Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Г. Воронцова, Г. С. Шаров, Решения шварцшильдовского типа в дилатонной гравитации, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 1, 133–143

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1888>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 06:51:54

© 2005 г.

Е. Г. Воронцова*, Г. С. Шаров*

РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДОВСКОГО ТИПА В ДИЛАТОННОЙ ГРАВИТАЦИИ

В D -мерной дилатонной гравитационной модели найдены и исследованы стационарные решения шварцшильдовского типа – центрально-симметричные решения в пустоте. Они образуют двухпараметрическое семейство решений: один из параметров является аналогом гравитационного радиуса, второй характеризует интенсивность дилатонного поля. При обращении последнего параметра в нуль, что отвечает обращению в константу поля дилатонов, найденное выражение для метрики переходит в известное решение Шварцшильда, описывающее черную дыру. Однако если упомянутый параметр отличен от нуля, то горизонт черной дыры не возникает. Для найденных решений в пределе слабого гравитационного поля определены параметры квазиэллиптических орбит пробных частиц.

Ключевые слова: дилатонная гравитационная модель, решения шварцшильдовского типа, горизонт черной дыры, квазиэллиптические орбиты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дилатонную гравитационную модель [1] с действием следующего вида [2], [3]:

$$S = \int \sqrt{|g|} e^{-2\phi(x)} [R + 4(\nabla\phi)^2 + \Lambda] d^{n+1}x, \quad (1)$$

где $\phi(x)$ – скалярное поле (поле дилатонов) на псевдоримановом многообразии $\mathcal{M}_{1,n}$ размерности $D = n + 1$ с координатами x^μ и метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, $g = \det |g_{\mu\nu}|$, R – скалярная кривизна, $(\nabla\phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$, $\Lambda = \text{const}$. Здесь и ниже мы используем так называемую струнную систему координат для действия (1) [2], [4].

Действие (1) является следствием теории струн в низкоэнергетическом пределе [2], [5]. Оно используется в различных гравитационных моделях, в частности, в космологии (см. обзор в работе [1]).

С помощью вариации действия (1) относительно гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ и скалярного поля дилатонов ϕ находим уравнения эволюции данной модели [1]:

$$R_{\mu\nu} + 2\phi_{;\mu\nu} = 0, \quad R + 4(\nabla\phi)^2 = \Lambda. \quad (2)$$

* Тверской государственный университет, Тверь, Россия. E-mail: german.sharov@tversu.ru, elena.vorontsova@tversu.ru

Здесь $R_{\mu\nu}$ – тензор Риччи, $\phi_{;\mu\nu}$ – (вторая) ковариантная производная.

Ниже мы будем рассматривать эту модель как некоторую скалярно-тензорную теорию гравитации, для которой найдем аналоги решений, хорошо известных в общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна. Отметим, что уравнения (2) переходят в уравнение ОТО в пустоте $R_{\mu\nu} = 0$, если поле дилатонов ϕ постоянно и $\Lambda = 0$.

2. РЕШЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДОВСКОГО ТИПА, СЛУЧАЙ $n = 2$

Для системы уравнений (2) ищем стационарные решения шварцшильдовского типа, т.е. центрально-симметричные решения в пустоте. С этой целью рассматриваем сферически-симметричное псевдориманово многообразие $\mathcal{M}_{1,n}$ с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 &= e^{2\alpha(r)} dt^2 - e^{2\beta(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \\ d\Omega^2 &= d\theta_1^2 + \cos^2\theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \cos^2\theta_1 \dots \cos^2\theta_{n-2} d\theta_{n-1}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь t – временная координата, r – радиальная, θ_k – угловые.

Подставляем метрику (3) в систему уравнений (2). При этом ненулевые компоненты тензора Риччи имеют вид

$$\begin{aligned} R_{00} &= e^{2\alpha-2\beta} \left[\alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' + \frac{(n-1)\alpha'}{r} \right], \\ R_{11} &= -\alpha'' - \alpha'^2 + \alpha' \beta' + \frac{(n-1)\beta'}{r}, \\ R_{22} &= e^{-2\beta} [\beta' r - \alpha' r - n + 2] + n - 2, \quad R_3^3 = \dots = R_n^n = R_2^2. \end{aligned}$$

