Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Беннаи, З. Сахи, Аспекты матричной теории и некоммутативной геометрии,
ТМФ, 2005, том 145, номер 2, 181–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1893>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:58:38

© 2005 г.

М. Беннаи*, З. Сахи*

АСПЕКТЫ МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ И НЕКОММУТАТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Приведен обзор основных положений матричной модели, описывающей М-теорию. Исследуется важная задача компактификации матричной модели, связанной с некоммутативной геометрией. Показано, что имеют место решения этой задачи, отличные от хорошо известных тороидальных решений Конна, Дугласа и Шварца.

Ключевые слова: D0-браны, матричная теория, некоммутативная геометрия

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы были приведены многочисленные аргументы и факты, свидетельствующие в пользу существования новой теории, порождающей многообразные пертурбативные струнные возбуждения [1]. Эта теория, известная как М-теория, имеет чисто непертурбативный характер и описывается низкоэнергетическим пределом 11-мерной супергравитации. Было также показано, что эта 11-мерная супергравитация задает предел сильной связи в суперструнной теории типа IIA [2].

Сравнительно недавно для микроскопического описания фундаментальных степеней свободы М-теории, представляющих собой D0-браны, была предложена гипотетическая матричная модель М-теории [3]. Сами D0-браны суть нульмерные объекты, взаимодействие которых описывается матрицами [4], [5]. Матричная модель задается суперсимметричной $U(N)$ -калибровочной теорией Янга–Миллса (ЯМ) с максимально возможной суперсимметрией, а параметр N есть светоподобный импульс, или число D0-бран, которое в работе [6] понимается как число струн Грина–Шварца в калибровке светового конуса. Таким образом, предел больших N отвечает длинным струнам в системе отсчета бесконечных импульсов (СБИ) [7]. Этот предел был также проинтерпретирован Фэйрли [6] в терминах формализма мойяловской скобки. В этой работе утверждалось, что использование данного формализма оправдывается тем обстоятельством, что формулировка матричной теории аналогична мойяловской формулировке квантовой механики. Мойяловская скобка задается с помощью звездчатого произведения, которое является неотъемлемой составляющей моделей некоммутативной геометрии [8].

*Groupe de Physique des Hautes Energies et Cosmologie, Departement de Physique, Faculté des Sciences Ben M'sik, Casablanca, Morocco. E-mail: m.bennai@univh2m.ac.ma

Недавно некоммутативная геометрия была использована при описании компактифицированной матричной модели в присутствии антисимметричного тензорного поля третьего ранга. Компактификация матричной теории на некоммутативный тор была впервые реализована Конном, Дугласом и Шварцем (КДШ) [9] с помощью так называемых проективно-модулярных решений уравнений связи для компактификации. Впоследствии метод КДШ был обобщен на другие многообразия типа орбифолдов и ориентифолдов [10], [11]. На них компактифицированная матричная модель нашла свою интерпретацию в виде калибровочной теории поля на квантовом пространстве.

В настоящей работе дается обзор механизмов компактификации матричных теорий на некоммутативном торе и приводятся некоторые обобщения указанных конструкций на другие многообразия старших размерностей, обладающие специальной некоммутативной геометрией F_0^θ [12].

В разделе 2 дан краткий обзор матрично-модельной формулировки М-теории, основанной на динамике D0-бран. В разделе 3 приведены основные сведения о тороидальной компактификации матричной теории и решения КДШ определяющих уравнений связи для указанной компактификации. Мы посвятили раздел 4 исследованию матричной теории на некоммутативной геометрии F_0 с использованием гармонического анализа на 2-сфере и на 3-сфере. В заключительной части работы мы привели указания на возможные перспективные исследования.

2. МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ М-ТЕОРИИ

В соответствии с матрично-модельным описанием М-теория представляет собой не что иное, как предел больших N суперсимметричной квантовой теории ЯМ с калибровочной группой $U(N)$ в СБИ [3]. Напомним, что в СБИ [7], или в системе отсчета светового конуса, 11-мерное пространство–время М-теории задается одним продольным направлением x^- и девятимерным поперечным пространством $\{x^i\}$. В качестве времени выступает координата светового конуса x^+ . Чтобы представить систему D0-бран в СБИ, необходимо компактифицировать координату продольного направления x^- на окружность радиуса R . При этом продольный импульс квантуется в единицах $1/R$

$$P_- = \frac{N}{R}, \quad (1)$$

где $N > 0$. Компактификация координаты x^- при этом эквивалентна дискретизации продольного импульса. В таком описании D0-браны – это объекты теории, имеющие продольный импульс $P_- = 1/R$. Таким образом, М-теория в системе светового конуса представляет собой теорию, в которой единственными динамическими степенями свободы, или партонами, оказываются D0-браны. Отметим, что эти базисные степени свободы являются состояниями Богомольного–Просад–Зоммерфельда М-теории [5].

Хотя процедура дискретизации струн была применена для генерации D0-бран, некоторые струны не полностью отщепились от теории. На самом деле, как показал Польшинский [4], в системе остаются открытые струны, соединяющие D0-браны системы.

Более того, было показано, что координаты очень коротких струн, соединяющих между собой D0-браны, задаются девятью $(N \times N)$ -матрицами, которые мы обозначаем Y^i , $i = 1, 2, \dots, 9$ [5]. Обозначим фермионных суперпартнеров матриц Y^i через θ ; они преобразуются как спиноры относительно группы $SO(9)$ вращений в поперечном пространстве. После размерной редукции на пространство постоянных полей эти матрицы оказываются связанными с пространственными компонентами 10-мерных суперсимметричных $U(N)$ -полей ЯМ. Тем самым, суперсимметричные поля ЯМ описывают открытые струны, которые соединены с D0-бранами, и мы приходим к $(0 + 1)$ -мерной суперсимметричной $U(N)$ -теории ЯМ, описываемой лагранжианом

$$L = \text{tr} \left[\frac{1}{2R} D_t Y^i D_t Y^i - \frac{1}{4} R [Y^i, Y^j]^2 - \theta^T D_t \theta - R \theta^T \gamma_i [\theta, Y^i] \right], \quad (2)$$

где 11-мерная планковская длина считается равной единице, а $D_t = \partial_t + iA$, где A — калибровочное поле.

В работе [13] было показано, что этот лагранжиан задает свойства D0-бран при малых расстояниях в струнной теории в режиме слабой связи. Соответствующий гамильтониан имеет вид

$$H = R \text{tr} \left\{ \frac{\pi_i \pi_j}{2} + \frac{1}{4} [Y^i, Y^j]^2 + \theta^T \gamma_i [\theta, Y^i] \right\}, \quad (3)$$

где π_i — импульс, сопряженный переменной Y^i .

В соответствии с гипотезой Банка–Фишлера–Шенкера–Саскинда (БФШС) [3] М-теория в СБИ в точности эквивалентна пределу больших N суперсимметричной квантовой механики, описываемой гамильтонианом (3). Соответственно, вычисление любой физической величины в М-теории сводится к взятию предела $N \rightarrow \infty$ для величины, вычисленной в рамках матричной квантовой механики. Компактификация модели в связи со структурой пространства–времени тем не менее остается среди важных нерешенных вопросов матричной теории. В данной работе показано, что компактификация матричной теории неразрывно связана с некоммутативно-геометрической природой пространства–времени.

