Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Быков, А. А. Славнов, Вакуумные конденсаты размерности два
в калибровочно-инвариантных теориях, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 2, 147–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1890>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 18:18:23

© 2005 г.

Д. В. Быков*, А. А. Славнов†

ВАКУУМНЫЕ КОНДЕНСАТЫ РАЗМЕРНОСТИ ДВА В КАЛИБРОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫХ ТЕОРИЯХ

Исследована зависимость от калибровки вакуумного конденсата размерности два в абелевых и неабелевых теориях Янга–Миллса.

Ключевые слова: конденсат, калибровочная инвариантность, разложение Вильсона

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В последнее время все больше внимания в неабелевых калибровочных теориях уделяется вакуумным конденсатам $\langle 0 | A_\mu^a{}^2 | 0 \rangle$ и $\langle 0 | \bar{c}^a c^a | 0 \rangle$. Предполагается, что эти конденсаты несут информацию о таких непертурбативных явлениях в квантовой хромодинамике, как конфайнмент кварков [1], и дают вклад в непертурбативные части глюонного [2] и кваркового [3] пропагаторов. В работах [1] была выдвинута идея о том, что глюонный конденсат может быть чувствителен к топологическим дефектам, таким как, например, дираковские струны и монополи. Рассматриваемые конденсаты являются вакуумными средними операторов, зависящих от калибровки, что порождает сложности при использовании их для анализа наблюдаемых явлений. В работах [4], [5] было показано, что если рассматривать теорию Янга–Миллса как предел (регуляризованной) некоммутативной калибровочно-инвариантной теории, то вакуумное среднее $\langle \int d^4x A_\mu^2 \rangle$ не зависит от выбора калибровки и, следовательно, может иметь непосредственный физический смысл. Это доказательство опирается на калибровочно-инвариантную регуляризацию некоммутативных теорий, вопрос о существовании которой нуждается в дополнительном исследовании. Поэтому представляет интерес анализ калибровочной инвариантности конденсата размерности два в коммутативной теории, а также вопрос о возможном вкладе этого конденсата в операторное разложение Вильсона. Частичный ответ на этот вопрос в рамках абелевой теории был дан в работе [4]. В настоящей работе мы продолжаем исследование данного вопроса как в абелевом, так и в неабелевом случае и исследуем проблему вильсоновского разложения в некоммутативной теории.

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: dmitribykov@mtu-net.ru

†Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: slavnov@mi.ras.ru

2. НЕКОТОРЫЕ КОНДЕНСАТЫ МАССОВОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

В данном разделе мы будем рассматривать функции Грина и вакуумные средние глюонного поля $A_\mu(x)$ в α -калибровках, а также духовых полей $\bar{c}(x)$, $c(x)$.

В неабелевых калибровочных теориях наиболее простыми являются функции Грина вида $\langle T A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle$, $\langle T \bar{c}(x) c(y) \rangle$. Современные численные расчеты континуальных интегралов, определяющих вакуумные средние, позволяют исследовать непертурбативные вклады в эти пропагаторы. Такие вклады наиболее наглядно представлены в вильсоновских разложениях операторов $T A_\mu(x) A_\nu(y)$ и $T \bar{c}(x) c(y)$, где они проявляются в виде степенных поправок к ведущему члену порядка $O((x-y)^{-2})$, который соответствует в разложении единичному оператору. Следующие операторы, дающие вклад в это разложение, суть операторы массовой размерности два: $A_\mu(x) A^\mu(x)$ и $\bar{c}(x) c(x)$. В этой работе мы ограничимся рассмотрением этих конденсатов. Их вклад в разложение Вильсона имеет вид [6]

$$\int d^4x e^{ipx} (T A_\mu^a(x) A_\nu^b(0)) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} C_{\mu\nu}^{[1]ab}(p) \cdot 1 + C_{\mu\nu}^{[A^2]ab}(p) (A_\rho^c)^2 + C_{\mu\nu}^{[\bar{c}c]ab}(p) \bar{c}^d c^d + \dots \quad (1)$$