В итоге система (2) сводится к следующим четырем нетривиальным уравнениям:

$$\begin{aligned} \alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' + \frac{(n-1)\alpha'}{r} &= 2\alpha' \phi', \\ \alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' - \frac{(n-1)\beta'}{r} &= 2\phi'' - 2\beta' \phi', \\ \beta' - \alpha' + \frac{(n-2)(e^{2\beta} - 1)}{r} + 2\phi' &= 0, \\ \alpha'' + \alpha'^2 - \alpha' \beta' + \frac{n-1}{r^2} \left[(\alpha' - \beta')r + \frac{n-2}{2}(1 - e^{2\beta}) \right] &= 2\phi'^2 + \frac{1}{2}\Lambda e^{2\beta}. \end{aligned} \quad (4)$$

Мы будем искать решения этой системы для различных размерностей $n \geq 2$. Случай $n = 1$, приводящий к нетривиальной $(1+1)$ -мерной гравитации, хорошо исследован [6]. В частности, при $\Lambda < 0$ соответствующее решение

$$ds^2 = \text{th}^2 \left[\frac{1}{2} \sqrt{-\Lambda} (r - r_0) \right] dt^2 - dr^2$$

описывает “двумерную” черную дыру.

Рассмотрим случай $n = 2$ (или $D = 3$). В этом случае линейная комбинация первого и третьего из уравнений системы (4) приводит к уравнению $\alpha'' + \alpha'/r = 0$. Его общее решение имеет вид

$$e^{2\alpha(r)} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^a, \quad (5)$$

где a и r_1 — произвольные константы интегрирования.

Пользуясь выражением для α , а также тем, что ϕ' и β' связаны соотношением $2\phi' + \beta' = a/(2r)$, мы можем свести систему (4) к следующим двум уравнениям:

$$\beta'' - \frac{\beta'}{r} - \beta'^2 + \frac{a^2}{4r^2} = 0, \quad \beta'' + \frac{\beta'}{r} = -\Lambda e^{2\beta(r)},$$

решая которую, находим, что

$$e^{2\beta(r)} = \frac{-(a^2 + 4)Cr^{B_{\pm}-2}}{\Lambda(r^{B_{\pm}} - C)^2}, \quad \phi(r) = \phi_0 - \frac{a}{2r^2} - \frac{\beta(r)}{2}. \quad (6)$$

Здесь $B_{\pm} = \pm\sqrt{a^2 + 4}$, C — постоянная интегрирования.

Выражение $e^{2\beta(r)}$ положительно (имеет физический смысл), если $C > 0$, $\Lambda < 0$ или $C < 0$, $\Lambda > 0$.

В первом случае данные решения эквивалентны $(2 + 1)$ -мерным решениям, полученным в работе [7]. Решения (5), (6), которые мы получаем во втором случае, в отличие от полученных в работе [7] решений определены при $0 < r < \infty$, не имеют особенностей и цилиндрической асимптотики при $r \rightarrow \infty$.

Решение системы (4) при $\Lambda = 0$

$$ds^2 = \left(\frac{r}{r_1}\right)^a dt^2 - \left(\frac{r}{r_2}\right)^{B_{\pm}-2} dr^2 - r^2 d\theta^2, \quad \phi = \frac{a + 2 - B_{\pm}}{4} \ln \frac{r}{r_3} \quad (7)$$

может быть получено переходом к пределу при $\Lambda \rightarrow 0$ (при $\Lambda/C \rightarrow \text{const}$) в выражениях (5), (6).

Сечение $t = \text{const}$ $(2 + 1)$ -мерного многообразия (7) имеет вид поверхности вращения. Случай $B_+ = 2$ соответствует известному коническому решению, возникающему в стандартной $(2 + 1)$ -мерной гравитационной модели без дилатона (при этом $\phi = \text{const}$).

Решения (5), (6) в случае $C > 0$, $\Lambda < 0$ имеют особенность при $r = C^{1/B_{\pm}}$, обладающую свойствами горизонта черной дыры [7]. Решения (7) при $\Lambda = 0$ не имеют подобных особенностей.