3. КОМПАКТИФИКАЦИЯ МАТРИЧНОЙ МОДЕЛИ

3.1. Торическая компактификация. После появления первой матричной модели М-теории были приведены другие формулировки М-теории. Среди них отметим матричную модель, введенную в работе [14] для описания струн типа IIB, которую далее мы будем называть модель ИККТ по фамилиям авторов. Заметим, что эта модель может быть получена редукцией 10-мерной суперсимметричной теории ЯМ к точке и представляет собой нульмерную суперсимметричную теорию поля, которая воспроизводит стандартную матричную модель БФШС с точностью до компактификации на окружность S^1 . Физические степени свободы модели ИККТ суть 10-мерный суперсимметричный мультиплет (X^μ, Ψ_A) , $\mu = 1, \dots, 10$, $A = 1, \dots, 16$, в присоединенном представлении алгебры Ли $u(N)$, а действие $S(X, \Psi)$ имеет вид

$$S(X, \Psi) = R \text{tr} \{ [X_\mu, X_\nu] [X^\mu, X^\nu] + 2 \Psi \Gamma^\mu [X_\mu, \Psi] \}. \quad (4)$$

Заметим, что X_μ и Ψ_A представляют собой 10 и 16 компонент соответствующих векторного $SO(10)$ -представления и представления в виде вейлевского спинора.

Рассмотрим компактификацию матричной модели ИККТ на два-тор T^2 . Как и раньше, места расположения D0-бран определяются собственными значениями матриц. Чтобы осуществить компактификацию на два-тор, рассмотрим следующие условия, отражающие периодичность пространства координат два-тора:

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 + 2\pi R_1 = U_1 X_1 U_1^{-1}, \\ X_2 &= X_2 + 2\pi R_2 = U_2 X_2 U_2^{-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти уравнения связи предполагают отождествление $X + 2\pi R$ с X с точностью до некоторого калибровочного преобразования. Восемь других направлений в матричной теории остаются инвариантными при действии U_1 и U_2 . При этом

$$\begin{aligned} X_1 &= U_2 X_1 U_2^{-1}, & X_2 &= U_1 X_2 U_1^{-1}, \\ X_a &= U_i X_a U_i^{-1}; & i &= 1, 2, \quad a = 3, \dots, 10. \end{aligned} \quad (6)$$

В простейшем случае, если операторы трансляций коммутируют, частные решения уравнений (5) представляют собой частные производные, в то время как общее решение задается ковариантными производными:

$$X_1 = i\partial_1 + A_1(U_1, U_2), \quad X_2 = i\partial_2 + A_2(U_1, U_2). \quad (7)$$

В этом случае операторы U_i имеют смысл генераторов алгебры функций на дуальном торе T^2 ,

$$U_i = e^{2\pi i R_i x_i}. \quad (8)$$

Из последнего соотношения следует, что мы имеем дуальное пространство размера $\widetilde{R}_i = 1/R_i$. В результате компактификации на два-тор X_1 и X_2 становятся ковариантными производными на дуальном торе, в то время как другие координаты остаются скалярными полями на указанном дуальном торе.

В общем случае, при некоммутирующих операторах трансляций U_i , решения уравнений связи (5) были построены в работе [9]. В этом случае имеет место соотношение

$$U_1 U_2 = e^{2\pi i \theta} U_2 U_1. \quad (9)$$

Физическая интерпретация параметра θ состоит в том, что он представляет собой интеграл от три-формы потенциала 11-мерной супергравитации на три-цикле, включающем в том числе светоподобное направление,

$$\theta = R \int C_{12-} dx^1 dx^2 dx^-. \quad (10)$$

В следующем пункте будут представлены решения КДШ тороидальной компактификации с использованием так называемой техники проективных модулей [15].