Для того чтобы проанализировать поведение глюонного пропагатора при больших импульсах, следует вычислить вакуумное среднее этого выражения. При этом, очевидно, необходимо знать свойства конденсатов $\langle 0 | (A_\rho^c)^2 | 0 \rangle$ и $\langle 0 | \bar{c}^d c^d | 0 \rangle$. В частности, представляет интерес вопрос о том, возможно ли построение из данных конденсатов (или соответствующих операторов) калибровочно-инвариантных или хотя бы БРСТ-инвариантных величин. На последний вопрос ответ частично был дан в работе [6]: в калибровках с фиксирующим калибровку/духовым членом вида¹⁾

$$L_{\text{GF} + \text{FP}} = \frac{\alpha'}{2} B^a B^a - \frac{\alpha'}{2} g t^{abd} c^b \bar{c}^d B^a + B^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a M_{ab} c^b - \frac{\alpha'}{8} g^2 t^{abd} t^{aef} \bar{c}^b \bar{c}^d c^e c^f \quad (2)$$

существует БРСТ-инвариантный оператор $\mathfrak{D} \equiv \int d^4x (A_\mu(x) A^\mu(x) - \alpha' \bar{c}(x) c(x))/2$. Стоит отметить, что БРСТ-инвариантность данного оператора сохраняется и в $U(1)$ -теории в калибровке лоренцева типа, однако в общем случае теории Янга–Миллса в наиболее часто употребительной калибровке лоренцева типа (α -калибровке) это утверждение несправедливо. Действительно, $L_{\text{GF} + \text{FP}}$ из (2) ни при каком α' не переходит в член вида

$$L_{\text{GF} + \text{FP}} = -\frac{\alpha}{2} B^a B^a + B^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a M_{ab} c^b,$$

соответствующий калибровке лоренцева типа. Кроме того, можно непосредственно проверить, что

$$\delta \mathfrak{D} = \int d^4x \left[\partial_\mu (A_\mu^a c_a) + \frac{\alpha}{2} t^{abd} c^b c^d \bar{c}^a \right] = \int d^4x \frac{\alpha}{2} t^{abd} c^b c^d \bar{c}^a \neq 0. \quad (3)$$

¹⁾Здесь B – вспомогательное поле Наканиши–Лаутрупа, интегрирование по которому легко проводится в континуальном интеграле.

С другой стороны, в физическом секторе оператор $\mathcal{A} \equiv c^b c^d \bar{c}^a$ эквивалентен нулевому оператору в силу единичного духового числа:

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{phys}}\rangle: Q_{\text{ghost}}|\psi_{\text{phys}}\rangle &= Q_{\text{BRST}}|\psi_{\text{phys}}\rangle = 0, \\ 0 &= \langle \psi_{\text{phys}}^1 | [iQ_{\text{ghost}}, \mathcal{A}] | \psi_{\text{phys}}^2 \rangle = \langle \psi_{\text{phys}}^1 | \mathcal{A} | \psi_{\text{phys}}^2 \rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

В работе [6] также доказано, что вышеупомянутый оператор является БРСТ-инвариантным не только в калибровке, определяемой функционалом (2), но и в максимальной абелевой калибровке.

Отметим немаловажное принципиальное различие между пропагаторами калибровочных полей в абелевой и неабелевой теориях. Примечательным является тот факт, что в абелевой $U(1)$ -теории калибровочный параметр α входит в полный пропагатор фотонного поля лишь через тривиальную продольную часть:

$$G_{\mu\nu}(p) = \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) G(p^2) - \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^4}, \quad (5)$$

где $G(p^2)$ не зависит от α (в неабелевой теории это утверждение неверно, что легко показать, проведя вычисления в низших порядках теории возмущений). Доказательство этого утверждения можно найти, например, в работе [4]. В приложении 1 мы приведем иное доказательство, основанное на тождествах Уорда. Данное утверждение позволяет нам построить следующую калибровочно-инвариантную величину:

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A^\mu(y) + \alpha \bar{c}(x) c(y)) | 0 \rangle. \quad (6)$$

Действительно, в абелевой теории духовое поле является свободным, и

$$\langle 0 | T(\bar{c}(x) c(y)) | 0 \rangle = \int d^4 p e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2 + i\epsilon}.$$

Учитывая, что

$$\langle 0 | T(A_\mu(x) A^\mu(y)) | 0 \rangle = \int d^4 p e^{ip(x-y)} G_\mu^\mu(p),$$

получаем калибровочную инвариантность указанной величины. Из аналогичных соображений ясно, что вакуумный конденсат $\langle 0 | A_\mu(x) A^\mu(x) + \alpha \bar{c}(x) c(x) | 0 \rangle$ также калибровочно-инвариантен.