3. РЕШЕНИЯ ПРИ $n \geq 3$, $\Lambda = 0$

Ищем решения системы уравнений (4), полагая $n \geq 3$, $\Lambda = 0$. Подставляя в первое уравнение системы (4) выражение для ϕ' , полученное из третьего уравнения, находим

$$\frac{-(n-2)e^{2\beta}}{r} = \frac{\alpha''}{\alpha'} + \frac{1}{r}. \quad (8)$$

Рассматривая линейную комбинацию первого, второго и последнего из уравнений системы (4), а также пользуясь выражением для α' , полученным из третьего уравнения, приходим к следующему соотношению:

$$-\frac{(n-2)e^{2\beta}}{r} = \frac{\phi''}{\phi'} + \frac{1}{r}. \quad (9)$$

В выражениях (8) и (9) предполагается соответственно, что $\alpha' \neq 0$ и $\phi' \neq 0$.

Случай $\phi' = 0$ соответствует исключению дилатонного поля из модели и переходу последней в ОТО. В этом случае из первых двух уравнений (4) следует равенство $\beta' = -\alpha'$, позволяющее легко проинтегрировать третье уравнение (обозначим константу интегрирования r_0) и получить решение системы (4) в виде

$$ds^2 = \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-2}\right] dt^2 - \left[1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n-2}\right]^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad \phi = \phi_0. \quad (10)$$

Оно, естественно, является $(n+1)$ -мерным обобщением решения Шварцшильда в ОТО и описывает черную дыру с гравитационным радиусом r_0 .

В случае $\alpha' = 0$ первое из уравнений системы (4) обращается в тождество. Из остальных можно исключить β и получить следующее уравнение относительно ϕ :

$$\phi'' = -\frac{4r}{n-1}\phi' \left(\phi' - \frac{n-1}{2r}\right).$$

Его решения и соответственно решения системы (4) найдем в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned} e^{2\beta} &= 1 + \frac{n-1}{n-2}(u^2 - 1), \quad \phi = \phi_0 + \frac{q}{4} \ln \frac{qu + 1}{qu - 1}, \quad \alpha = \alpha_0, \\ r &= r_0 |u + 1|^{-1/(n-2)} |u + q^{-1}|^{1/(2(q-1))} |u - q^{-1}|^{-1/(2(q+1))}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $q = \sqrt{n-1}$; при решении используется параметр $u = (2r/(n-1))\phi' - 1$.

Если ввести новую радиальную координату $\tilde{r} = \tilde{r}(r)$, определяемую равенством $d\tilde{r} = e^\beta dr$, то отвечающая выражению (11) метрика примет вид

$$ds^2 = dt^2 - d\tilde{r}^2 - [r(\tilde{r})]^2 d\Omega^2. \quad (12)$$

Рассмотрим более общий случай $\alpha' \neq 0$, $\phi' \neq 0$, для которого сравнение выражений (8) и (9) приводит к равенству

$$\phi' = Q\alpha'. \quad (13)$$

Здесь Q — произвольная константа интегрирования. Учитывая, что при $\phi' = 0$ рассматриваемая дилатонная модель переходит в ОТО, делаем вывод, что параметр Q характеризует интенсивность дилатонного поля для изучаемого класса решений шварцшильдовского типа.

Линейная комбинация первого, третьего и последнего из уравнений (4) соответственно с коэффициентами 1, $-(n-1)/(2r)$ и -1 приводит к равенству

$$\beta' = 2\phi' - \alpha' + \frac{4r}{n-1}(\alpha' - \phi')\phi'.$$

Подставляя его в первое из уравнений (4) и выражая ϕ' с помощью равенства (13), получим следующее уравнение относительно α' :

$$r^2\alpha'' - \frac{4Q(1-Q)}{n-1}r^3\alpha'^3 + 2(1-2Q)r^2\alpha'^2 + (n-1)r\alpha' = 0. \quad (14)$$

После введения параметра

$$\gamma = r\alpha' \quad (15)$$

находим решение уравнения (14), а затем β и ϕ как функции того же параметра γ . Эти выражения образуют решение системы (4) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} e^{2\alpha} &= e^{2\alpha_0} \left| \frac{\gamma - \gamma_+}{\gamma - \gamma_-} \right|^{1/K}, \quad r = r_0 \frac{|\gamma - \gamma_+|^{A_+} |\gamma - \gamma_-|^{A_-}}{|\gamma|^{1/(n-2)}}, \\ e^{2\beta} &= \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_+}\right) \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_-}\right), \quad \phi = Q\alpha(r) + \phi_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь используются обозначения