3.2. Решение КДШ в технике проективных модулей. Для того чтобы построить решение задачи о компактификации матричной модели на некоммутативный тор T^2 , Конн, Дуглас и Шварц рассмотрели операторы, действующие на пространстве функций, заданных на $\mathbb{Z}_q \otimes R$, где $\mathbb{Z}_q = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$. Пусть U_i – операторы, действующие на функциях $f(s, k)$, $s \in R$, $k \in \mathbb{Z}_q$, $i = 1, 2$, следующим образом:

$$U_1 f(s, k) = e^{2\pi i \gamma s} f(s, k - p), \quad U_2 f(s, k) = e^{-2\pi i \gamma \frac{k}{q}} f(s + 1, k). \quad (11)$$

Операторы U_1 и U_2 при этом удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$U_1 U_2 = e^{-2\pi i \gamma + 2\pi i p/q} U_2 U_1 \equiv e^{2\pi i \theta} U_2 U_1, \quad (12)$$

где $\theta = p/q - \gamma$.

Рассмотрим теперь операторы X_i , задающиеся формулами

$$X_1 f(s, k) = i\nu \frac{\partial f(s, k)}{\partial s}, \quad X_2 f(s, k) = \tau s f(s, k), \quad (13)$$

с коммутационными соотношениями

$$[X_1, X_2] = \frac{2\pi i}{\gamma} R_1 R_2, \quad (14)$$

где $R_1 = \nu\gamma$ и $R_2 = \tau/(2\pi)$.

Чтобы построить общее решение уравнений связи (5), введем два независимых оператора Z_1 и Z_2 , коммутирующих как с U_1 , так и с U_2 и действующих на функции $f(s, k)$ следующим образом:

$$Z_1 f(s, k) = e^{2\pi i s/q} f(s, k - 1), \quad Z_2 f(s, k) = e^{i\nu k} f(s + \sigma, k), \quad (15)$$

где $\gamma = (\tau q)^{-1}$, $\nu = -2\pi a/q$, $ap + bq = 1$ и $a, b \in \mathbb{Z}$. Эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$Z_1 Z_2 = e^{2\pi i \theta'} Z_2 Z_1, \quad (16)$$

где

$$\theta' = \frac{a\theta + b}{p - q\theta}. \quad (17)$$

Таким образом, θ и θ' связаны между собой преобразованием из группы $SL(2, \mathbb{Z})$. Координаты дуального некоммутативного тора σ_i связаны с параметром θ' следующим образом:

$$[\sigma_1, \sigma_2] = -2\pi i \theta'. \quad (18)$$

Однородные решения как в компактифицированных направлениях A_i , так и в некомпактифицированных направлениях X_a являются полями на дуальном некоммутативном

торе с модулярным параметром θ' . При этом общее решение уравнений связи для компактификации имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= i \frac{2\pi R_1}{\gamma q} D_1 + A_1(\sigma_1, \sigma_2), \\ X_2 &= i \frac{2\pi R_2}{\gamma q} D_2 + A_2(\sigma_1, \sigma_2), \end{aligned} \quad (19)$$

где D_i – ковариантные производные, удовлетворяющие соотношению

$$[D_1, D_2] = \frac{\gamma q^2}{2\pi i}. \quad (20)$$

До того как мы перейдем к следующему разделу, отметим, что метод КДШ был с успехом применен к описанию многих других сложных геометрий, включающих в себя некоммутативные ориентифолды [10] и некоммутативный тор $T^4/\mathbb{Z}_2$ [11], а впоследствии и к некоммутативной геометрии F_0 [12], которая составляет предмет нашего дальнейшего рассмотрения.

4. НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ F_0

Уже было показано, что компактифицированная матричная модель ИККТ на T^2 приводит к суперсимметричной теории ЯМ размерности два на некоммутативном торе [9]. В этом разделе исследуется компактификация модели ИККТ на двумерно комплексное компактное многообразие Хирцебруха F_0 . Это пространство определяется как тензорное произведение двух 2-сфер, $F_0 = S^2 \times S^2$. Поэтому начнем с построения компактификации на 2-сфере S^2 . Заметим, что роль один-цикла S^1 (соответствующего случаю два-тора $T^2 = S^1 \times S^1$) в анализе КДШ играют приводимые два-циклы S^2 на F_0 . Чтобы конкретизировать определяющие уравнения связи для компактификации модели ИККТ на F_0 , мы используем гармонический анализ [16] на три-сфере $S^3 = SU(2)$ и ее изометриях, имея целью выписать компактификацию на S^2 . Тогда можно получить компактификацию на $S^2 \times S^2$ с помощью отождествления $S^3 \times S^3 \simeq SU(2) \times SU(2)$ с последующим устранением произвола, соответствующего подгруппе $U(1) \otimes U(1)$, с помощью наложения калибровочного условия. Мы начнем исследование компактификации на S^2 с того, что выведем уравнения связи для компактификации на S^3 . Затем мы найдем их решения как для S^3 , так и для S^2 .

