Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Ф. Эфендиев, Спектральный анализ одного класса несамосопряженных дифференциальных операторных пучков с обобщенной функцией, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 1, 102–107

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1883>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 18:32:55

© 2005 г.

Р. Ф. Эфендиев*

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ С ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ

Исследуется спектр, а также решается обратная задача для пучка несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка с обобщенной функцией в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, дельта-функция Дирака, решение Йоста, спектральные особенности, обратная задача.

1. ВВЕДЕНИЕ

Распространение волн в одномерной неконсервативной среде в частотной области описывается уравнением Шредингера

$$y_+''(x, \lambda) + \lambda^2 y_+(x, \lambda) = [i\lambda p(x) + q(x)] y_+(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{R}$ – действительная ось, λ – волновое число (известное как импульс), λ^2 – энергия, $p(x)$ – объединенный эффект поглощения и генерации энергии, $q(x)$ описывает восстановление плотности силы. В нестационарном случае оно соответствует волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - p(x) \frac{\partial u}{\partial t} = q(x) u, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

где волновая скорость равна 1. Когда $p(x) \leq 0$, имеет место чистое поглощение; однако мы не будем фиксировать знак $p(x)$. Следовательно, важную роль играет и уравнение

$$y_-''(x, \lambda) + \lambda^2 y_-(x, \lambda) = [-i\lambda p(x) + q(x)] y_-(x, \lambda), \quad x \in \mathbb{R},$$

где знак $p(x)$ уже изменен.

* Институт прикладной математики, Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан. E-mail: rakibaz@yahoo.com

Приступим к исследованию спектра, а также к решению обратной задачи для пучка L несамосопряженных дифференциальных операторов, порожденных формальным дифференциальным выражением

$$l\left(\frac{d}{dx}, \lambda\right) \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + 2\lambda p(x) + q(x) + \beta\delta(x) - \lambda^2 \quad (1)$$

с обобщенной функцией в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Здесь $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\beta < 0$ – вещественное число, λ – комплексное число, а коэффициенты $p(x)$, $q(x)$ имеют вид

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}, & \sum_{n=1}^{\infty} n|p_n| &< \infty, \\ q(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{inx}, & \sum_{n=1}^{\infty} |q_n| &< \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

В связи с важными приложениями в квантовой механике представляет интерес исследование спектральных характеристик операторного пучка L , а в случае, когда хотя бы одна из сталкивающихся частиц – фермион, становится актуальным и решение обратной задачи при наличии центрального и спин-орбитального потенциалов [1], [2]. Как правило, рассматриваемая задача связана с разрывными свойствами физических характеристик среды.

Отметим, что при $p(x) = 0$ и выполнении условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+x^2)q(x)dx < \infty,$$

где $q(x)$ – скалярная вещественнозначная неотрицательная функция на $(-\infty, +\infty)$, спектральные характеристики данной задачи изучены в работе [3].

Обратная задача в случае $p(x) = 0$ и при выполнении условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|)|q(x)|dx < \infty,$$

где $q(x)$ – вещественнозначная исчезающая при $x \rightarrow \pm\infty$ функция, исследована в работе [4].

Случай $\beta = 0$ рассмотрен в работе [5].

В разделе 2 в предположении, что потенциалы имеют вид (2), строятся соответствующие решения Йоста, вводится понятие обобщенного нормировочного числа и исследуется спектр операторного пучка L . В разделе 3 решается обратная задача восстановления потенциалов (2) по нормировочным числам.

