\partial W}{\partial p} + \lambda_p(t) \frac{\partial(pW)}{\partial p} + \lambda_q(t) \frac{\partial(qW)}{\partial q} + \\ & + D_{qq}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + D_{pp}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} + 2D_{qp}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial p}. \end{aligned} \quad (36)$$

Зависимости от времени коэффициентов диффузии (а), (б) и трения (в) для перевернутого осциллятора ($\mu = 50m_0$ и $\hbar\tilde{\omega} = 4.5$ МэВ) при $T = 1.5$ МэВ. Асимптотики коэффициента трения $\hbar\lambda_p \rightarrow 0.5$ МэВ и $\hbar\lambda_p \rightarrow 1.0$ МэВ показаны сплошной и штриховой линиями, соответственно.

Здесь для случая связи общего вида мы предположили, что трение и диффузия зависят от t , но не от p и q . В случае линейной связи этого предположения не требуется, поскольку подобный характер зависимости получается явно. Несмотря на немарковскую природу уравнений (5) эволюции ρ и W описываются дифференциальными уравнениями, локальными по времени. Эффекты памяти приводят к временной зависимости

транспортных коэффициентов. В общем случае мы имеем коэффициенты трения и диффузии по координате и по импульсу, что является следствием присутствия случайных сил по q и p . Заметим, что уравнения (35) и (36) имеют ту же структуру, что и соответствующие феноменологические уравнения Линдблада с постоянными транспортными коэффициентами [9]–[12].

3. ЧИСТЫЕ СОСТОЯНИЯ И СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Линейная энтропия

$$S(t) = 1 - \text{Tr}(\rho^2(t)) \quad (37)$$

может рассматриваться как мера чистоты состояния. Поскольку $\text{Tr}(\rho^2(t)) \leq 1$, энтропия $S(t)$ неотрицательна, причем $S(t) = 0$ для чистого состояния. Чистота состояний уменьшается с ростом линейной энтропии. Известно также, что процесс увеличения $S(t)$ из-за взаимодействия коллективной подсистемы с термостатом ассоциируется с явлением декогерентности (потери квантовой когерентности). Предполагая, что состояние остается приблизительно чистым, $\rho^2(t) \approx \rho(t)$, найдем энтропию из мастер-уравнения (35):

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -2 \text{Tr}(\rho(t)\dot{\rho}(t)) \approx \\ &\approx \frac{4}{\hbar^2} (D_{qq}(t)\sigma_{pp}(t) + D_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) - 2D_{qp}(t)\sigma_{qp}(t)) - [\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]. \end{aligned} \quad (38)$$

Если $\dot{S}(t) = 0$ и $\text{Tr}(\rho^2(0)) = 1$, то $\text{Tr}(\rho^2(t)) = 1$ при $t > 0$. Это условие является необходимым и достаточным для выполнения равенства $\rho^2(t) = \rho(t)$ и сохранения чистоты состояния в любой момент времени $t \geq 0$. Видно, что чистые состояния минимизируют производство энтропии. При выполнении равенства $\sigma(t) = \sigma_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) - \sigma_{qp}^2(t) = \hbar^2/4$ диффузионные коэффициенты

$$\begin{aligned} D_{qq}(t) &= \frac{\lambda_p(t) + \lambda_q(t)}{2} \sigma_{qq}(t), \\ D_{pp}(t) &= \frac{\lambda_p(t) + \lambda_q(t)}{2} \sigma_{pp}(t), \\ D_{qp}(t) &= \frac{\lambda_p(t) + \lambda_q(t)}{2} \sigma_{qp}(t) \end{aligned} \quad (39)$$

удовлетворяют условию $\dot{S}(t) = 0$ для чистого состояния.