3. ВКЛАД КОНДЕНСАТОВ $\langle A_\mu^2 \rangle$ И $\langle \bar{c}c \rangle$ В ВИЛЬСОНОВСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА $T(A_\mu(x) A^\mu(y) + \alpha \bar{c}(x) c(y))$ В $U(1)$ -ТЕОРИИ

В данном разделе мы рассмотрим вопрос о том, какие ограничения накладывает калибровочная инвариантность вакуумного среднего $\langle 0 | \mathcal{K}(x, y) | 0 \rangle$, где $\mathcal{K}(x, y) \equiv$

$T(A_\mu(x)A^\mu(y) + \alpha\bar{c}(x)c(y))$, на члены, входящие в вильсоновское разложение этого оператора. Вильсоновское разложение для оператора $\mathcal{K}(x, y)$ в коммутативной $U(1)$ -теории (с учетом взаимодействия со спинорным полем $\psi(x)$ массы m) имеет вид²⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x, y) \xrightarrow{x-y \rightarrow 0} & C_0(x-y) \cdot 1 + C_{1\mu\nu}^{(1)}(x-y)A^\mu(y)A^\nu(y) + \\ & + C_{2ab}^{(1)}(x-y)\bar{c}^a(y)c^b(y) + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты $C_{1\mu\nu}^{(1)}$ и $C_{2ab}^{(1)}$ безразмерны. Кроме того, в нашем распоряжении есть лишь две тензорные структуры: $\eta_{\mu\nu}$ и $z_\mu \equiv x_\mu - y_\mu$. В теории присутствует один явный массовый масштаб – масса спинора m , и один скрытый – точка вычитания μ . Заметим, впрочем, что последняя входит лишь в логарифмические поправки к степенному разложению (мы рассматриваем случай $z \rightarrow 0$, но для справедливости такого разложения необходимо, чтобы $|g \ln z^2 \mu^2| < 1$). Таким образом, любой коэффициент разложения имеет следующую структуру:

$$C(z) = Az^\alpha \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (g \ln z^2 \mu^2)^k \right). \quad (8)$$

Вопрос о массе спинора является несколько более тонким. Могут ли члены с отрицательными степенями m давать вклад в коэффициентные функции? Если да, то вся структура вильсоновского разложения для несингулярных членов разрушается, так как тогда можно было бы операторы произвольной массовой размерности делить на необходимую степень массы и в результате получать величины другой массовой размерности. При этом в любом порядке по z возникает бесконечный ряд из конденсатов. К счастью, существует теорема Вайнберга, которая гарантирует для квантовой электродинамики существование предела нулевой массы спинора в случае диаграмм без исключительных внешних импульсов, и члены, упомянутые выше, запрещены.

Принимая во внимание все вышесказанное, запишем наиболее общий вид функций $C_{1\mu\nu}^{(1)}$ и $C_{2ab}^{(1)}$:

$$C_{1\mu\nu}^{(1)} = \beta \eta_{\mu\nu}, \quad C_{2ab}^{(1)} = \kappa \delta_{ab}. \quad (9)$$

Подставим их в разложение (7), получим

$$\mathcal{K}(x, y) \xrightarrow{x-y \rightarrow 0} C_0(x-y) \cdot 1 + \beta A^2(y) + \kappa \bar{c}^a(y)c^a(y) + \dots \quad (10)$$

Калибровочная инвариантность вакуумного среднего левой части этого соотношения накладывает ограничение на коэффициенты β и κ :

$$\frac{\kappa}{\beta} = \alpha. \quad (11)$$

Это равенство не нуждается в дополнительном доказательстве, так как в предыдущем разделе мы показали, что в абелевом случае вакуумный конденсат $\langle 0 | A_\mu^2(x) + \alpha\bar{c}(x)c(x) | 0 \rangle$ не зависит от калибровки.

²⁾Мы не учитываем возможные конденсаты с ненулевым духовым числом, т.к. в физическом секторе теории они роли не играют.