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{1 - \frac{4Q(1-Q)}{n-1}}, \quad A_{\pm} = \frac{1}{2(n-2)} \left(1 \pm \frac{2Q-1}{K}\right), \\ \gamma_{\pm} &= (n-1) \frac{1-2Q \pm K}{4Q(1-Q)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Анализируя зависимость (16) радиальной координаты r от параметра γ , видим, что пределу $\gamma \rightarrow 0$ взаимно однозначно соответствует предел $r \rightarrow \infty$. Следовательно, решения (16) являются асимптотически плоскими при $r \rightarrow \infty$. Удобно так выбрать постоянную α_0 (этот выбор эквивалентен умножению временной переменной t на константу), чтобы $e^{2\alpha} \rightarrow 1$ при $r \rightarrow \infty$, т.е. записать эту компоненту метрики в виде

$$e^{2\alpha} = \left| \frac{1 - \gamma/\gamma_+}{1 - \gamma/\gamma_-} \right|^{1/K}. \quad (18)$$

Заметим, что найденные ранее решения (11) могут быть получены с помощью предельного перехода $Q \rightarrow \infty$ в выражениях (16). При этом $K \rightarrow \infty$, $\gamma_{\pm} \rightarrow 0$, параметры связаны соотношением $2Q\gamma = (n-1)(u+1)$.

Семейство решений (11), (16) обобщает решение Шварцшильда (10), которое в случае $n = 3$ имеет классический вид

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta_1^2 + \cos^2 \theta_1 d\theta_2^2). \quad (19)$$

Как было сказано выше, решения (10) и (19) можно получить, положив в системе (4) $\phi = \text{const}$. В силу равенства (13) этот случай реализуется при $Q = 0$. Эти же выражения (10), (19) являются результатом предельного перехода $Q \rightarrow 0$ в решении (16), (18), при котором $K \rightarrow 1$, $\gamma_- \rightarrow 1 - n/2$, $\gamma_+ \simeq (n-1)/(2Q) \rightarrow \infty$, $A_- \rightarrow (n-2)^{-1}$, $A_+ \simeq Q/(n-1) \rightarrow 0$.

Но в отличие от решений Шварцшильда, которые являются однопараметрическим семейством с параметром r_g (гравитационным радиусом), решения (16) образуют двухпараметрическое семейство в классе метрик (3). Параметр r_0 является аналогом гравитационного радиуса r_g , а дополнительный параметр Q , как было сказано выше, характеризует интенсивность дилатонного поля.

Выделим те из решений (16), которые имеют физический смысл. Для этого потребуем, чтобы они описывали гравитационное притяжение (а не отталкивание) и имели бы асимптотику $r \rightarrow \infty$. Условием, определяющим гравитационное притяжение для многообразия $\mathcal{M}_{1,n}$ с метрикой (3), является неравенство

$$\alpha'(r) > 0. \quad (20)$$

Это, в частности, следует из вида уравнения геодезических для радиальной координаты:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \alpha' e^{2\alpha-2\beta} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \beta' \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r e^{-2\beta} \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 0. \quad (21)$$

Здесь для простоты показана одна угловая переменная $\theta \equiv \theta_1$.

Рис. 1

Это замечание позволяет сделать вывод, что решение уравнений (4), найденное выше в виде (11) и (12), описывает центрально-симметричное многообразие без притяжения или отталкивания. Радиальное движение пробной частицы в нем равномерно относительно $\tilde{r}$: $\tilde{r} = v_0 t + \tilde{r}_0$.

Вернемся к решению (16). Сопоставляя неравенство (20) и выражение (15) для параметра γ , видим, что имеющие физический смысл решения (16) удовлетворяют условию $\gamma > 0$, а также неравенству $\gamma < \gamma_+$, следующему из выражения для $e^{2\beta}$.

Область физических решений на плоскости параметров $Q\gamma$ показана штриховкой на рис. 1 (для $n = 3$). Здесь же изображены графики функций (17) $\gamma = \gamma_{\pm}(Q)$. Область $\gamma > \gamma_-$, $Q > 0$ мы не считаем физически допустимой, так как она отвечает ограниченному пространству с $r \leq r_0$.

Замечательным свойством найденных решений шварцшильдовского типа (11), (16) в дилатонной гравитационной модели является то, что решения, описывающие черную дыру, существуют только при $Q = 0$, $\phi = \text{const}$ и имеют вид (10), (19). Другими словами, присутствие в этих решениях нетривиального дилатонного поля $\phi \neq \text{const}$ приводит к исчезновению горизонта черной дыры.