Если предположить, что для чистого состояния дисперсии постоянны; $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(0) = \sigma_{ij}(\infty)$ ($i, j = q, p$), что соответствует минимуму неопределенности, $\sigma(t) = \hbar^2/4$, то для гармонического осциллятора диффузионные коэффициенты

$$\begin{aligned} D_{qq}(t) &= \lambda_q(t)\sigma_{qq}(0) - \frac{\sigma_{qp}(0)}{m(t)}, \\ D_{pp}(t) &= \lambda_p(t)\sigma_{pp}(0) + \xi(t)\sigma_{qp}(0), \\ D_{qp}(t) &= \frac{(\lambda_p(t) + \lambda_q(t))\sigma_{qp}(0) + \xi(t)\sigma_{qq}(0) - \sigma_{pp}(0)/m(t)}{2} \end{aligned} \quad (40)$$

обеспечивают справедливость равенства $\dot{S}(t) = 0$ и чистоту состояния. При этих диффузионных коэффициентах $\dot{\sigma}_{ij}(0) = 0$. Для чистого состояния случайные и диссипативные силы в рассматриваемом случае должны удовлетворять соотношениям (см. (18))

$$\begin{aligned} J_{q_t q_t} &= (1 - A_t^2) \sigma_{qq}(0) - B_t^2 \sigma_{pp}(0) - 2A_t B_t \sigma_{qp}(0), \\ J_{p_t p_t} &= (1 - N_t^2) \sigma_{pp}(0) - M_t^2 \sigma_{qq}(0) - 2N_t M_t \sigma_{qp}(0), \\ \frac{J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}}{2} &= (1 - A_t N_t - B_t M_t) \sigma_{qp}(0) - A_t M_t \sigma_{qq}(0) - B_t N_t \sigma_{pp}(0). \end{aligned} \quad (41)$$

При специальном выборе констант связи между термостатом и подсистемой, в случае когда дисперсии постоянны, коррелированные (сжатые) когерентные состояния системы являются единственными состояниями, остающимися чистыми в ходе эволюции коллективной подсистемы [11], [12].

Из общих формул (40) для коэффициентов диффузии, сохраняющих состояния чистыми, следуют выражения в случае линейной связи по импульсу:

$$D_{qq}(t) = \lambda_q(t) \sigma_{qq}(0), \quad D_{qp}(t) = \frac{1}{2} \left[\mu \omega_0^2 \sigma_{qq}(0) - \frac{1}{m(t)} \sigma_{pp}(0) \right].$$

Для гармонического осциллятора из (30) получаем

$$\dot{\sigma}(t) = -2[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)] \sigma(t) + 2[D_{pp}(t) \sigma_{qq}(t) + D_{qq}(t) \sigma_{pp}(t) - 2D_{qp}(t) \sigma_{qp}(t)]. \quad (42)$$

Из (38) и (42) следует линейная связь между $\dot{\sigma}(t)$ и $\dot{S}(t)$. Важным следствием (42) является справедливость неравенства $\sigma(t) \geq \hbar^2/4$ для любого состояния (чистого или смешанного) при $t > 0$, если $\sigma(0) \geq \hbar^2/4$ и

$$D_{pp}(t) \sigma_{qq}(t) + D_{qq}(t) \sigma_{pp}(t) - 2D_{qp}(t) \sigma_{qp}(t) \geq \frac{\hbar^2}{4} [\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]. \quad (43)$$

При $t \rightarrow \infty$ из (42) следует, что

$$D_{pp}(\infty) \sigma_{qq}(\infty) + D_{qq}(\infty) \sigma_{pp}(\infty) - 2D_{qp}(\infty) \sigma_{qp}(\infty) = \sigma(\infty) [\lambda_p(\infty) + \lambda_q(\infty)]. \quad (44)$$