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ И ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА L

Решением уравнения $L(y) = 0$ назовем решение системы

$$-y''(x) + 2\lambda p(x)y(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} y(+0) &= y(-0) = y(0), \\ y'(+0) - y'(-0) &= -\beta y(0). \end{aligned} \quad (4)$$

Известно [5], что для уравнения (3) справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ имеют вид (2). Тогда уравнение (3) имеет специальные решения вида

$$f_{\pm}(x, \lambda) = e^{\pm i\lambda x} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^{\pm} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{\nu_{n\alpha}^{\pm}}{n \pm 2\lambda} e^{i\alpha x} \right), \quad (5)$$

где числа $\nu_n^{\pm}$ и $\nu_{n\alpha}^{\pm}$ определяются из следующих рекуррентных соотношений:

$$\alpha^2 \nu_{\alpha}^{\pm} + \alpha \sum_{n=1}^{\alpha} \nu_{n\alpha}^{\pm} + \sum_{s=1}^{\alpha-1} \left(q_{\alpha-s} \nu_s^{\pm} - p_{\alpha-s} \sum_{n=1}^s \nu_{ns}^{\pm} \right) + q_{\alpha} = 0, \quad (6a)$$

$$\alpha(\alpha - n) \nu_{n\alpha}^{\pm} + \sum_{s=n}^{\alpha-1} (q_{\alpha-s} \mp n p_{\alpha-s}) \nu_{ns}^{\pm} = 0, \quad (6b)$$

$$\alpha \nu_{\alpha}^{\pm} \pm \sum_{s=1}^{\alpha-1} \nu_s^{\pm} p_{\alpha-s} \pm p_{\alpha} = 0, \quad (6в)$$

причем ряд (5) допускает дважды почленное дифференцирование.

Функции $f_{+}(x, \lambda)$ и $f_{-}(x, \lambda)$ линейно независимы, и их вронскиан $W[f_{+}(x, \lambda), f_{-}(x, \lambda)] = 2i\lambda$. Это вытекает из того факта, что W не зависит от x , а функции $f_{\pm}(x, \lambda)$ допускают голоморфные по x продолжения в нижнюю и верхнюю полуплоскости, соответственно, и

$$\lim_{\operatorname{Im} x \rightarrow \infty} f_{\pm}^{(\nu)}(x, \lambda) e^{\mp i\lambda x} = (\pm i\lambda)^{\nu}, \quad \nu = \overline{0, 1}.$$

Положим

$$f_n^{\pm}(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \mp n/2} (n \pm 2\lambda) f_{\pm}(x, \lambda) = \sum_{\alpha=n}^{\infty} V_{n\alpha}^{\pm} e^{i\alpha x} e^{-i(n/2)x}.$$

Из соотношения (6б) следует, что если $V_{nn}^{+} = 0$, то $V_{n\alpha}^{+} = 0$ при всех $\alpha > n$ и $f_n^{+}(x) \equiv 0$ (аналогично для $f_n^{-}(x)$). Следовательно, точки $(\pm n/2)$ не являются особыми точками для $f_{\pm}(x, \lambda)$, соответственно. Тогда

$$W \left[f_n^{\pm}(x), f_{\mp} \left(x, \mp \frac{n}{2} \right) \right] = 0$$

и, следовательно, функции $f_{\mp}(x, \mp n/2)$, $f_n^{\pm}(x)$, которые являются решениями уравнения $L(y) = 0$ при $\lambda = \mp n/2$, линейно зависимы. Отсюда

$$f_n^{\pm}(x) = S_n^{\pm} f_{\mp}\left(x, \mp \frac{n}{2}\right). \quad (7)$$

Сравнение аналитических выражений этих функций показывает, что

$$S_n^{\pm} = V_{nn}^{\pm}.$$

Разделим λ -плоскость на сектора $S_{\nu} = \{\nu\pi < \arg \lambda < (\nu + 1)\pi\}$, $\nu = 0, 1$, и переобозначим $f_{\pm}(x, \lambda)$ таким образом, чтобы выполнялись условия $f_{+}(x, \lambda) \in L_2(0, +\infty)$, $f_{-}(x, \lambda) \in L_2(-\infty, 0)$. Отметим, что любое решение уравнения (3) $y(x, \lambda)$ представляется линейной комбинацией функций $f_{\pm}(x, \lambda)$, и его можно записать в виде

$$y(x, \lambda) = \begin{cases} c_0(x)f_{+}(x, \lambda) + c_1(x)f_{-}(x, \lambda), & x \in (-\infty, 0), \\ c_2(x)f_{+}(x, \lambda) + c_3(x)f_{-}(x, \lambda), & x \in (0, +\infty), \end{cases}$$

где $c_j(x)$, $j = \overline{0, 3}$, такие, что для $y(x, \lambda)$ выполняются условия (4).