Для решений (16) зависимость метрических коэффициентов $e^{2\alpha}$ и $e^{2\beta}$ от радиальной координаты r при $n = 3$ и различных значениях параметра Q показана на рис. 2.

Рис. 2

Для значений $Q > 0$ физически допустимым решениям соответствует интервал $(0, \gamma_+)$ значений параметра γ (см. рис. 1). При изменении γ в указанном интервале координата r пробегает значения от 0 до ∞ , а величины $e^{2\alpha}$ и $e^{2\beta}$, определяемые выражениями (16), (18), ограничены и обращаются в нуль лишь в центре ($r = 0$). Отметим, что при $Q \rightarrow +0$ функция $\beta(r)$ имеет максимум в виде острого пика в окрестности $r = 1$, но горизонт черной дыры возникает лишь при $Q = 0$.

В случае $Q < 0$ для физических решений интервал значений γ — положительная полуось: $0 < \gamma < \infty$. Ему соответствуют значения $r \in (r_0, \infty)$. При этом в пределе $r \rightarrow r_0 + 0$ величина $e^{2\alpha}$ стремится к константе $|\gamma_+/\gamma_-|^{1/K}$, а $e^{2\beta}$ — к бесконечности с асимптотикой

$$e^{2\beta} \simeq \frac{\text{const}}{r - r_0}, \quad r \rightarrow r_0 + 0. \quad (22)$$

Эту слабую особенность метрики нельзя трактовать как горизонт черной дыры ввиду конечности времени (радиального) падения в точку $r = r_0$ с точки зрения внешнего наблюдателя.

Аналогичную асимптотику (22) при $r \rightarrow r_0 + 0$ имеет и метрика (11).

4. НЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ И КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ

Для анализа наблюдательных проявлений данной дилатонной модели и решений шварцшильдовского типа (16) рассмотрим более подробно предел $r \rightarrow \infty$, отвечающий слабому гравитационному полю. Как отмечено выше, предел $r \rightarrow \infty$ эквивалентен $\gamma \rightarrow +0$: из выражения (16) для r следует, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow +0} r = \lim_{\gamma \rightarrow +0} r_0 \frac{|\gamma_+|^{A+} |\gamma_-|^{A-}}{\gamma^{1/(n-2)}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{r_1}{\gamma^{1/(n-2)}} = \infty,$$

где $r_1 = r_0 |\gamma_+|^{A+} |\gamma_-|^{A-}$. Более детальный анализ функции $r(\gamma)$ при $\gamma \rightarrow +0$ приводит к разложению

$$\frac{r_1}{r} \simeq \gamma^{1/(n-2)} \left[1 - \frac{2(1-2Q)}{(n-2)^2} \gamma + 2 \frac{(n-1)^2 - n(3n-4)Q(1-Q)}{(n-2)^4(n-1)} \gamma^2 \right]. \quad (23)$$

Отсюда следует, что в ведущем порядке по малому параметру r_1/r имеет место равенство $\gamma \simeq (r_1/r)^{n-2}$. После его подстановки в решение (16) с учетом соотношений

$$\gamma_+ \gamma_- = \frac{(n-1)(n-2)}{4Q(Q-1)}, \quad \gamma_+ + \gamma_- = \frac{(n-1)(1-2Q)}{2Q(1-Q)}$$

получим в пределе $\gamma \rightarrow +0$ следующие выражения для метрических коэффициентов $e^{2\alpha}$ и $e^{2\beta}$:

$$e^{2\alpha} \simeq 1 - \frac{2}{n-2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n-2}, \quad e^{2\beta} \simeq 1 + \frac{2(1-2Q)}{n-2} \left(\frac{r_1}{r} \right)^{n-2}. \quad (24)$$

Как видим, полученные решения (16) в физической области при $r \rightarrow \infty$ являются асимптотически плоскими, причем реализуется ньютоновский предел, а именно гравитационный потенциал в области слабого поля $\varphi(r) \sim 1/r$ (при $n = 3$). Сравнение выражений (24) и (10) показывает, что параметр, играющий роль гравитационного радиуса в дилатонном решении (16) (и переходящий в r_0 в пределе $Q \rightarrow 0$), имеет вид

$$r_g = r_1 \left(\frac{2}{n-2} \right)^{1/(n-2)}. \quad (25)$$

С учетом последнего равенства используем r_g вместо r_1 и выразим из ряда (23) параметр γ через малый параметр $\rho = r_g/r$:

$$\gamma \simeq \frac{1}{2}\rho + \frac{1-2Q}{2}\rho^2 + \frac{4-17Q(1-Q)}{8}\rho^3, \quad \rho \equiv \frac{r_g}{r}. \quad (26)$$

Здесь и ниже мы полагаем, что $n = 3$ – пространство имеет физическую размерность.