4.1. Компактификация на S^3 . Как уже отмечалось, физическими степенями свободы для модели ИККТ являются (X^μ, Ψ_A) , $\mu = 1, \dots, 10$, $A = 1, \dots, 16$. Наша стратегия будет состоять в том, чтобы исследовать компактификацию матричной модели на S^3 , которая станет изоморфной S^2 после наложения подходящих условий на алгебру функций на S^3 , а впоследствии и на $F_0 = S^2 \times S^2$.

Разобьем сначала десять координат X^μ , $\mu = 1, \dots, 10$, на два подкласса: $\{X^i\}$ и $\{X^I\}$, $i = 1, 2, 3$ и $I = 4, \dots, 10$. Изотриплет $\{X^i\}$ относительно группы $SU(2)$ можно представить в терминах (2×2) -матриц Паули $(\sigma_i)^{ab}$, $a, b = 1, 2$, как $X^{(ab)} = (\sigma_i \varepsilon)^{ab} X^i$.

Из условия компактификации на S^3 следует, что переменные X^i должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} [X^i, X^j] &= i\epsilon^{ijk} X^k, & X_g^i &= gX^i g^{-1}, \\ X^I &= X_g^I = gX^I g^{-1}, \end{aligned} \quad (21)$$

где g – калибровочное преобразование, а переменные X_g^μ суть калибровочно преобразованные переменные X^μ . Заметим, что все три компоненты триплета преобразуются с помощью одного и того же калибровочного преобразования. Это связано с указанной выше неприводимостью два-цикла S^2 . Для нас более предпочтительным оказывается запись этих уравнений связи в эквивалентной форме в картановском базисе алгебры $su(2)$ [12], [16]:

$$\begin{aligned} [X^{++}, X^{--}] &= -iX^0, \\ [X^0, X^{++}] &= -2iX^{++}, \\ [X^0, X^{--}] &= +2iX^{--}, \end{aligned} \quad (22)$$

или, что эквивалентно,

$$\begin{aligned} X^{++} + \Gamma^{++} &= gX^{++}g^{-1}, \\ X^{--} + \Gamma^{--} &= gX^{--}g^{-1}, \\ X^0 + \Gamma^0 &= gX^0g^{-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Более детально гармонический анализ на сфере обсуждался в работе [12]. Заметим, что уравнения (23) на дуальной сфере допускают решение

$$X^{++} = iD^{++}, \quad X^{--} = iD^{--}, \quad X^0 = iD^0, \quad (24)$$

где D^{++} , D^{--} и D^0 суть гармонические производные на $\hat{S}^3$,

$$\begin{aligned} -iX^{++} &= D^{++} = u^{+a} \frac{\partial}{\partial u^{-a}}, \\ -iX^{--} &= D^{--} = u^{-a} \frac{\partial}{\partial u^{+a}}, \\ -iX^0 &= D^0 = u^{+a} \frac{\partial}{\partial u^{+a}} - u^{-a} \frac{\partial}{\partial u^{-a}}, \end{aligned} \quad (25)$$

а $u^{\pm a}$ – гармонические переменные на дуальной сфере $\hat{S}^3$.