Построим резольвенту операторного пучка L при $\lambda \in S_{\nu}$. Для этого решается задача

$$-y''(x) + 2\lambda p(x)y(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x) + f(x), \quad x \neq 0, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y(+0) &= y(-0) = y(0), \\ y'(+0) - y'(-0) &= -\beta y(0) \end{aligned} \quad (9)$$

в $L_2(-\infty, +\infty)$. Здесь $f(x)$ — произвольная функция, принадлежащая $L_2(-\infty, +\infty)$. Для нахождения функций $c_j(x)$, $j = \overline{0, 1}$, составим систему уравнений

$$\begin{aligned} c'_0(x)f_{+}(x, \lambda) + c'_1(x)f_{-}(x, \lambda) &= 0, \\ c'_0(x)f'_{+}(x, \lambda) + c'_1(x)f'_{-}(x, \lambda) &= f(x), \end{aligned}$$

из которой имеем

$$\begin{aligned} c_0(x) &= -\frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^x f_{-}(t, \lambda)f(t) dt + c_0, \\ c_1(x) &= -\frac{1}{2i\lambda} \int_x^0 f_{+}(t, \lambda)f(t) dt + c_1, \end{aligned}$$

где $x \in (-\infty, 0)$, c_j , $j = \overline{0, 1}$, — произвольные числа. Проведя аналогичные вычисления для функций $c_j(x)$, $j = \overline{2, 3}$, получим, что решение уравнения (8) при $\lambda \in S_{\nu}$ имеет вид

$$y(x, \lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} \begin{cases} -\int_{-\infty}^x f_{+}(x, \lambda)f_{-}(t, \lambda)f(t) dt - \int_x^0 f_{-}(x, \lambda)f_{+}(t, \lambda)f(t) dt + \\ + c_0 f_{+}(x, \lambda) + c_1 f_{-}(x, \lambda), & x \in (-\infty, 0), \\ -\int_0^x f_{+}(x, \lambda)f_{-}(t, \lambda)f(t) dt - \int_x^{\infty} f_{-}(x, \lambda)f_{+}(t, \lambda)f(t) dt + \\ + c_2 f_{+}(x, \lambda) + c_3 f_{-}(x, \lambda), & x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

В силу условия $y(\cdot, \lambda) \in L_2(-\infty, +\infty)$, $f_+(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$, $f_-(x, \lambda) \in L_2(-\infty, 0)$ определяем, что $c_0 = c_3 = 0$. Тогда для решения уравнения (8) получим

$$y(x, \lambda) = -\frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t, \lambda) f(t) dt + \begin{cases} c_1 f_-(x, \lambda), & x \in (-\infty, 0), \\ c_2 f_+(x, \lambda), & x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad \lambda \in S_\nu,$$

при

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} f_+(x, \lambda) f_-(t, \lambda), & t \leq x, \\ f_-(x, \lambda) f_+(t, \lambda), & t \geq x. \end{cases}$$

Здесь числа c_j , $j = \overline{1, 2}$, определяются из условий (9), а именно

$$\begin{aligned} c_1 f_-(0, \lambda) - c_2 f_+(0, \lambda) &= 0, \\ c_1 [f'_-(0, \lambda) - \beta f_-(0, \lambda)] - c_2 f'_+(0, \lambda) &= -\frac{\beta}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, t, \lambda) f(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= -\frac{\beta f_\pm(0, \lambda)}{2i\lambda D(\lambda)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, t, \lambda) f(t) dt, \\ D(\lambda) &= -\begin{vmatrix} f_-(0, \lambda) & f_+(0, \lambda) \\ f'_-(0, \lambda) - \beta f_-(0, \lambda) & f'_+(0, \lambda) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В результате решение задачи (8), (9) принимает вид