Подставляя выражение (26) в формулы (16), (18) для метрических коэффициентов, получим следующие разложения в ньютоновском пределе $r \rightarrow \infty$ (или $\rho \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} e^{-2\alpha} &= 1 + \rho + (1-Q)\rho^2 + (1-Q)\left(1 - \frac{13}{12}Q\right)\rho^3, \\ e^{-2\beta} &= 1 - (1-2Q)\rho + \frac{1}{2}Q(1-Q)\rho^2 + \frac{1}{4}Q(1-Q)(1-2Q)\rho^3. \end{aligned} \quad (27)$$

Эти разложения необходимы для анализа одного из важнейших наблюдательных проявлений рассматриваемой гравитационной модели – смещения перигелия (периастрия).

Рассмотрим траектории пробных частиц в гравитационном поле (16), подобные траекториям движения планет в поле тяготения Солнца. В теории Ньютона такие орбиты – эллипсы, но в ОТО для решения Шварцшильда (19) они являются квазиэллиптическими и характеризуются поворотом (сдвигом) перигелия за 1 оборот на угол [8]

$$\Delta\theta \simeq \frac{3\pi r_g}{a(1-\epsilon^2)}. \quad (28)$$

Здесь $r_g = 2GM/c^2$ – гравитационный радиус источника тяготения (Солнца), a – большая полуось эллипса и ϵ – его эксцентриситет. Скорость света c ниже положим равной 1.

Траекториями движения пробных частиц в гравитационном поле (16) являются времениподобные геодезические ($ds^2 > 0$) (предполагаем, что данные частицы не взаимодействуют непосредственно с дилатонным полем ϕ). Рассмотрим движение пробных частиц в плоскости $\theta_1 = 0$, в которой положение точки (частицы) в момент t определяют координаты r и $\theta \equiv \theta_2$. Уравнения соответствующих геодезических в случае метрики (3) имеют вид (21) и

$$\frac{d^2 t}{ds^2} + 2\alpha' \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{d^2 \theta}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{d\theta}{ds} \frac{dr}{ds} = 0. \quad (30)$$

Уравнения (29) и (30) после интегрирования приводят к следующим выражениям:

$$\frac{dt}{ds} = A e^{-2\alpha}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{C_\theta}{r^2}. \quad (31)$$

Здесь $A = E/m$, $C_\theta = L/m$ – соответственно энергия и угловой момент на единицу массы частицы, которые являются сохраняющимися первыми интегралами системы.

Подставив равенства (31) в выражение для метрики (3)

$$ds^2 = e^{2\alpha} dt^2 - e^{2\beta} dr^2 - r^2 d\theta^2$$

в плоскости движения и исключив переменную s , получим дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 = \frac{1}{C_\theta^2} e^{-2\beta} \left(A^2 e^{-2\alpha} - 1 - \frac{C_\theta^2}{r^2} \right), \quad (32)$$

определяющее траекторию пробной частицы. Анализ уравнения (32) показывает, что движение частицы финитно, а орбита является квазиэллиптической в случае $A < 1$.

Будем предполагать, что гравитационное поле является слабым, и в ньютоновском пределе $r \rightarrow \infty$ имеют место асимптотические разложения (27), а также неравенства

$$r \gg r_g, \quad C_\theta \gg r_g, \quad 1 - A \ll 1. \quad (33)$$

Используя асимптотические разложения (27) для $e^{-2\beta}$, $e^{-2\alpha}$ и обозначение $\rho = r_g/r$, перепишем уравнение (32) в виде

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \pm \sqrt{f(\rho)}, \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \{A^2 - 1 + [1 - 2Q(1 - A^2)]\rho\} \frac{r_g^2}{C_\theta^2} + B_2 \rho^2 + B_3 \rho^3 + o(\rho^3), \\ B_2 &= -1 + Q \left[A^2 - \frac{1}{2}(1 - Q)(1 - A^2) \right] \frac{r_g^2}{C_\theta^2}, \\ B_3 &= 1 - 2Q + Q(1 - Q) \left[\frac{17}{12} A^2 - \frac{1}{4}(1 - 2Q)(1 - A^2) \right] \frac{r_g^2}{C_\theta^2}. \end{aligned}$$