Заметим, что при наличии трех калибровочных полей A^{++} , A^{--} и A^0 на три-сфере гармонические производные D^{++} , D^{--} и D^0 можно заменить соответствующими ковариантными производными

$$\nabla^{++} = D^{++} + iA^{++}, \quad \nabla^{--} = D^{--} + iA^{--}, \quad \nabla^0 = D^0 + iA^0. \quad (26)$$

В этом случае решение имеет вид

$$-iX^{++} = \nabla^{++}, \quad -iX^{--} = \nabla^{--}, \quad -iX^0 = \nabla^0, \quad X^I = A^I(u^\pm). \quad (27)$$

4.2. Компактификация на S^2 . Решения для компактификации модели ИККТ на S^2 можно вывести из соответствующих решений для компактификации на S^3 , если заморозить калибровочные степени свободы, связанные с картановской подсимметрией $U(1)$ в групповом многообразии $su(2) = S^3$. Уравнения связи, определяющие компактификацию на S^2 при этом задаются уравнениями (23) при условии, что все гармонические функции, определенные на S^3 , должны удовлетворять дополнительному требованию

$$[D^0, F^q] = qF^q, \quad (28)$$

или, что эквивалентно,

$$F^q(u^\pm) = \sum u_{a_{n+q}}^+ \dots u_{a_1}^+ u_{b_1}^- \dots u_{b_n}^- F^{(a_1 \dots a_{n+q} b_1 \dots b_n)}. \quad (29)$$

Для решений (27), полученных для компактификации на S^3 , из требования сохранения $U(1)$ -заряда для картановской подсимметрии в алгебре $su(2)$ следует, что $\nabla^0 = D^0$, т.е. $A^0 = 0$. При этом получим следующие соотношения:

$$[\nabla^{++}, \nabla^{--}] = D^0, \quad [D^0, \nabla^{++}] = 2\nabla^{++}, \quad [D^0, \nabla^{--}] = -2\nabla^{--}, \quad (30)$$

и более того,

$$D^{++}A^{--} - D^{--}A^{++} = 0, \quad D^0A^{++} = 2A^{++}, \quad D^0A^{--} = -2A^{--}. \quad (31)$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$A^{++} = D^{++}V, \quad A^{--} = D^{--}V, \quad (32)$$

где V – произвольная функция на S^2 .

4.3. Компактификация на F_0 . Рассмотрим теперь многообразие F_0 , которое весьма близко по конструкции к тору $T^2 = S^1 \times S^1$. Подобно случаю компактификации на T^2 , в этом случае также можно ожидать, что существует возможность построить компактификацию матричной модели в некоммутативной геометрии F_0^θ с помощью нетривиального обобщения результатов КДШ.

Чтобы выписать уравнения связи, соответствующие компактификации модели ИККТ на F_0 , разобьем сначала десять бозонных координат этой модели на два класса: $\{X^i\}$, $i = 1, \dots, 6$ и $\{X^I\}$, $I = 7, 8, 9, 10$, а затем рассмотрим компактификацию подмножества $\{X^i\}$ на $S^3 \times S^3$. Из этой процедуры следует, что переменные X^i можно представить как пару триплетов $\{X_1^{(a,b)}, X_2^{(a,b)}\}$, что мы перепишем в следующем виде:

$$\{X_1^{(++ , 0)}, X_1^{(0, 0)}, X_1^{(-- , 0)}, X_2^{(0, ++)}, X_2^{(0, 0)}, X_2^{(0, --)}\}.$$

Уравнения связи для компактификации переменных ИККТ на $S^3 \times S^3$ в этих новых координатах имеют вид

$$\begin{aligned} [X_1^{(++ , 0)}, X_1^{(-- , 0)}] &= -iX_1^{(0, 0)}, & [X_1^{(0, 0)}, X_1^{(\pm\pm , 0)}] &= \mp 2iX_1^{(\pm\pm , 0)}, \\ [X_2^{(0, ++)}, X_2^{(0, --)}] &= -iX_2^{(0, 0)}, & [X_2^{(0, 0)}, X_2^{(0, \pm\pm)}] &= \mp 2iX_2^{(0, \pm\pm)}, \end{aligned} \quad (33)$$