4. НЕОБХОДИМОЕ СЛЕДСТВИЕ РАВЕНСТВА $d\langle A_\mu^2 \rangle/d\alpha = 0$

Особый интерес представляет случай неабелевой теории. В работе [4] методами некоммутативной теории поля показано, что калибровочно-инвариантным является конденсат $\langle 0|A_\mu^a(x)A_\mu^a(x)|0\rangle$:

$$\frac{d}{d\alpha} \left\langle \int d^4x A_\mu(x) A^\mu(x) \right\rangle \equiv 0, \quad (12)$$

однако данное утверждение нуждается в некотором пояснении, т.к., например, из (5) видно, что в частном случае абелевой теории

$$\frac{d}{d\alpha} \langle 0|A_\mu(x)A^\mu(x)|0\rangle = D(0),$$

где

$$D(x) = - \int \frac{e^{ipx}}{p^2 + i\epsilon} d^4p,$$

и производная конденсата равна нулю лишь при $D(0) = 0$, что справедливо, например, в размерной регуляризации. Вполне возможно, что в некоммутативной теории требование существования калибровочно-инвариантной регуляризации является весьма жестким, а вышеупомянутое условие является необходимым для такого существования. Данный вопрос нетривиален и нуждается в дальнейшем исследовании. Здесь мы приведем один из возможных методов проверки равенства (12). Покажем, что необходимым является следующее условие:

$$\langle \bar{c}^a(x)c^a(x) \rangle|_{\alpha=0} = 0, \quad (13)$$

которое выражает отсутствие конденсации духов в лоренцевой калибровке.

Континуальный интеграл, определяющий искомый вакуумный конденсат, имеет в теории Янга–Миллса следующий вид:

$$\begin{aligned} \left\langle \int d^4x A_\mu(x) A^\mu(x) \right\rangle &= N^{-1} \int \left(\int d^4x A_\mu(x) A^\mu(x) \right) \times \\ &\times \exp \left\{ i \int d^4x \left(L(A_\mu) + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \bar{c}^a M_{ab} c^b \right) \right\} \times \\ &\times \left(\prod_{x,\mu} dA_\mu(x) d\bar{c} dc \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где L – лагранжиан поля Янга–Миллса без полей материи,

$$L = -\frac{1}{4} \text{tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (15)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + g[A_\mu, A_\nu]. \quad (16)$$

Осуществим в выписанном континуальном интеграле преобразование

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{\delta\alpha}{2\alpha} D_\mu^x \int M^{-1}(x, y) \partial^\nu A_\nu(y) d^4y$$

и, отбрасывая члены выше первого порядка по $\delta\alpha$, получим, что

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\alpha} d^4x A_{\mu}(x) A^{\mu}(x) \right\rangle &= \left\langle \int_{\alpha+\delta\alpha} d^4x A_{\mu}(x) A^{\mu}(x) \right\rangle - \\ &- \frac{\delta\alpha}{\alpha} \int d^4x \int e^{iS} \text{tr}(A_{\mu}(x) D_{\mu}^x (M^{-1} \partial_{\nu} A^{\nu})) \times \\ &\times \prod_x dA_{\mu}(x) d\bar{c} dc. \end{aligned} \quad (17)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_{\mu}(x) D_{\mu}^x (M^{-1} \partial_{\nu} A^{\nu}))^x &= A_{\mu}^a(x) D_{\mu}^{ab} (M_{bc}^{-1} \partial_{\nu} A_c^{\nu})^x = \\ &= A_{\mu}^a(x) (\delta^{ab} \partial_{\mu} - t^{acb} A_{\mu}^c(x)) (M_{bc}^{-1} \partial_{\nu} A_c^{\nu})^x. \end{aligned} \quad (18)$$

Примем во внимание антисимметрию структурных констант t^{abc} калибровочной группы:

$$A_{\mu}^a(x) A_{\mu}^c(x) t^{abc} = \frac{1}{2} (A_{\mu}^a(x) A_{\mu}^c(x) t^{abc} + A_{\mu}^c(x) A_{\mu}^a(x) t^{cba}) = 0. \quad (19)$$

Поэтому соотношение (17) после интегрирования по частям в последнем члене преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\alpha} d^4x A_{\mu}(x) A^{\mu}(x) \right\rangle &= \left\langle \int_{\alpha+\delta\alpha} d^4x A_{\mu}(x) A^{\mu}(x) \right\rangle + \\ &+ \frac{\delta\alpha}{\alpha} \int d^4x d^4y \int e^{iS} \partial^{\mu} A_{\mu}^a(x) M_{ab}^{-1}(x, y) \times \\ &\times \partial_{\nu} A_{\nu}^b(y) \prod_x dA_{\mu}(x) d\bar{c} dc, \end{aligned} \quad (20)$$