Неравенство (43) обобщает соответствующее неравенство для марковской динамики [10], [12] на случай немарковского поведения системы.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С использованием микроскопического гамильтониана полной системы аналитически получена и решена система нелинейных уравнений Ланжевена для затухающего гармонического осциллятора в пределах общей связи между коллективной и внутренней подсистемами. Показано, что уравнения движения для коллективной подсистемы удовлетворяют квантовым флуктуационно-диссипационным соотношениям и соотношению неопределенности. Из немарковских уравнений Ланжевена получены локальные по времени уравнения для первого и второго моментов с транспортными коэффициентами, зависящими явно от времени. Показано, что уравнения для корреляций не идентичны уравнениям для средних, и для немарковского затухающего гармонического осциллятора гипотеза Онзагера, строго говоря, неверна. Для немарковской динамики получены наборы диффузионных коэффициентов, которые сохраняют состояние системы чистым.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ и Deutsche Forschungsgemeinschaft.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов.* Избранные труды в трех томах. Киев: Наукова Думка, 1971; *А. А. Беллави́ч, Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, Б. С. Попов.* ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 264; *A. O. Caldeira, A. J. Leggett.* Physica. A. 1983. V. 121. P. 587; Ann. Phys. 1983. V. 149. P. 374; *H. J. Carmichael.* An Open System Approach to Quantum Optics. Berlin: Springer, 1993; *Ю. Л. Климонтович.* Статистическая теория открытых систем. М.: Янус, 1995 (Т. 1), 1999 (Т. 2), 2001 (Т. 3); *V. V. Dodonov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko.* J. of Russian Laser Research. 1995. V. 16. P. 1.
- [2] *N. G. van Kampen.* Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam: North-Holland, 1981.
- [3] *C. W. Gardiner.* Quantum Noise. Berlin: Springer, 1991.
- [4] *D. Zubarev, V. Morozov, G. Röpke.* Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. V. 2. Relaxation and Hydrodynamic Processes. Berlin: Akademie Verlag, 1997.
- [5] *U. Weiss.* Quantum Dissipative Systems. Singapore: World Scientific, 1999.
- [6] *K. Lindenberg, B. West.* Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 568.
- [7] *F. Haake, R. Reibold.* Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 2462; *P. Talkner.* Ann. Phys. 1986. V. 167. P. 390; *B. L. Hu, J. P. Paz, Y. Zhang.* Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 2843; *R. Karrlein, H. Grabert.* Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 153.
- [8] *H. Grabert, P. Schramm, G.-L. Ingold.* Phys. Rep. 1988. V. 168. P. 115.
- [9] *G. Lindblad.* Commun. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 119; Rep. Math. Phys. 1976. V. 10. P. 393; *G. G. Adamian, N. V. Antonenko, W. Scheid.* Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 482; 1999. V. 260. P. 39; *Yu. V. Palchikov, G. G. Adamian, N. V. Antonenko, W. Scheid.* J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 4265; Physica. A. 2002. V. 316. P. 297.
- [10] *H. Dekker.* Phys. Rep. 1981. V. 80. P. 1.
- [11] *В. В. Додонов, В. И. Манько.* Тр. ФИАН. 1986. Т. 167. С. 7; 1987. Т. 183. С. 5; *V. V. Dodonov, E. V. Kurmyshev, V. I. Man'ko.* Phys. Lett. A. 1980. V. 79. P. 150.
- [12] *A. Isar, A. Sandulescu, H. Scutaru, E. Stefanescu, W. Scheid.* Int. J. Mod. Phys. E. 1994. V. 3. P. 635; *A. Isar.* Fortschr. Phys. 1999. V. 47. P. 855.
- [13] *В. Г. Зелевинский.* Проблемы в теории реакций с тяжелыми ионами. В сб.: Материалы XII Зимней школы ЛИЯФ. Л.: Изд-во ЛИЯФ, 1978. С. 53; *Р. В. Джолос, С. П. Иванова, В. В. Иванов.* ЯФ. 1984. Т. 40. С. 117; *S. P. Ivanova, R. V. Jolos.* Nucl. Phys. A. 1991. V. 530. P. 232.

Поступила в редакцию 2.XI.2004 г.,
после доработки 10.II.2005 г.