что можно эквивалентно записать как

$$\begin{aligned} X_1^{(q,0)} + \Gamma_1^{(q,0)} &= g_1 X_1^{(q,0)} g_1^{-1}, \\ X_2^{(0,q)} + \Gamma_2^{(0,q)} &= g_2 X_2^{(0,q)} g_2^{-1}, \\ X_1 &= g_i X_1 g_i^{-1}, \quad q = ++, --, 0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (34)$$

где g_1 и g_2 — два калибровочных преобразования. Чтобы получить компактификацию на $S^2 \times S^2$ из анализа компактификации на $S^3 \times S^3$, можно использовать уравнения связи (33), (34) и потребовать сохранения картановских зарядов:

$$\begin{aligned} [D_1^0, \Phi^{(q_1, q_2)}(u^{\pm a}, u^{\pm \dot{a}})] &= q_1 \Phi^{(q_1, q_2)}(u^{\pm a}, u^{\pm \dot{a}}), \\ [D_2^0, \Phi^{(q_1, q_2)}(u^{\pm a}, u^{\pm \dot{a}})] &= q_2 \Phi^{(q_1, q_2)}(u^{\pm a}, u^{\pm \dot{a}}), \end{aligned} \quad (35)$$

где $\Phi^{(q_1, q_2)}(u^{\pm a}, u^{\pm \dot{a}})$ обозначает $X_1^{(q,0)}$ или $X_2^{(0,q)}$, $q = 0, \pm 2$, или любую другую гармоническую функцию, заданную на $S^2 \times S^2$, например, калибровочные поля $A_\mu^{(q_1, q_2)}$ и калибровочные преобразования g_1 и g_2 соответствующих зарядов (q_1, q_2) и $(0, 0)$.

Чтобы построить решения для компактификации на $S^2 \times S^2$, рассмотрим случай, когда два-циклы на F_0 оказываются некоммутативными. Для этого перепишем уравнения (35) при $q_1 = q_2 = ++$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} [X_1^{(++,0)}, g_1] &= -\Gamma_1^{(++,0)} g_1, & [X_1^{(++,0)}, g_1^{-1}] &= \Gamma_1^{(++,0)} g_1^{-1}, \\ [X_2^{(0,++)}, g_2] &= -\Gamma_2^{(0,++)} g_2, & [X_2^{(0,++)}, g_2^{-1}] &= \Gamma_2^{(0,++)} g_2^{-1}, \\ [X_1^{(++,0)}, g_2] &= [X_2^{(0,++)}, g_1] = 0, & [X_2^{(0,++)}, g_1^{-1}] &= [X_1^{(++,0)}, g_2^{-1}] = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Метод, используемый при исследовании компактификации на некоммутативном многообразии F_0 , во многом повторяет метод, основанный на гармоническом анализе на сфере S^3 , который был представлен в предшествующих разделах. Следуя работам [9], [12] для $\lambda \neq 1$, можно найти частные решения

$$\begin{aligned} X_1^{++} &= iD^{++}, & X_2^{++} &= \Gamma_1^{++}, \\ X_1^{--} &= iD^{--}, & X_2^{--} &= \Gamma_1^{--}, \\ X_1 &= iD^0, & X_2^0 &= \Gamma_1. \end{aligned} \quad (37)$$

Эти уравнения задают компактификацию матричной модели ИККТ на некоммутативной геометрии F_0^θ и представляют собой обобщение результатов для компактификации матричной теории на некоммутативном торе.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы впервые исследовали физические обоснования матричной модели М-теории, изучая динамику D0-бран. Мы полагаем, что анализ важной проблемы компактификации в ее связи с некоммутативной геометрией является вкладом в матричную модель М-теории. На этом пути мы обобщили известные тороидальные