где $M(x, y)$ – ядро оператора M . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left\langle \int d^4x A_{\mu}^2(x) \right\rangle &= -\frac{1}{\alpha} \int d^4x d^4y \int \partial_{\mu} A_{\mu}^a(x) M_{ab}^{-1}(x, y) \times \\ &\times \partial_{\nu} A_{\nu}^b(y) e^{iS} \prod_x dA d\bar{c} dc. \end{aligned} \quad (21)$$

Правую часть последнего равенства можно переписать как

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \left\langle \int d^4x A_{\mu}^2(x) \right\rangle &= -\frac{1}{\alpha} \int d^4x d^4y \langle \partial_{\mu} A_{\mu}^{(0),a}(x) \partial_{\nu} A_{\nu}^{(0),b}(y) \rangle \langle M_{ab}^{-1}(x, y) \rangle - \\ &- \frac{1}{\alpha} \int d^4x d^4x' d^4y d^4y' \partial_{\mu} D_{\mu\mu'}^{(0),ac}(x - x') \times \\ &\times \partial_{\nu} D_{\nu\nu'}^{(0),bd}(y - y') T_{\mu'\nu'}^{abcd}(x', y'). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $A_{\mu}^{(0),a}$ – свободное калибровочное поле, а $D_{\mu\mu'}^{(0),ab}(x - y)$ – его пропагатор. Функцию $T_{\mu'\nu'}^{abcd}$ можно записать в виде ряда теории возмущений, пользуясь формулой (21).

Важно, что эта функция несингулярна при $\alpha = 0$. В то же время свободная функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\partial_\mu^x D_{\mu\nu}^{(0),ab}(x-y) = -\alpha \delta_{ab} \partial_\nu^x \int \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + i\epsilon} d^4k. \quad (23)$$

Отсюда следует, что в пределе $\alpha \rightarrow 0$ второй интеграл в правой части равенства (22) обращается в нуль, поэтому

$$\frac{d}{d\alpha} \left\langle \int d^4x A_\mu^2(x) \right\rangle \Big|_{\alpha=0} = \left\langle \int d^4x M_{aa}^{-1}(x, x, A) \right\rangle \Big|_{\alpha=0} = \langle \bar{c}^a(x) c^a(x) \rangle \Big|_{\alpha=0}. \quad (24)$$

По предположению выполнено соотношение (12), поэтому имеем необходимое условие

$$\left\langle \int dx \bar{c}^a(x) c^a(x) \right\rangle \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad (25)$$

В абелевом случае это требование вновь сводится к условию $D(0) = 0$, которое обсуждалось выше. Еще раз поясним, что равенство (25) должно выполняться в коммутативной теории, если она получена предельным переходом $\xi \rightarrow 0$ из калибровочно-инвариантно регуляризованной некоммутативной теории. Стоит отметить, что калибровочная инвариантность конденсата $\langle A_\mu^2 \rangle$ в неабелевой теории еще не гарантирует его присутствия в вильсоновском разложении калибровочно-инвариантного произведения операторов. Дело в том, что калибровочная инвариантность этого конденсата была доказана с использованием некоммутативной формулировки теории. В то же время, как показано в приложении 2, в некоммутативной теории вильсоновское разложение может быть нарушено членами порядка ξ , что не позволяет сделать вывод о присутствии этого оператора в вильсоновском разложении.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены следующие результаты.

1. В $U(1)$ -теории показана калибровочная инвариантность вакуумного среднего $\langle 0 | T(A_\mu(x) A^\mu(y) + \alpha \bar{c}(x) c(y)) | 0 \rangle$ и построен явный вид вильсоновского разложения этого оператора.

2. Предложен метод проверки равенства $d\langle A_\mu^2 \rangle / d\alpha = 0$ в неабелевой теории на основании анализа свойств духового конденсата.

3. Показано, что в некоммутативной теории поля вильсоновское разложение произведения операторов несправедливо, и поэтому из калибровочной инвариантности конденсата $\langle A_\mu^2 \rangle$ нельзя сделать вывод о присутствии соответствующего оператора в вильсоновском разложении калибровочно-инвариантного произведения операторов в коммутативной теории.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказательство утверждения $dG(p^2)/d\alpha = 0$. Вычислим производную пропагатора, предварительно свернув его по лоренцовским индексам:

$$\frac{d}{d\alpha} \langle T(A_\mu(x) A^\mu(0)) \rangle = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\int A_\mu(x) A^\mu(0) e^{iS(\alpha)} \prod_x dA d\bar{c} dc}{\int e^{iS(\alpha)} \prod_x dA d\bar{c} dc} \right]. \quad (26)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &\equiv \int A_\mu(x) A^\mu(0) e^{iS(\alpha)} \prod_x dA d\bar{c} dc, \\ N(\alpha) &\equiv \int e^{iS(\alpha)} \prod_x dA d\bar{c} dc, \quad C(x) \equiv \langle T(A_\mu(x) A^\mu(0)) \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Тогда