Финитное движение является квазиэллиптическим, если уравнение $f(\rho) = 0$ имеет три положительных корня ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , которые мы занумеруем в порядке возрастания. При выполнении условий (33) их значения определяются приближенными равенствами

$$\rho_1 + \rho_2 \simeq \frac{r_g^2}{C_\theta^2}, \quad \rho_3 \simeq B_3^{-1} \left(1 - Q \frac{r_g^2}{C_\theta^2} \right) - \frac{r_g^2}{C_\theta^2}. \quad (35)$$

При этом величина ρ меняется в пределах $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, а из неравенств (33) следует $\rho_1 < \rho_2 \ll \rho_3 \simeq (1 - 2Q)^{-1}$.

Сдвиг $\Delta\theta$ перигелия орбиты за 1 оборот определяется с помощью уравнения (34):

$$\Delta\theta = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} - 2\pi = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1}{\sqrt{(\rho_2 - \rho)(\rho - \rho_1)}} \{ [B_3(\rho_3 - \rho)]^{-1/2} - 1 \} d\rho.$$

Вычисление интеграла с учетом равенств (35) и условий (33) приводит к следующему выражению в ведущем порядке малости по r_g^2/C_θ^2 и $(1 - A^2)$:

$$\Delta\theta \simeq \frac{\pi(3-4Q)}{2} \frac{r_g^2}{C_\theta^2} = \frac{\pi(3-4Q)r_g}{a(1-\epsilon^2)}. \quad (36)$$

Здесь учтена связь параметров эллипса a и ϵ с ρ_1 и ρ_2 :

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{r_g}{\rho_1} + \frac{r_g}{\rho_2} \right) = \frac{r_g}{2} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}, \quad 1 - \epsilon^2 = 1 - \left(\frac{\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1}}{\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}} \right)^2 = \frac{4\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}.$$

Как видим, в дилатонной гравитационной модели важнейший наблюдательный параметр теории – сдвиг перигелия $\Delta\theta$ (36) – отличается множителем $1 - 4Q/3$ от аналогичного выражения (28) в ОТО.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Инспирированное теорией струн введение в форме (1) скалярного поля ϕ в действие ОТО приводит к изменению глобальных свойств центрально-симметричных решений. А именно, найденные в работе решения шварцшильдовского типа (11), (16) дилатонной гравитационной модели (1) при $n \geq 3$, $\Lambda = 0$ отличаются от их аналогов (10), (19) в ОТО отсутствием горизонта событий и стационарной черной дыры, соответственно.

При этом свойства решений (16) в области слабого гравитационного поля ($r \rightarrow \infty$) подобны свойствам решения Шварцшильда (19). Для них имеет место ньютоновский предел и, в частности, такой постньютоновский эффект, как сдвиг перигелия, определяемый формулой (36).

Список литературы

- [1] *Е. Г. Воронцова, Г. С. Шаров.* ТМФ. 2000. Т. 123. № 1. С. 163.
- [2] *E. S. Fradkin, A. A. Tseytlin.* Phys. Lett. B. 1985. V. 158. P. 316.
- [3] *C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec, M. J. Perry.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 262. P. 593; *C. Lovelace.* Phys. Lett. B. 1984. V. 135. P. 75; Nucl. Phys. B. 1986. V. 273. P. 413; *S. Capozziello, G. Lambiase.* Int. J. Mod. Phys. D. 2003. V. 12. P. 843.
- [4] *A. A. Tseytlin.* Int. J. Mod. Phys. D. 1992. V. 1. P. 223; hep-th/9203033.
- [5] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. Т. 1. М.: Мир, 1990.
- [6] *C. G. Callan, S. B. Giddings, J. A. Harvey, A. Strominger.* Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 1005; hep-th/9111056; *G. W. Gibbons, M. J. Perry.* Int. J. Mod. Phys. D. 1992. V. 1. P. 335; hep-th/9204090; *H. Pelzer, T. Strobl.* Class. Q. Grav. 1998. V. 15. P. 3803; gr-qc/9805059.
- [7] *M. Cadoni.* Phys. Rev. D. 1996. V. 54. P. 7378.
- [8] *Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 20.1.2005 г.