решения Конна, Дугласа и Шварца на компактные многообразия старших размерностей, такие как некоммутативное многообразие F_0 . Это пространство можно определить как тензорное произведение двух два-сфер, $F_0 = S^2 \times S^2$. Принятая в данной работе конструкция состоит в продолжении анализа с многообразия T_0^θ на F_0^θ ; при этом роль один-циклов S^1 на два-торе $T^2 = S^1 \times S^1$ в анализе КДШ исполняется неприводимыми два-циклами S^2 на многообразии F_0 . Для исследования этой проблемы построены порождающие уравнения связи для компактификации модели ИККТ на F_0 , при этом использован гармонический анализ на три-сфере $S^3 = SU(2)$ и на ее изометриях с целью выписать компактификацию на сферу S^2 . Эта сфера получается из S^3 , если откалибровать картановскую подгруппу группы $SU(2)$. Компактификация на $S^2 \times S^2$ может быть получена, если использовать группу симметрий $S^3 \times S^3 = SU(2) \times SU(2)$ и откалибровать подгруппу $U(1) \times U(1)$. Представляется возможным обобщить указанную конструкцию на старшие компактные циклы размерности $2k$, включающие k сфер S^2 . Заметим также, что интересно попробовать осуществить поиск некоммутативности, выступающей как внутреннее свойство некоторых более сложных геометрий типа геометрии многообразий Калаби–Яу, с помощью некоторых приемов алгебраической геометрии [17].

Благодарности. М. Беннаи благодарен профессору Е. Х. Саиди за сотрудничество в области матричной теории.

Список литературы

- [1] *M. J. Duff*. Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 5623.
- [2] *E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1995. V. 443. P. 85.
- [3] *T. Banks, W. Fischler, S. Shenker, L. Susskind*. Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 5112.
- [4] *J. Polchinski*. TASI lectures on D-branes. In: Fields, trings, and Duality, TASI 96 (Boulder, Colorado, USA 2–28 June 1996). Eds. C. Efthimiou, B. Greene. Teaneck, NJ: Worlds Scientific, 1997. P. 293; hep-th/9611050.
- [5] *E. Witten*. Nucl. Phys. B. 1996. V. 460. P. 335.
- [6] *D. Fairlie*. Mod. Phys. Lett. A. 1998. V. 13. P. 263.
- [7] *S. Weinberg*. Phys. Rev. 1966. V. 150. P. 1313.
- [8] *A. Connes*. Noncommutative Geometry. Academic Press, 1994.
- [9] *A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz*. JHEP. 1998. V. 9802. P. 003; hep-th/9711162.
- [10] *N. Kim*. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 126001.
- [11] *E. Kim, H. Kim, C.-Y. Lee*. J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 2677.
- [12] *I. Benkadour, M. Bennai, E. Diaf, E. H. Saidi*. Class. Quant. Grav. 2000. P. 1765.
- [13] *U. H. Danielsson, G. Ferretti, B. Sundborg*. Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 5463.
- [14] *N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya*. Nucl. Phys. B. 1997. V. 498. P. 467.
- [15] *M. Rieffel*. Can. J. Math. 1988. V. 40. № 2. P. 257.
- [16] *A. Galperin, E. Ivanov, S. Kalitzin, V. Ogievetsky, E. Sokatchev*. Class. Quant. Grav. 1984. V. 1. P. 496; 1987. V. 4. P. 1255; Com. Math. Phys. 1986. V. 103. P. 515; *E. H. Saidi, M. Zakkari*. Class. Quant. Grav. 1990. V. 7. P. 123; Phys. Rev. D. 1992. V. 46. P. 777.
- [17] *M. Bennai, E. H. Saidi*. Phys. Lett. B. 2002. V. 550. P. 108; Nucl. Phys. B. 2004. V. 677. P. 587.

Поступила в редакцию 8.I.2005 г.