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{Q'N - QN'}{N^2}, \quad (28)$$

$$Q' = \int A_\mu(x) A^\mu(0) \left(-\frac{i}{2\alpha^2} \int (\partial_\mu A^\mu)^2 d^4y \right) e^{iS} \prod dA d\bar{c} dc. \quad (29)$$

Тождество Уорда для абелевой теории имеет вид

$$\frac{1}{\alpha} \partial_{\nu_1}^y \left[\frac{1}{i} \frac{\delta Z}{\delta J_{\nu_1}(y)} \right] = - \int d^4z J_{\nu_1}(z) \partial_{\nu_1}^z D(y-z) \cdot Z. \quad (30)$$

Последовательно применяя к этому равенству операторы

$$\partial_{\nu_2}^q \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_{\nu_2}(q)} \right], \quad \frac{1}{i^2} \frac{\delta}{\delta J_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta J_\mu(0)},$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \partial_{\nu_1}^y \partial_{\nu_2}^q \left[\frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z}{\delta J_{\nu_1}(y) \delta J_{\nu_2}(q)} \right] &= -\frac{1}{i} \delta(y-q) \cdot Z - \\ &\quad - \frac{1}{i} \int d^4z J_{\nu_1}(z) \partial_{\nu_1}^z D(y-z) \partial_{\nu_2}^q \frac{\delta Z}{\delta J_{\nu_2}(q)}; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \partial_{\nu_1}^y \partial_{\nu_2}^q \left[\frac{1}{i^4} \frac{\delta^4 Z}{\delta J_{\nu_1}(y) \delta J_{\nu_2}(q) \delta J_\mu(x) \delta J_\mu(0)} \right]_{J=0} &= \frac{1}{i^3} \delta(y-q) \frac{\delta^2 Z}{\delta J_\mu(x) \delta J_\mu(0)} \Big|_{J=0} - \\ &\quad - \frac{1}{i^3} \left\{ \partial_\mu^x D(y-x) \partial_{\nu_2}^q \frac{\delta^2 Z}{\delta J_{\nu_2}(q) \delta J_\mu(0)} - \partial_\mu^y D(y) \partial_{\nu_2}^q \frac{\delta^2 Z}{\delta J_{\nu_2}(q) \delta J_\mu(x)} \right\}_{J=0}. \end{aligned} \quad (32)$$

Полагая $q = y$ и интегрируя по y , получим:

$$\begin{aligned} Q' &= -\frac{i}{2\alpha} \frac{1}{i} \left(-(2\pi)^4 (\delta(0))^2 Q + N \int d^4y \partial_\mu^y D(y) \partial_{\nu_2}^y \langle T A_{\nu_2}(y) A_\mu(x) \rangle - \right. \\ &\quad \left. - N \int d^4y \partial_\mu^x D(y-x) \partial_{\nu_2}^y \langle T A_{\nu_2}(y) A_\mu(0) \rangle \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь, конечно, под $\delta(0)$ необходимо понимать регуляризацию $\delta(0) = (2\pi)^{-4}\Omega$ (Ω — объем импульсного пространства) и после проведения вычислений совершить предельный переход $\Omega \rightarrow \infty$. После интегрирования по частям в двух последних интегралах и использования тождества Уорда для двухточечной функции Грина,

$$\partial_\mu^x \partial_\nu^y \langle T(A^\mu(x)A^\nu(y)) \rangle = -\alpha \delta(x-y),$$

приходим к результату:

$$Q' = -\frac{N}{2\alpha}(-(2\pi)^4(\delta(0))^2 \langle T(A_\mu(x)A^\mu(0)) \rangle - 2\alpha D(x)). \quad (34)$$