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) &= -\frac{1}{2i\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, t, \lambda) f(t) dt + \\ &+ \frac{\beta}{2i\lambda D(\lambda)} \begin{cases} f_+(0, \lambda) f_-(x, \lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, t, \lambda) f(t) dt, & x \in (-\infty, 0), \\ f_-(0, \lambda) f_+(x, \lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, t, \lambda) f(t) dt, & x \in (0, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Спектр операторного пучка L состоит из непрерывного спектра, заполняющего ось $\{-\infty < \lambda < +\infty\}$, на которой могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $\pm n/2$, $n \in N$, и не более одного собственного числа λ_1 , которое определяется как корень уравнения $D(\lambda) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [6], что при $\beta = 0$ спектр операторного пучка L (обозначим его через L_0) является чисто непрерывным и заполняет ось $\{-\infty < \lambda < +\infty\}$, на которой могут быть спектральные особенности, совпадающие с числами вида $\pm n/2$, $n \in N$. Согласно работе [7] спектр оператора L может отличаться от спектра операторного пучка L_0 разве что на конечное число собственных значений. Кроме того, число этих собственных значений не превосходит ранг оператора, $R_\lambda - R_{\lambda(\beta=0)}$, т.е. числа 1. Таким образом, теорема доказана.

3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Из соотношения (7) видно, что числа $S_n^\pm$ играют роль “нормировочных” чисел для функций, отвечающих спектральным особенностям $(\pm n/2)$, $n = 1, 2, \dots$.

Ставится задача определения функций $q(x)$, $p(x)$ и β по числам $\{S_n^\pm\}$. Вначале найдем явные связи между последовательностями $\{S_n^\pm\}$ и $\{V_{n\alpha}^\pm\}$, $\{V_n^\pm\}$. Для этого воспользуемся тождествами (7) в развернутом виде:

$$\sum_{\alpha=m}^{\infty} V_{n\alpha}^\pm e^{i\alpha x} e^{-i(n/2)x} = S_n^\pm e^{i(n/2)x} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n^\mp e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha=n}^{\infty} \frac{V_{n\alpha}^\mp}{n+n} e^{i\alpha x} \right).$$

При этом находим, что

$$V_{m,m}^\pm = S_m^\pm, \quad V_{m,\alpha+m}^\pm = S_m^\pm \left(V_\alpha^\mp + \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{V_{n\alpha}^\mp}{n+m} \right),$$

а β определим с помощью равенства

$$\beta = -\frac{y'(+0) - y'(-0)}{y(0)}.$$

Эти соотношения являются основными уравнениями для определения $\{q_\alpha\}$, $\{p_\alpha\}$ и β по числам $\{S_n^\pm\}$.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы числа $\{S_n^\pm\}$ были “нормировочными” числами операторного пучка типа L с потенциалами вида (2), достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\sum_{m=1}^{\infty} m |S_m^*| = \delta < \infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|S_m^*|}{1+m} = p < 1,$$

где $|S_m^*| = \max\{|S_m^+|, |S_m^-|\}$.

Список литературы

- [1] С. Альбеверио, Ф. Гастези, Р. Хегг-Крон, Х. Хольден. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [2] P. C. Sabatier. J. Math. Phys. 1968. V. 9. № 8. P. 1241–1258.
- [3] Р. И. Кадиев (мл.). Изв. вузов. Математика. 1998. № 7. С. 26–31.
- [4] T. Aktosun. Inverse Problems. 2004. № 20. P. 859–876.
- [5] Р. Ф. Эфендиев. Докл. НАН Азерб. 2001. № 4–6. С. 15–20.
- [6] Р. Ф. Эфендиев. Матем. физика, анализ, геометрия. 2004. Т. 11. № 1. С. 114–121.
- [7] П. Н. Князев. Изв. вузов. Математика. 1959. № 2. С. 94–100.

Поступила в редакцию 20.XII.2004 г.,
после доработки 6.IV.2005 г.