Аналогично получим

$$N' = \frac{1}{2\alpha}(2\pi)^4(\delta(0))^2 N. \quad (35)$$

Комбинируя два последних равенства, имеем

$$Q' \cdot N - N' \cdot Q = D(x) N^2, \quad (36)$$

и в силу равенства (28)

$$\frac{dC}{d\alpha} = D(x). \quad (37)$$

Поскольку фактически $C(x)$ есть свертка тождества (5) по лоренцевым индексам, то ясно, что в (5) величина $G(p^2)$ не зависит от α , что и требовалось доказать.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Невозможность построения вильсоновского разложения в некоммутативной теории поля. Приведем простейший пример: разложение для $T\phi(x)\phi(0)$ при $x \rightarrow 0$ в случае $(\phi \star \phi \star \phi \star \phi)$ -теории. Ясно, что в некоммутативной теории поля теоретически возможны два различных разложения:

$$T\phi(x)\phi(0) = C_0(x) \cdot 1 + C_1(x) \cdot [\phi(0) \cdot \phi(0)] + \dots, \quad (38)$$

$$T\phi(x)\phi(0) = C_0(x) \cdot 1 + C_1(x) \cdot [\phi(0) \star \phi(0)] + \dots \quad (39)$$

с коммутативными и некоммутативными конденсатами, соответственно. Ни один из этих вариантов не реализуется в действительности. Рассмотрим матричный элемент по одночастичным состояниям $\langle p|T\phi(x)\phi(0)|k \rangle$ в низшем порядке³⁾ ($\sim g$):

$$\begin{aligned} \int d^4x e^{iqx} \langle p|T\phi(x)\phi(0)|k \rangle &\sim \frac{g}{3} \frac{1}{q^2 + m^2} \frac{1}{(\omega - q)^2 + m^2} \times \\ &\times (\cos[(\omega - q) \times q] \cos[p \times k] + \cos[(\omega - q) \times p] \cos[q \times k] + \\ &+ \cos[(\omega - q) \times k] \cos[q \times p]), \end{aligned} \quad (40)$$

³⁾Правила Фейнмана для некоммутативной ϕ^4 -теории приведены, например, в [7].

где $\omega = k - p$. При $q \rightarrow \infty$ множитель $(q^2 + m^2)^{-1}((\omega - q)^2 + m^2)^{-1}$ в (40) имеет порядок q^{-4} . Обозначим $A(q, k, p, \omega)$ соответствующую асимптотику правой части равенства.

Как легко видеть, эту функцию нельзя представить в виде произведения функций, зависящих от большого импульса q и малых внешних импульсов p и k , т.е.

$$A(q, k, p, \omega) \neq B(q) \cdot C(k, p), \quad (41)$$

а такое представление необходимо для обоих вариантов вильсоновского разложения (38) или (39), что вытекает непосредственно из их вида.

Для сравнения рассмотрим коммутативный предел $\xi \rightarrow 0$ амплитуды (40) или асимптотики функции $A(q, k, p, \omega)$:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} A(q, k, p, \omega) \sim \frac{g}{q^4}, \quad (42)$$

который преобразуется к виду (41) при

$$B(q) = \frac{g}{q^4}, \quad C(k, p) = 1. \quad (43)$$

Похожие рассуждения приведены в работе [8].

Благодарности. Данная работа была частично поддержана РФФИ (грант № 050100541), программой поддержки ведущих научных школ (грант № 2005220031) и программой “Теоретические проблемы математики”.

Список литературы

- [1] *F. V. Gubarev, L. Stodolsky, V. I. Zakharov.* Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 2220; *F. V. Gubarev, V. I. Zakharov.* Phys. Lett. B. 2001. V. 501. P. 28.
- [2] *M. Lavelle, M. Schaden.* Phys. Lett. B. 1988. V. 208. P. 297; *Ph. Boucaud, A. Le Yaouanc, J. P. Leroy et al.* Phys. Lett. B. 2000. V. 493. P. 315.
- [3] *E. R. Arriola, P. O. Bowman, Q. Broniowski.* Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 097505.
- [4] *A. A. Slavnov.* Phys. Lett. B. 2005. V. 608. P. 171.
- [5] *A. A. Славнов.* ТМФ. 2005. Т. 113. № 1. С. 3; hep-th/0407194.
- [6] *K.-I. Kondo.* Phys. Lett. B. 2001. V. 514. P. 335.
- [7] *I. Ya. Arefeva, D. M. Belov, A. S. Koshelev.* Phys. Lett. B. 2000. V. 476. P. 431.
- [8] *F. Zamora.* ЖНЕР. 2000. V. 0005. P. 002.

Поступила в редакцию 4.IV.2005 г.